59. Dacă F este un filtru al algebrei Boole B, atunci $B/_F$ şi $B/_{F^+}$ sînt izomorfe.

6o. Să se caracterizeze idealele proprii maximale ale unei algebre Boole.

CAPITOLUL 3

Sistemul formal al calculului propoziţional

Scopul acestui capitol este de-a descrie în detaliu sistemul formal al calculului propoziţional. Acest sistem formal este cel mai simplu sistem formal şi pe el se bazează toate celelalte sisteme formale (care sînt fundamentate de o logică bivalentă).

Paragraful 1 se ocupă cu prezentarea sintaxei acestui sistem formal: simboluri primitive, enunţuri, teoreme formale,etc,iar în paragraful 2 sînt prezentate o serie de teoreme formale ale sistemului. Paragraful 3 studiază semantica sistemului formal al calculului propoziţional, conţinînd cel mai important rezultat al capitolului: teorema de completitudine a lui Gödel.

Proprietăţile conectorilor auxiliari $\vee, \wedge \longleftrightarrow$ sînt date în § 4. Paragraful 5 va preciza un adevăr intrat în folclorul ştiinţei: algebrele Boole sînt reflectarea algebrică a calculului propoziţional.

§ 1. PREZENTAREA SISTEMULUI FORMAL AL CALCULULUI PROPOZITIONAL

Alfabetul sistemului formal al calculului propoziţional, adică lista de simboluri primitive ce o vom utiliza, cuprinde următoarele elemente:

1). O mulţime infinită V de variabile propoziţionale, notate u, v, w,...(eventual cu indici sau cu accente).

2). Simbolurile logice (conectori):

$\neg$: numit simbolul de negaţie (va fi citit: non)

$\rightarrow$: numit simbolul de implicaţie (va fi citit:implică)

3). Parantezele (,), [,]

Cu ajutorul acestor simboluri, vom construi cuvinte sau ansamblaje. Prin definiţie, un cuvînt este un şir finit de simboluri ale alfabetului dat mai sus, scrise unul după altul.

Exemplu: $u \to uv\neg\,)$

$u \to \neg v$

Din mulţimea cuvintelor, le vom selecta pe acelea care „au sens", noţiune precizată astfel:

Se numeşte enunţ orice cuvînt φ care verifică una din condiţiile următoare:

(i) φ este o variabilă propoziţională.

(ii) Există un enunţ ψ, astfel încît $\varphi = \neg\psi$.

(iii) Există enunţurile ψ, θ, astfel încît $\varphi = (\psi \to \theta)$.

OBSERVAŢIE: Definiţia conceptului de enunţ este dată „din aproape în aproape", trecîndu-se de la un pas la următorul exact ca în cazul inducţiei. Se poate demonstra că într-adevăr aceasta este o definiţie prin inducţie, dar nu insistăm asupra acestui lucru.

Deci variabilele propoziţionale sînt enunţuri, pe care le vom numi enunţuri elementare. Vom nota cu E mulţimea tuturor enunţurilor.

Pentru orice enunţuri φ, ψ introduce următoarele prescurtări:

$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \to \psi$ (disjuncţia lui φ şi ψ)

$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$ (conjuncţia lui φ şi ψ)

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ (echivalenţa logică a lui φ şi ψ)

OBSERVAŢIE: În prezentarea sistemului formal al calculului propoziţional, am considerat negaţia şi implicaţia drept conectori primitivi, ceilalţi conectori fiind definiţi cu ajutorul lor. Există alte construcţii ale sistemului formal al calculului propozi-

ţional (echivalente cu cea din acest curs) în care sînt luaţi alţi conectori primitivi.

În cele ce urmează vom detaşa din mulţimea enunţurilor o submulţime a sa care va constitui mulţimea „adevărurilor sintactice" ale sistemului formal prezentat.

O axiomă a sistemului formal al calculului propoziţional este un enunţ care are una din următoarele forme:

(A 1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A 2) $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$

(A 3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

unde φ, ψ şi χ sînt enunţuri arbitrare.

O teoremă a sistemului formal al calculului propoziţional este un enunţ φ care verifică una din condiţiile următoare:

(T 1) φ este o axiomă.

(T 2) Există un enunţ ψ, astfel încît ψ şi $\psi \to \varphi$ sînt teoreme.

Proprietatea (T2) se mai scrie prescurtat

$$\frac{\psi,\ \psi \to \varphi}{\varphi}$$

şi se numeşte regula de deducţie „modus ponens" (m.p.)

Vom nota cu T mulţimea teoremelor, iar faptul că φ este o teoremă cu $\vdash \varphi$.

Prin demonstraţie formală a unui enunţ φ vom înţelege un şir finit $\psi_1, \ldots, \psi_n$, de enunţuri astfel încît $\psi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \leq i \leq n$ se verifică una din condiţiile următoare:

(1) ψ_i este o axiomă.

(2) Există k, $j < i$, astfel încît $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Se observă că $\vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există o demonstraţie formală $\psi_1, \ldots, \psi_m$ a lui φ.

m se numeşte lungimea demonstraţiei. O teoremă poate avea demonstraţii de lungimi diferite.

Fie Γ o mulţime de enunţuri şi φ un enunţ. Vom spune că enunţul φ este dedus din ipotezele Γ dacă una din condiţiile următoare este verificată:

(D 1) φ este o axiomă.

(D 2) $\varphi \in \Gamma$.

(D 3) Există un enunţ ψ, astfel încît enunţurile ψ şi $(\psi \to \varphi)$ sînt deduse din ipotezele Γ. D 3 se numeşte tot regula modus ponens (m.p.).

Dacă φ este dedus din ipotezele Γ, vom scrie $\Gamma \vdash \varphi$.

OBSERVATIE

(i) $\emptyset \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi$.

(ii) Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

Cu aceasta, descrierea sistemului formal al calculului propoziţional este terminată. Vom nota cu L acest sistem formal. Observăm că, la nivelul prezentat aici, enunţurile şi teoremele sînt numai nişte şiruri de simboluri.

§ 2. PROPRIETATI SINTACTICE ALE SISTEMULUI FORMAL L AL CALCULULUI PROPOZITIONAL

Prin proprietăţile sintactice ale lui L le vom înţelege pe acelea ce se referă la enunţurile lui L ca simple şiruri de simboluri ale alfabetului prezentat în § 1, făcîndu-se abstracţie de orice interpretare a lor.

PROPOZITIA 1. Fie $\Gamma, \Delta \subset E$ şi $\varphi, \psi \in E$. Atunci avem

(i) Dacă $\Delta \subset \Gamma$, $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci există $\Sigma \subset \Gamma$ finită, astfel încît $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \chi$, pentru orice $\chi \in \Delta$ şi $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstraţie: (i) Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci este verificată una din condiţiile (D 1) - (D 3) din § 1.

Le vom lua pe rînd:

- dacă φ este axiomă, atunci avem evident $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă $\varphi \in \Delta$, atunci $\varphi \in \Gamma$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă ~~$\psi, (\psi \to \varphi) \in \Delta$~~, atunci ψ, $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Delta \vdash \psi$, $\Delta \vdash (\psi \to \varphi)$

(ii) Demonstrăm această proprietate din aproape în aproape:

- dacă φ este axiomă, atunci $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \subset \Gamma$ este finită.
- dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci luăm $\Sigma = \{\varphi\}$ şi este evident că $\Sigma \vdash \varphi$.
- presupunînd că $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash (\psi \to \varphi)$ şi că există Σ_1, $\Sigma_2 \subset \Gamma$ finite astfel încît $\Sigma_1 \vdash \psi$, $\Sigma_2 \vdash (\psi \to \varphi)$, atunci luăm $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Gamma$; Σ este finită şi $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash (\psi \to \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Considerăm şi aici toate cazurile:

- dacă φ este o axiomă, atunci este evident că $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă $\varphi \in \Delta$, este clar că $\Gamma \vdash \varphi$, prin ipoteză.
- presupunînd că $\Delta \vdash \psi$, $\Delta \vdash (\psi \to \varphi)$, deci pentru $\psi, \psi \to \varphi$ s-a verificat că $\Gamma \vdash \psi$, $\Gamma \vdash (\psi \to \varphi)$; atunci avem $\Gamma \vdash \varphi$.

PROPOZITIA 2. Pentru orice enunţ φ, avem

$$\vdash (\varphi \to \varphi)$$

Demonstraţie. Următoarea listă de enunţuri este o demonstraţie formală a lui $\vdash \varphi \to \varphi$, în partea dreaptă indicînd argumentarea:

(1) $[\varphi \to [(\varphi \to \varphi) \to \varphi]] \to [[\varphi \to (\varphi \to \varphi)] \to (\varphi \to \varphi)]$ A 2.

(2) $\varphi \to [(\varphi \to \varphi) \to \varphi]$ A 1.

(3) $[\varphi \to (\varphi \to \varphi)] \to (\varphi \to \varphi)$ (1),(2), m.p.

(4) $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ A 1.

(5) $\varphi \to \varphi$ (3),(4), m.p.

<u>PROPOZITIA 3</u>. Fie Γ o mulţime de enunţuri şi $\varphi \in E$. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există un şir finit de enunţuri $\psi_1,\dots,\psi_m$ astfel încît $\psi_m = \varphi$ şi pentru orice $i \leq m$ este verificată una din condiţiile următoare:

(i) ψ_i este o axiomă.

(ii) $\psi_i \in \Gamma$.

(iii) Există $j, k < i$, astfel încît $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

<u>Demonstraţie</u>: Această condiţie este o retranscriere evidentă a definiţiei lui $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>OBSERVATIE</u>: Vom spune că şirul $\psi_1,\dots,\psi_m$ este o <u>demonstraţie formală din ipotezele Γ</u> sau <u>Γ - demonstraţie</u> .

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de <u>teorema deducţiei</u>:

<u>PROPOZITIA 4</u>. Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, atunci $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$

<u>Demonstraţie</u>: Prin inducţie asupra lui m vom arăta că pentru orice $m \in N$ diferit de o, dacă $\chi_1,\dots,\chi_m$ este o $\Gamma \cup \{\varphi\}$-demonstraţie a lui ψ , atunci $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$.

Presupunem afirmaţie adevărată pentru orice $n < m$ şi vom considera cazul cînd $\chi_1,\dots,\chi_m$ este o $\Gamma \cup \{\varphi\}$- demonstraţie a lui ψ.

Trebuie să luăm în considerare următoarele patru cazuri:

<u>Cazul 1</u>: ψ este o axiomă.

Cum $\vdash \psi$ şi $\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ conform A_1, atunci aplicînd modus ponens rezultă $\vdash (\varphi \to \psi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$.

<u>Cazul 2</u>: $\psi \in \Gamma$.

Conform A_1, putem scrie $\Gamma \vdash [\psi \to (\varphi \to \psi)]$. Cum $\psi \in \Gamma$, avem $\Gamma \vdash \psi$, deci aplicînd m.p. rezultă $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$.

<u>Cazul 3</u>: $\psi = \varphi$

Conform propoziţiei precedente, $\vdash (\varphi \to \varphi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi)$

<u>Cazul 4</u>: Există $j, k < m$, astfel încît $\chi_k = \chi_j \to \psi$. Prin ipoteza inducţiei rezultă $\Gamma \vdash (\varphi \to \chi_k)$ şi $\Gamma \vdash (\varphi \to \chi_j)$, deci există următoarele Γ - demonstraţii:

$\alpha_1,\dots,\alpha_r, \varphi \to \chi_k$

$\beta_1,\dots,\beta_s, \varphi \to \chi_j$

Atunci avem următoarea Γ - demonstraţie a lui $\varphi \to \psi$:

α_1

$\vdots$

α_r

$\varphi \to \chi_k$

β_1

$\vdots$

β_s

$\varphi \to \chi_j$

$[\varphi \to (\chi_j \to \psi)] \to [(\varphi \to \chi\ ) \to (\varphi \to \psi)]$ A_2

$(\varphi \to \chi_j) \to (\varphi \to \psi)$ m.p. $\chi_k = \chi_j \to \psi$

$\varphi \to \psi$ m.p.

<u>OBSERVATIE</u>. Teorema de deducţie este formalizarea unui procedeu folosit adeseori în raţionamentele matematice. Atunci cînd vrem să stabilim $\varphi \Rightarrow \psi$ în anumite condiţii matematice Γ , întîi adăugăm pe φ de la condiţiile Γ şi apoi deducem pe ψ .

<u>PROPOZITIA 5</u>. $\vdash (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$

<u>Demonstraţie</u>: Vom aplica succesiv m.p. şi apoi teorema deducţiei:

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$$
$$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$$
$$\vdash (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$$

<u>PROPOZITIA 6.</u> $\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\psi \to (\varphi \to \chi)]$

<u>Demonstrație</u>: Aplicăm m.p. și teorema deducției:

$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to \chi$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \chi$$
$$\{\psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to \chi$$
$$\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$$
$$\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\psi \to (\varphi \to \chi)]$$

<u>PROPOZITIA 7.</u> $\vdash \varphi \to (\neg \varphi \to \psi)$

<u>Demonstrație</u>

$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \neg \varphi \to (\neg \psi \to \neg \varphi) \qquad \text{A.1}$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \neg \varphi$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \neg \psi \to \neg \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash (\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi) \qquad \text{A.3}$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \varphi \to \psi \qquad \text{m.p.}$$

$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \varphi$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \psi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\varphi\} \vdash \neg \varphi \to \psi \qquad \text{teorema deducției}$$
$$\vdash \varphi \to (\neg \varphi \to \psi) \qquad \text{teorema deducției}$$

<u>PROPOZITIA 8.</u> $\vdash \neg \varphi \to (\varphi \to \psi)$

<u>Demonstrație</u>: Aplicînd Propoziția 6, avem:

$$\vdash [\varphi \to (\neg \varphi \to \psi)] \to [\neg \varphi \to (\varphi \to \psi)]$$

Aplicînd Propoziția 7 și m.p., rezultă

$$\vdash \neg \varphi \to (\varphi \to \psi)$$

<u>Exercițiu</u>: Să se demonstreze Propoziția 8 în maniera Propoziției 7, folosind teorema deducției.

<u>PROPOZITIA 9.</u> $\vdash \neg\neg \varphi \to \varphi$

<u>Demonstrație</u>:

$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \to (\neg\neg\neg\neg \varphi \to \neg\neg \varphi) \qquad \text{A 1}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg\neg\neg \varphi \to \neg\neg \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\neg \varphi \to \neg\neg \varphi) \to (\neg \varphi \to \neg\neg\neg \varphi) \qquad \text{A 3}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg \varphi \to \neg\neg\neg \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash (\neg \varphi \to \neg\neg\neg \varphi) \to (\neg\neg \varphi \to \varphi) \qquad \text{A 3}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \to \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\vdash \neg\neg \varphi \to \varphi \qquad \text{teorema deducției}$$

<u>PROPOZITIA 10.</u> $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg \psi \to \neg \varphi)$

<u>Demonstrație</u>:

$$\{\varphi \to \psi, \neg \psi, \neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \to \varphi \qquad \text{(Propoziția 9)}$$
$$\{\varphi \to \psi, \neg \psi, \neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \; .$$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$ ~~m.p.~~

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$ (Propoziţia 8)

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi \to \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ A 3

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$

$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

PROPOZIŢIA 11. $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

Demonstraţie

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ (Propoziţia 9)

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi$

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$

$\{\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$ A.3

$\{\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ m.p.

$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

PROPOZIŢIA 12. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Demonstraţie:

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Propoziţia 9)

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\varphi$

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$ Propoziţia 7

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash [\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)] \to [(\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi]$ A 3

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi)$ (Propoziţia 2)

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

PROPOZIŢIA 13. $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$

Demonstraţie:

$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ teorema deducţiei

$\{\varphi\} \vdash [(\varphi \to \psi) \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)]$ Propoziţia 10.

$\{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$ m.p.

$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ teorema deducţiei

§ 3. INTERPRETĂRI

Acest paragraf este contrapartea semantică a celor prezentate în paragrafele precedente ale acestui capitol.

Se numeşte interpretare a sistemului formal al calculului propoziţional orice funcţie

$$f: V \to L_2,$$

unde L_2 este algebră Boole $\{o,1\}$.

PROPOZITIA 1. Pentru orice interpretare $f: V \longrightarrow L_2$ a lui L, există o funcţie unică

$$\tilde{f}: E \longrightarrow L_2$$

care are proprietăţile următoare:

(a) $\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$.

(b) $\tilde{f}(\neg\varphi) = 1$ dacă şi numai dacă $\tilde{f}(\varphi) = o$.

(c) $\tilde{f}(\varphi \to \psi) = o$ dacă şi numai dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$ şi $\tilde{f}(\psi) = o$.

Demonstraţie: Unicitatea. Presupunem că există două funcţii $g,h: E \longrightarrow L_2$ care verifică proprietăţile (a) - (c). Vom arăta că $g(\varphi) = h(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$. Distingem trei cazuri, relativ la modul de formare al enunţurilor:

φ este enunţ elementar. Conform (a), avem:

$$g(\varphi) = f(\varphi) = h(\varphi).$$

φ este de forma $\neg\psi$ şi presupunem $g(\psi) = h(\psi)$. Conform(b), avem:

$$\begin{aligned} g(\varphi) = 1 &\Longrightarrow g(\psi) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\psi) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

Este evident că de aici rezultă: $g(\varphi) = o \Longleftrightarrow h(\varphi) = o$. Aşadar

$$g(\varphi) = h(\varphi)$$

φ este forma $\psi_1 \longrightarrow \psi_2$ şi presupunem că $g(\psi_1) = h(\psi_1)$ şi $g(\psi_2) = h(\psi_2)$.

1).De acum înainte, semnul $\Longleftrightarrow$ va fi prescurtarea lui „dacă şi numai dacă" din limba română. Atragem atenţia a nu fi confundat cu simbolul $\longrightarrow$ care aparţine lui L, pe cînd $\Longleftrightarrow$ este un semn în afara lui L.

Conform (c), rezultă

$$\begin{aligned} g(\varphi) = o &\Longleftrightarrow g(\psi_1 \longrightarrow \psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow g(\psi_1) = 1 \text{ şi } g(\psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\psi_1) = 1 \text{ şi } h(\psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\psi_1 \longrightarrow \psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\varphi) = o \end{aligned}$$

De aici rezultă: $g(\varphi) = 1 \Longleftrightarrow h(\varphi) = 1$, deci $g(\varphi) = h(\varphi)$.

OBSERVATIE: Unicitatea a fost demonstrată prin inducţie, urmărindu-se modul de formare a enunţurilor lui L.

Existenţa. Definim pe $\tilde{f}$ prin inducţie:

$\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$.

Presupunînd că $\tilde{f}(\varphi)$ este definit, vom pune

$$\tilde{f}(\neg\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = o \\ o, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = 1. \end{cases}$$

Presupunem că $\tilde{f}(\varphi)$, $\tilde{f}(\psi)$ sînt definite. Vom pune atunci

$$\tilde{f}(\varphi \longrightarrow \psi) = \begin{cases} o, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = 1 \text{ şi } \tilde{f}(\psi) = o \\ 1, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

In acest fel, funcţia $\tilde{f}$ a fost definită pe toată mulţimea E. Este evident ca f verifică proprietăţile (a) - (c), definiţia sa fiind sugerată chiar de ele. Cu aceasta, demonstraţia este terminată.

OBSERVATIE: Definiţia lui $\tilde{f}$ poate fi dată şi astfel:

$\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$

$\tilde{f}(\neg\varphi) = \neg\tilde{f}(\varphi) \in L_2$

$\tilde{f}(\varphi \longrightarrow \psi) = \tilde{f}(\varphi) \longrightarrow \tilde{f}(\psi) \in L_2$.

Atragem atenţia că avem aici aceeaşi notaţie pentru două lucruri distincte. In timp ce $\neg\varphi$, $\varphi \longrightarrow \psi$ sînt enunţuri ale lui L, semnele $\neg$, $\rightarrow$ din dreapta semnifică negația și implicația din algebra Boole L_2.

Deoarece vom vedea că există o anumită corespondență între algebrele Boole și sistemul formal al calculului propozițional, nu introducem notații separate.

Pentru orice enunț φ, vom spune că $\tilde{f}(\varphi)$ este <u>interpretarea lui φ relativ la</u> f.

Spunem că enunțul φ este <u>adevărat în interpretarea f:</u> $V \rightarrow L_2$, dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$. Enunțul φ este <u>fals în interpretarea f</u> dacă $\tilde{f}(\varphi) = 0$.

Un enunț φ este <u>universal adevărat</u> sau o <u>tautologie</u> dacă el este adevărat în orice interpretare. Vom nota aceasta prin $\models \varphi$.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Interpretarea unui enunț este valoarea o sau 1 obținută atunci cînd tuturor enunțurilor elementare ce intră în componența lui φ le atribuim anumite valori din $\{0,1\}$. Un enunț universal adevărat va avea valoarea 1 pentru orice valori luate de enunțurile elementare ce intră în componența sa.

Prin <u>proprietate semantică</u> a lui L vom înțelege orice proprietate legată de interpretările lui L.

Observăm că pînă acum am definit două tipuri de „adevăruri" relativ la sistemul formal al calculului propozițional: <u>teoremele</u>, care sînt <u>„adevărurile sintactice"</u> ale lui L și <u>tautologiile</u>, care sînt <u>„adevărurile semantice"</u> ale lui L. In mod natural se pune problema comparării celor două tipuri de „adevăruri". Teorema de completitudine, care este rezultatul fundamental al acestui paragraf, va arăta coincidența lor.

Vom spune că o interpretare f: $V \rightarrow L_2$ este un <u>model</u> al unei mulțimi de enunțuri Γ, dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$.

Notăm prin $\Gamma \models \varphi$ proprietatea că $\tilde{f}(\varphi) = 1$, pentru orice model f al lui Γ. In cazul cînd $\Gamma = \emptyset$, prin $\emptyset \models \varphi$ vom înțelege că $\models \varphi$.

<u>PROPOZIȚIA 2.</u> Dacă $\vdash \varphi$, atunci avem $\models \varphi$.

<u>Demonstrație</u>. Presupunem că φ este o teoremă a lui L. Va trebui să arătăm că pentru orice interpretare h: $V \rightarrow L_2$, avem $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Vom considera întîi cazul axiomelor.

A 1: φ este de forma $\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$

Atunci avem

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi) &= \tilde{h}(\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \\ &= \tilde{h}(\psi) \rightarrow [\tilde{h}(\chi) \rightarrow \tilde{h}(\psi)] \\ &= \neg\tilde{h}(\psi) \vee \neg\tilde{h}(\chi) \vee \tilde{h}(\psi) = 1.\end{aligned}$$

<u>A 2:</u> φ este de forma $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$

Cum $\tilde{h}(\varphi) = [\tilde{h}(\alpha) \rightarrow [\tilde{h}(\beta) \rightarrow \tilde{h}(\gamma)]] \rightarrow [[\tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\beta)] \rightarrow [\tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\gamma)]]$, este suficient să arătăm că pentru orice x, y, $z \in L_2$, avem

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = 1$$

Intr-adevăr, avem:

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee$$
$$\vee [\neg(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee \neg(\neg x \vee y) \vee \neg x \vee z$$

Dar

$$\begin{aligned}\neg(\neg x \vee y) \vee \neg x \vee z &= (x \wedge \neg y) \vee \neg x \vee z = \\ &= (x \vee \neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg x \vee z) \\ &= \neg y \vee \neg x \vee z,\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee (\neg x \vee \neg y \vee z) = 1$$

<u>A 3:</u> φ este forma $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

La fel ca mai sus, este suficient să arătăm că

$$(\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1,$$

pentru orice x, $y \in L_2$. Această egalitate se obține astfel:

$$(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = \neg(\neg x \to \neg y) \vee (y \to x)$$
$$= \neg(x \vee \neg y) \vee \neg y \vee x$$
$$= (\neg x \wedge y) \vee \neg y \vee x$$
$$= (\neg x \vee \neg y \vee x) \wedge (y \vee \neg y \vee x)$$
$$= 1 \wedge 1 = 1.$$

Presupunem acum că φ a fost obţinută prin modus ponens din $\vdash \psi$, $\vdash \psi \to \varphi$ şi că $\tilde{h}(\psi) = 1$, $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$. Va trebui să arătăm că $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Din relaţiile

$$\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \neg\tilde{h}(\psi) \vee \tilde{h}(\varphi) = 1$$
$$\tilde{h}(\psi) = 1$$

rezultă $\neg 1 \vee \tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

<u>OBSERVAŢIE</u>: Teorema de mai sus s-a demonstrat prin inducţie în raport cu lungimea demonstraţiilor formale ale teoremelor lui L.

<u>Corolar</u>. Nu există nici un enunţ φ al lui L, astfel încît $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$.

<u>Demonstraţie</u>: Presupunem că există $\varphi \in E$, astfel încît $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$. Atunci, avem

$$\tilde{h}(\varphi) = 1 \text{ şi } \tilde{h}(\neg\varphi) = 1,$$

pentru orice interpretare $h: V \to L_2$.

Contradicţia este evidentă: din $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$, rezultă $\neg\tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 0$.

<u>OBSERVAŢIE</u>: Acest corolar exprimă faptul că sistemul formal al calculului propoziţional este <u>necontradictoriu</u>.

<u>PROPOZIŢIA 3</u>. Fie $\Gamma \subset E$ şi $\varphi \in E$. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.

Demonstraţia acestei propoziţii este cu totul analoagă cu aceea a propoziţiei precedente.

Fie Γ o mulţime de enunţuri. Vom spune că Γ este <u>consistentă</u> dacă există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \nvdash \varphi$ (φ nu se deduce din ipotezele Γ). Γ este <u>inconsistentă</u> dacă nu este consistentă.

<u>PROPOZIŢIA 4.</u> Pentru orice $\Gamma \subset E$, următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$.

(iii) Există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

<u>Demonstraţie</u>. Implicaţiile (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sînt evidente:

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>. Presupunem că există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$. Fie ψ un enunţ oarecare. Conform A 1, avem

$$\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi) \to [\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)]$$

Dar $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi)$, deci aplicînd modus ponens rezultă :

$$\Gamma \vdash \neg\psi \to (\varphi \to \varphi)$$

Conform Propoziţiei 1o, § 2,

$$\Gamma \vdash [\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)] \to [\neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi]$$

de unde rezultă, prin modus ponens :

$$\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi$$

Aplicînd ipoteza $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ şi modus ponens, rezultă $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$.

Conform Propoziţiei 11, § 2, avem $\Gamma \vdash \neg\neg\psi \to \psi$, deci $\Gamma \vdash \psi$. Am arătat că $\Gamma \vdash \psi$, pentru orice $\psi \in E$.

<u>PROPOZIŢIA 5</u>. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă $\Longleftrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inc. $\Longleftrightarrow \Gamma \vdash \neg\neg\varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$

<u>Demonstraţie</u>: $\Longrightarrow$: Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, atunci $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, deci prin teorema deducţiei avem $\Gamma \vdash \varphi \to \neg\varphi$. Aplicînd Propoziţia 12, § 2 şi modus ponens, rezultă $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

$\Longleftarrow$: Cum $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ şi $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, aplicînd de două ori modus ponens relaţiei din Propoziţia 7, § 2:

$$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$$

rezultă $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi$, pentru orice $\psi\in E$.

PROPOZITIA 6: $\emptyset$ este consistentă.

Demonstraţie: Presupunînd că $\emptyset$ este inconsistentă, ar rezulta $\emptyset\vdash\neg(\varphi\to\varphi)$, deci $\vdash\neg(\varphi\to\varphi)$, pentru orice $\varphi\in E$. Dar este ştiut că $\vdash(\varphi\to\varphi)$, conform Propoziţiei 2, § 2. Conform corolarului Propoziţiei 2, contradicţia este evidentă.

O mulţime consistentă $\Gamma\subset E$ este maximal consistenţă dacă pentru orice $\Sigma\subset E$ consistentă avem

$$\Gamma\subset\Sigma\Longrightarrow\Gamma=\Sigma.$$

PROPOZITIA 7. Pentru orice mulţime consistentă $\Gamma\subset E$, există o mulţime maximal consistentă $\Delta\subset E$ astfel încît $\Gamma\subset\Delta$.

Demonstraţie: Fie

$$\mathcal{A}=\{\Sigma\subset E\mid\Sigma \text{ consistentă}, \Gamma\subset\Sigma\}.$$

Vom arăta că $(\mathcal{A},\subset)$ este inductiv ordonată.

Fie $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ o submulţime a lui $\mathcal{A}$ total ordonată: pentru orice $i, j\in I$, avem $\Sigma_i\subset\Sigma_j$ sau $\Sigma_j\subset\Sigma_i$. Vom arăta că $\Sigma_0 = \bigcup_{i\in I}\Sigma_i$ este un majorant al familiei total ordonate $(\Sigma_i)_{i\in I}$. Observăm întîi că $\Gamma\subset\Sigma_0$.

Presupunem prin absurd că Σ_0 ar fi inconsistentă, deci există $\varphi\in E$, astfel încît $\Sigma_0\vdash\neg(\varphi\to\varphi)$. Aplicînd Propoziţia 1, (ii), § 1, există o submulţime finită $\{\psi_1,\dots,\psi_m\}$ a lui Σ_0, astfel încît

$$\{\psi_1,\dots,\psi_m\}\vdash\neg(\varphi\to\varphi).$$

Vom presupune că $\psi_1\in\Sigma_{i_1},\dots,\psi_m\in\Sigma_{i_m}$, cu $i_1,\dots,i_m\in I$. Cum $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ este total ordonată, există $i_k\in\{i_1,\dots,i_m\}$, astfel încît

$$\Sigma_{i_j}\subset\Sigma_{i_k}, \text{ pentru orice } j=1,\dots,m.$$

Atunci $\{\psi_1,\dots,\psi_m\}\subset\Sigma_{i_k}$, deci conform Propoziţiei 1, (i), § 1, rezultă

$$\Sigma_{i_k}\vdash\neg(\varphi\to\varphi).$$

Deci, conform Propoziţiei 4, Σ_{i_k} este inconsistentă, ceea ce contrazice ipoteza că $\Sigma_{i_k}\in\mathcal{A}$. Rezultă că Σ_0 este consistentă, deci $\Sigma_0\in\mathcal{A}$.

Este evident că

$$\Sigma_i\subset\Sigma_0, \text{ pentru orice } i\in I,$$

deci Σ_0 este un majorant al lui $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$, ceea ce arată că $(\mathcal{A},\subset)$ este inductiv ordonată.

Aplicînd axioma lui Zorn rezultă existenţa unui element maximal al lui $(\mathcal{A},\subset)$, deci a unei mulţimi maximal consistente Δ astfel încît $\Gamma\subset\Delta$.

PROPOZITIA 8. (teorema de completitudine). Pentru orice enunţ $\varphi\in E$, avem

$$\vdash\varphi\Longleftrightarrow\models\varphi.$$

Demonstraţie: Implicaţia $\Longrightarrow$ este Propoziţia 2.

Presupunem acum că $\models\varphi$. Dacă $\nvdash\varphi$, atunci avem $\nvdash\neg\neg\varphi$. Intr-adevăr, dacă $\vdash\neg\neg\varphi$, atunci din $\vdash\neg\neg\varphi\to\varphi$ prin aplicarea lui modus ponens ar rezulta $\vdash\varphi$.

Relaţia $\nvdash\neg\neg\varphi$ este tot una cu $\emptyset\nvdash\neg\neg\varphi$. Aplicînd Propoziţia 5, rezultă că $\emptyset\cup\{\neg\varphi\}=\{\neg\varphi\}$ este o mulţime consistentă.

Atunci, conform Propoziţiei 7, avem o mulţime maximal consistentă Δ, astfel încît $\{\neg\varphi\}\subset\Delta$, deci $\neg\varphi\in\Delta$.

Definim acum o interpretare $h\colon V\to L_2$ prin

$$h(v) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v \in \Delta \\ o, & \text{dacă } \neg v \in \Delta \end{cases}$$

pentru orice $v \in V$. Vom arăta că pentru orice $\psi \in E$, avem:

(1) $$\tilde{h}(\psi) = 1 \iff \psi \in \Delta.$$

Pentru aceasta, este necesar să stabilim următoarele proprietăţi ale lui Δ:

(2) $\Delta \vdash \psi \implies \psi \in \Delta$, pentru orice $\psi \in E$.

(3) Pentru orice $\psi \in E$, avem $\psi \in \Delta$ sau $\neg\psi \in \Delta$.

(4) Pentru orice $\psi, \chi \in E$, avem:

$$(\psi \to \chi) \in \Delta \iff \neg\psi \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta$$

Pentru a demonstra (2), propunem prin absurd că $\Delta \vdash \psi$ şi $\psi \notin \Delta$, deci

$$\Delta \subsetneqq \Delta \cup \{\psi\}.$$

Avînd în vedere că Δ este o mulţime maximal consistentă, rezultă că $\Delta \cup \{\psi\}$ este inconsistentă. Conform Propoziţiei 5, obţinem $\Delta \vdash \neg\psi$.

Din Propoziţia 7, § 2, rezultă că pentru orice $\chi \in E$, avem

$$\Delta \vdash \psi \to (\neg\psi \to \chi)$$

Ţinînd seama de $\Delta \vdash \psi$, $\Delta \vdash \neg\psi$ şi aplicînd de două ori modus ponens rezultă $\Delta \vdash \chi$, pentru orice $\chi \in E$, deci Δ ar fi inconsistentă. Contradicţia este evidentă, deci $\psi \in \Delta$. Cu aceasta, (2) a fost demonstrată.

Fie acum $\psi \in E$, astfel încît $\psi \notin \Delta$, deci $\Delta \cup \{\psi\}$ este inconsistentă, din cauza faptului că Δ este maximal consistentă. Conform Propoziţiei 5, avem $\Delta \vdash \neg\psi$, deci din (2) rezultă $\neg\psi \in \Delta$. Am stabilit şi proprietatea (3).

Să probăm implicaţia $\Rightarrow$ din (4). Fie $(\psi \to \chi) \in \Delta$ şi presupunem prin absurd că $\neg\psi \notin \Delta$ şi $\chi \notin \Delta$. Conform (3), de aici ob-

ţinem că $\psi \in \Delta$ şi $\neg\chi \in \Delta$. Propoziţia 13, § 2 ne spune că

$$\Delta \vdash \psi \to [\neg\chi \to \neg(\psi \to \chi)]$$

Din $\psi \in \Delta$ şi $\neg\chi \in \Delta$ deducem $\Delta \vdash \psi$ şi $\Delta \vdash \neg\chi$, de unde deducem aplicînd de două ori modus ponens relaţiei precedente că $\Delta \vdash \neg(\psi \to \chi)$. Din această relaţie şi din $(\psi \to \chi) \in \Delta$ (deci $\Delta \vdash \psi \to \chi$), la fel ca în demonstraţia proprietăţii (2) se deduce că Δ este inconsistent, ceea ce este o contradicţie. Rezultă $\neg\psi \in \Delta$ sau $\chi \in \Delta$.

Pentru implicaţia $\Leftarrow$, presupunem $\neg\psi \in \Delta$ deci $\Delta \vdash \neg\psi$. Conform Propoziţiei 8, § 2 avem

$$\Delta \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$$

deci aplicînd modus ponens rezultă $\Delta \vdash (\psi \to \chi)$, ceea ce ne dă $(\psi \to \chi) \in \Delta$ (vezi (2)).

Dacă $\chi \in \Delta$, atunci $\Delta \vdash \chi$. Aplicînd modus ponens pentru

$$\Delta \vdash \chi \to (\psi \to \chi) \qquad \text{A 1}$$

rezultă $\Delta \vdash (\psi \to \chi)$, deci $(\psi \to \chi) \in \Delta$, conform (2).

Cu aceasta şi (4) a fost demonstrată. Vom stabili acum relaţia (1) prin inducţie:

(a) Dacă ψ este o variabilă propoziţională $v \in V$, atunci avem

$$\tilde{h}(v) = h(v) = 1 \iff v \in \Delta.$$

prin definiţia lui h.

(b) Dacă $\psi = \neg\psi'$ şi pentru ψ' presupunem (1) adevărată, atunci avem:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\psi) = 1 &\iff \tilde{h}(\neg\psi') = 1 \\ &\iff \tilde{h}(\psi') = o && \text{(definiţia lui } \tilde{h}) \\ &\iff \psi' \notin \Delta && \text{(ipoteza inducţiei)} \\ &\iff \neg\psi' \in \Delta && (3) \\ &\iff \psi \in \Delta \end{aligned}$$

(c) Dacă $\psi = \psi' \to \chi$ şi pentru ψ', χ presupunem (1) adevărată, atunci avem:

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}(\psi) = 1 &\iff \tilde{h}(\psi' \to \chi) = 1 \\
&\iff \tilde{h}(\psi') = o \text{ sau } \tilde{h}(\chi) = 1 && \text{(definiţia lui } \tilde{h}) \\
&\iff \tilde{h}(\psi') \neq 1 \text{ sau } \tilde{h}(\chi) = 1 \\
&\iff \psi' \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta && \text{(ipoteza inducţiei)} \\
&\iff \neg\psi' \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta && (3) \\
&\iff (\psi' \to \chi) \in \Delta && (4) \\
&\iff \psi \in \Delta
\end{aligned}
$$

Deci interpretarea h verifică (1).

La începutul demonstraţiei am stabilit că $\neg\varphi \in \Delta$, deci conform (1) rezultă $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) = o$.

Dar $\models \varphi$ înseamnă că $\tilde{h}(\varphi)$, deci am obţinut o contradicţie, ceea ce face să avem $\vdash \varphi$.

In acest fel, teorema de completitudine a fost demonstrată complet.

<u>OBSERVAŢII</u>: (i) In demonstraţia de mai sus s-a folosit aproape implicit următoarea proprietate: pentru orice mulţime consistentă Γ şi pentru orice $\varphi \in E$, nu putem avea simultan $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Intr-adevăr, presupunînd $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \neg\varphi$, atunci pentru orice $\psi \in E$, din

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi) \quad \text{(Propoziţia 7, § 2)}$$

se poate deduce aplicînd de două ori modus ponens că $\Gamma \vdash \psi$, ceea ce contrazice faptul că Γ este consistent.

Această observaţie mai poate fi dedusă şi din Propoziţia 3.

(ii) Semnificaţia acestei teoreme este cu totul deosebită; ea identifică teoremele formale ale sistemului formal al calculului propoziţional cu enunţurile universal adevărate. De asemenea, ea ne dă un procedeu comod de verificare a faptului că un enunţ este o teoremă formală.

(iii) Teorema de completitudine a fost stabilită (pentru cazul mai general al calculului predicatelor) de K.Gödel, în 1930. Ulterior i s-au dat numeroase alte demonstraţii şi a fost extinsă şi la alte sisteme formale. Printre alte demonstraţii, menţionăm una algebrică, cu ajutorul algebrelor Boole.

<u>PROPOZIŢIA 9</u>. Orice mulţime consistentă $\Gamma \subset E$ are un model.

<u>Demonstraţie</u>. Vom schiţa numai această demonstraţie, fiind foarte asemănătoare cu cea a propoziţiei precedente.

Conform Propoziţiei 7, există o mulţime maximal consistentă Δ astfel încît $\Gamma \subset \Delta$. La fel ca în demonstraţia propoziţiei precedente, se arată că

(1) $\Delta \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Delta$, pentru orice $\varphi \in E$

(2) Dacă $\varphi \in E$, atunci $\varphi \in \Delta$ sau $\neg\varphi \in \Delta$

(3) $(\varphi \to \psi) \in \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$ sau $\psi \in \Delta$.

Se defineşte interpretarea $h: V \to L_2$ prin

$$h(v) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v \in \Delta \\ o, & \text{dacă } v \notin \Delta \end{cases}, \text{ pentru orice } v \in V$$

şi se arată, cu ajutorul proprietăţilor (1) - (3) că pentru orice $\varphi \in E$ avem:

(4) $\tilde{h}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Delta$

Cum $\Gamma \subset \Delta$, este evident conform (4) că

$\tilde{h}(\varphi) = 1$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$,

deci h este un model al lui Γ.

<u>Corolar</u>. Pentru orice $\varphi \in E$ şi pentru orice $\Gamma \subset E$, avem

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

<u>Demonstrație</u>: $\Rightarrow$: Propoziția 3.

$\Leftarrow$: Presupunînd $\Gamma \nvdash \varphi$, la fel ca în demonstrația Propoziției 8, avem $\Gamma \nvdash \neg\neg\varphi$, deci $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistent. Va exista deci un model $f: V \to L_2$ al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. f este un model al lui Γ, dar nu al lui φ, deci $\Gamma \nvDash \varphi$

<u>OBSERVAȚIE</u>. Deducția din ipoteze „$\Gamma \vdash \varphi$" se mai numește <u>deducție sintactică</u>, iar „$\Gamma \vDash \varphi$" <u>deducție semantică</u>. Corolarul de mai sus identifică cele două feluri de „deducție", motiv pentru care se numește „teorema de completitudine extinsă".

§ 4. <u>CONECTORII $\vee, \wedge, \leftrightarrow$.</u>

Axiomele sistemului formal L au fost formulate folosind numai conectorii $\neg$, $\to$. Ceilalți conectori $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ au fost introduși prin:

$$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \to \psi$$

$$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

<u>PROPOZIȚIA 1</u>: Pentru orice interpretare $h: V \to L_2$ a lui L avem:

$$\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$$

$$\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$$

$$\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$$

<u>Demonstrație</u>. Operațiile din dreapta au loc în algebra Boole L_2. Vom avea deci:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi \vee \psi) &= \tilde{h}(\neg\varphi \to \psi)\\ &= \neg\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)\\ &= \neg\neg\tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)\\ &= \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) &= \tilde{h}(\neg(\varphi \to \neg\psi))\\ &= \neg(\tilde{h}(\varphi) \to \neg\tilde{h}(\psi))\\ &= \neg(\neg\tilde{h}(\varphi) \vee \neg\tilde{h}(\psi))\\ &= \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)\\ \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \tilde{h}((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))\\ &= (\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi))\\ &= \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi).\end{aligned}$$

<u>Definiția 1</u>. Pentru orice enunț φ definim <u>dualul lui φ</u>, notat φ^d, prin:

(i) $v^d = v$, pentru orice $v \in V$.

(ii) $(\neg\psi)^d = \neg\psi^d$, dacă $\varphi = \neg\psi$.

(iii) $(\psi \to \chi)^d = \neg\psi^d \wedge \chi^d$, dacă $\varphi = \psi \to \chi$.

Următoarea propoziție ne va arăta că $\wedge$ și $\vee$ sînt noțiuni duale:

<u>PROPOZIȚIA 2</u>.

(a) $\vdash (\varphi \wedge \psi)^d \leftrightarrow \varphi^d \vee \psi^d$

(b) $\vdash (\varphi \vee \psi)^d \leftrightarrow \varphi^d \wedge \psi^d$

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{dd}$

(d) dacă f, g sînt interpretări și dacă $\tilde{f}(v) = \tilde{g}(\neg v)$ pentru orice $v \in V$, atunci $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{g}(\neg\varphi^d)$, pentru orice enunț φ.

(e) $\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \{\neg\psi^d \mid \psi \in \Gamma\} \vdash \neg\varphi^d$

(f) $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \neg\varphi^d$

(g) $\vdash \varphi \to \psi \Longleftrightarrow \vdash \psi^d \to \varphi^d$

(h) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$.

<u>Demonstrație</u>: (a)

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \psi)^d &= (\neg(\varphi \to \neg\psi))^d = \neg(\varphi \to \neg\psi)^d\\ &= \neg(\neg\varphi^d \wedge (\neg\psi^d)) = \neg(\neg\varphi^d \wedge \neg\psi^d)\end{aligned}$$

Vom arăta că $\vdash[\neg(\neg\varphi^d \wedge \neg\psi^d) \to (\varphi^d \vee \psi^d)]$ folosind teorema de completitudine: pentru orice interpretare $h: V \to L_2$, avem:

$$\tilde{h}[\neg(\neg\varphi^d \wedge \neg\psi^d) \to (\varphi^d \vee \psi^d)] =$$
$$= \neg[\neg\tilde{h}(\varphi^d) \wedge \neg\tilde{h}(\psi^d)] \to [\tilde{h}(\varphi^d) \vee \tilde{h}(\psi^d)] =$$
$$= [\tilde{h}(\varphi^d) \vee \tilde{h}(\psi^d)] \to [\tilde{h}(\varphi^d) \vee \tilde{h}(\psi^d)] = 1,$$

deoarece într-o algebră Boole $(x \to x) = 1$.

(b) Analog cu (a).

(c) Prin inducţie:

- Pentru $\varphi = v \in V$, avem $\varphi^{dd} = v^{dd} = v = \varphi$, deci $\vdash \varphi \to \varphi$.
- Pentru $\varphi = \neg\psi$, presupunem $\vdash \psi \to \psi^{dd}$ şi arătăm pentru $\neg\psi$:

Prin definiţie avem $(\neg\psi)^{dd} = \neg\psi^{dd}$ şi
$(\psi \to \psi^{dd}) \to (\neg\psi \to \neg\neg\psi^{dd})$
este o tautologie, după cum se poate arăta cu teorema de completitudine.

Aplicînd modus ponens, rezultă
$$\vdash (\neg\psi \to (\neg\psi)^{dd}).$$

- Pentru $\varphi = \psi \to \chi$, presupunem $\vdash \psi \to \psi^{dd}$ şi $\vdash \chi \to \chi^{dd}$ şi arătăm că
$$\vdash [(\psi \to \chi) \to (\psi \to \chi)^{dd}]$$

Avem egalităţile:

$$(\psi \to \chi)^{dd} = (\neg\psi^d \wedge \chi^d)^d$$
$$= (\neg(\neg\psi^d \to \neg\chi^d))^d$$
$$= \neg(\neg\psi^d \to \neg\chi^d)^d$$
$$= \neg((\neg\psi^d)^d \wedge (\neg\chi^d)^d)$$
$$= \neg(\neg\neg\psi^{dd} \wedge \neg\chi^{dd})$$
$$= \neg\neg(\neg\neg\psi^{dd} \to \neg\neg\chi^{dd})$$

Cu ajutorul teoremei de completitudine se arată atunci că
$$\vdash (\psi \to \psi^{dd}) \to \left((\chi \to \chi^{dd}) \to [(\psi \to \chi) \to (\psi \to \chi)^{dd}]\right)$$

Aplicînd de două ori modus ponens rezultă
$$\vdash [(\psi \to \chi) \to (\psi \to \chi)^{dd}]$$

(d) Prin inducţie:

- Pentru $\varphi = v \in V$, este evident, conform ipotezei.
- Presupunînd $\varphi = \neg\psi$ şi $\tilde{f}(\psi) = \tilde{g}(\neg\psi^d)$, atunci rezultă:

$$\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\neg\psi) = \neg\tilde{f}(\psi) = \neg\tilde{g}(\neg\psi^d) =$$
$$= \tilde{g}(\neg\neg\psi^d) = \tilde{g}(\neg(\neg\psi)^d) = \tilde{g}(\neg\varphi^d).$$

- Presupunînd $\varphi = \psi \to \chi$ şi $\tilde{f}(\psi) = \tilde{g}(\neg\psi^d)$, $\tilde{f}(\chi) = \tilde{g}(\neg\chi^d)$, atunci avem:

$$\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi \to \chi)$$
$$= \tilde{f}(\psi) \to \tilde{f}(\chi)$$
$$= \tilde{g}(\neg\psi^d) \to \tilde{g}(\neg\chi^d)$$
$$= \neg\tilde{g}(\psi^d) \to \neg\tilde{g}(\chi^d)$$
$$= \neg(\neg\tilde{g}(\psi^d) \wedge \tilde{g}(\chi^d))$$
$$= \neg\tilde{g}(\neg\psi^d \wedge \chi^d)$$
$$= \neg\tilde{g}((\psi \to \chi)^d) = \tilde{g}(\neg\varphi^d).$$

(e) Se demonstrează folosind (d) şi teorema de completitudine extinsă.

(f) Rezultă din (e), luînd $\Gamma = \emptyset$.

(g) Ţinînd seama de $(\varphi \to \psi)^d = \neg\varphi^d \wedge \psi^d$, rezultă
$$\vdash \neg(\varphi \to \psi)^d \to (\psi^d \to \varphi^d).$$

Aplicînd (f), rezultă
$$\vdash \varphi \to \psi \Longleftrightarrow \psi^d \to \varphi^d.$$

(h) Rezultă din (g).

Definiţia 2: Dacă $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in E$, vom scrie

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = (\dots((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_n)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = (\dots((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_n)$$

PROPOZIŢIA 3: Pentru orice interpretare $h: V \longrightarrow L_2$, avem:

$$\tilde{h}\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = 1 \Longleftrightarrow \text{există } i \in \{1,\dots,n\}, \text{ astfel încît } \tilde{h}(\varphi_i) = 1.$$

$$\tilde{h}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = 1 \Longleftrightarrow \tilde{h}(\varphi_i) = 1, \text{ pentru orice } i = 1,\dots,n.$$

Demonstraţia acestei propoziţii este un simplu exerciţiu.

PROPOZIŢIA 4: Fie $\Gamma, \Delta \subset E$ şi $\Delta \neq \emptyset$. Dacă $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$, atunci există $m \in N$ şi $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in \Delta$, astfel încît

$$\Gamma \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \rightarrow \psi).$$

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 1, (ii), § 2, rezultă că putem presupune Δ finită.

Este deci suficient să demonstrăm prin inducţie asupra lui m că pentru orice $m \in N$ şi pentru orice $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in E$, dacă $\Gamma \cup \{\varphi_1,\dots,\varphi_m\} \vdash \psi$ atunci

$$\Gamma \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \rightarrow \psi).$$

Pentru $m = 1$, dacă $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \vdash \psi$, din teorema deducţiei rezultă $\Gamma \vdash (\varphi_1 \rightarrow \psi)$. Presupunem afirmaţia adevărată pentru m şi pentru toate enunţurile. Dacă $\Gamma \cup \{\varphi_1,\dots,\varphi_{m+1}\} \vdash \psi$, atunci aplicînd teorema deducţiei avem

$$\Gamma \cup \{\varphi_1,\dots,\varphi_m\} \vdash (\varphi_{m+1} \rightarrow \psi).$$

Conform ipotezei inducţiei, avem

$$\Gamma \vdash \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \rightarrow (\varphi_{m+1} \rightarrow \psi)\right].$$

Folosind Propoziţia 3 şi teorema de completitudine se poate demonstra că

$$\vdash \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \rightarrow (\varphi_{m+1} \rightarrow \psi)\right] \rightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{m+1} \varphi_i \rightarrow \psi\right).$$

Aplicînd modus ponens, se obţine

$$\Gamma \vdash \left(\bigwedge_{i=1}^{m+1} \varphi_i \rightarrow \psi\right)$$

deci proprietatea este verificată şi pentru $m+1$.

PROPOZIŢIA 5: Pentru orice mulţime Γ de enunţuri, următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Există $m \in N$ şi $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in \Gamma$, astfel încît

$$\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i .$$

Demonstraţie: (i) ⟹ (ii) : Presupunînd că Γ este inconsistentă, avem

$$\Gamma \vdash \psi \wedge \neg \psi, \text{ pentru orice } \psi \in E.$$

Cum $\emptyset$ este consistentă, avem $\Gamma \neq \emptyset$. Conform propoziţiei precedente, există $m \in N$ şi $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in \Gamma$, astfel încît

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \rightarrow \psi \wedge \neg \psi .$$

Cu ajutorul teoremei de completitudine, se poate arăta că

$$\vdash \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \to \psi \wedge \neg \psi\right] \to \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i .$$

Aplicînd modus ponens, rezultă $\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Presupunînd prin absurd că Γ este consistentă, rezultă că Γ are un model $f: V \to L_2$. Conform (ii), există $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Gamma$, astfel încît $\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i$, deci $\models \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i$. Rezultă

$\tilde{f}\left(\bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i\right) = 1$, deci

$$\tilde{f}(\varphi_i) = 0, \text{ pentru orice } i = 1, \dots, n.$$

Aceasta contrazice faptul că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ şi că f este un model al lui Γ.

§ 5. ALGEBRA LINDENBAUM - TARSKI

Pentru orice $\Gamma \subset E$, consistentă, vom considera relaţia binară $\sim_\Gamma$ pe mulţimea E a enunţurilor, definită în felul următor:

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

Lema 1. $\sim_\Gamma$ este o relaţie de echivalenţă pe E.

Demonstraţie. Trebuie să stabilim proprietăţile următoare:

(i) $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi)$

(ii) $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \Gamma \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi)$

(iii) $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi), \Gamma \vdash (\psi \leftrightarrow \chi) \Rightarrow \Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi)$

Proprietatea (i) rezultă în baza Propoziţiei 2, § 2. Vom demonstra, spre exemplu pe (iii), pe baza teoremei de completitudine extinsă.

Fie $f: V \to L_2$ o interpretare astfel încît $\tilde{f}(\gamma) = 1$, pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Conform teoremei de completitudine extinsă avem

$\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ şi $\Gamma \vdash (\psi \leftrightarrow \chi)$, deci

$$\tilde{f}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1,\ \tilde{f}(\psi \leftrightarrow \chi) = 1.$$

Aplicînd Propoziţia 1, § 4, rezultă

$$\tilde{f}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{f}(\psi) = 1,\ \tilde{f}(\psi) \leftrightarrow \tilde{f}(\chi) = 1,$$

de unde avem $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$ şi $\tilde{f}(\psi) = \tilde{f}(\chi)$, deci $\tilde{f}(\varphi) = f(\chi)$.

Aşadar $\tilde{f}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{f}(\chi) = 1$, de unde se obţine $\tilde{f}(\varphi \leftrightarrow \chi)$. $= 1$
Am arătat că $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi)$.

Analog (dar mai simplu) se poate demonstra şi (ii).

Exerciţiu: Să se demonstreze sintactic proprietăţile (ii) şi (iii).

Lema 2: Pentru orice $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \in E$, avem:

(a) $\varphi \sim_\Gamma \psi \Longrightarrow \neg \varphi \sim_\Gamma \neg \psi$;

(b) $\varphi \sim_\Gamma \psi, \varphi' \sim_\Gamma \psi' \Longrightarrow \varphi \vee \varphi' \sim_\Gamma \psi \vee \psi', \varphi \wedge \varphi' \sim_\Gamma \psi \wedge \psi'$;

(c) $\varphi \wedge \neg \varphi \sim_\Gamma \psi \wedge \neg \psi$; $\varphi \vee \neg \varphi \sim_\Gamma \psi \vee \neg \psi$.

Demonstraţie: Folosind teorema de completitudine, totul se reduce la a arăta că:

$$\Gamma \models (\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \Gamma \models (\neg \varphi \leftrightarrow \neg \psi)$$

$$\Gamma \models (\varphi \leftrightarrow \psi),\ \Gamma \models (\varphi' \leftrightarrow \psi') \Rightarrow \begin{cases} \Gamma \models (\varphi \vee \varphi' \leftrightarrow \psi \vee \psi') \\ \Gamma \models (\varphi \wedge \varphi' \leftrightarrow \psi \wedge \psi') \end{cases}$$

$$\Gamma \models [(\varphi \wedge \neg \varphi) \leftrightarrow (\psi \wedge \neg \psi)]$$

$$\Gamma \models [(\varphi \vee \neg \varphi) \leftrightarrow (\psi \vee \neg \psi)]$$

Vom demonstra, de exemplu, pe ultima din aceste relaţii. Fie $f: V \to L_2$ o interpretare oarecare. Atunci avem

$$\tilde{f}\big([(\varphi \vee \neg \varphi) \leftrightarrow (\psi \vee \neg \psi)]\big)$$
$$= (\tilde{f}(\varphi) \vee \neg \tilde{f}(\varphi)) \leftrightarrow (\tilde{f}(\psi) \vee \neg \tilde{f}(\psi))$$
$$= 1 \leftrightarrow 1 = 1,$$

deci $\models[(\varphi\vee\neg\varphi)\rightarrow(\psi\vee\neg\psi)]$. Cu atît mai mult vom avea:

$$\Gamma\models[(\varphi\vee\neg\varphi)\rightarrow(\psi\vee\neg\psi)].$$

Demonstrarea celorlalte proprietăţi (în aceeaşi manieră) este un exerciţiu util.

<u>Exerciţiu</u>: Să se dea o demonstraţie sintactică a acestei leme.

Considerăm acum mulţimea cît $B_\Gamma = E/\sim_\Gamma$. Conform celor două leme precedente, în B_Γ putem defini următoarele operaţii:

$$\hat{\varphi}\vee\hat{\psi} = \widehat{\varphi\vee\psi}$$
$$\hat{\varphi}\wedge\hat{\psi} = \widehat{\varphi\wedge\psi}$$
$$\neg\hat{\varphi} = \widehat{\neg\varphi}$$
$$0 = \widehat{\varphi\wedge\neg\varphi}$$
$$1 = \widehat{\varphi\vee\neg\varphi}.$$

<u>PROPOZIŢIA 1</u>: B_Γ este o algebră Boole.

Lăsăm demonstraţia acestei propoziţii pe seama cititorului.

B_Γ se numeşte <u>algebra Lindenbaum-Tarski</u> asociată lui L şi lui Γ.

<u>Definiţia 1</u>. Fie B o algebră Boole oarecare şi $X\subset B$. Spunem că B este <u>algebra Boole liberă generată</u> de X dacă pentru orice algebră Boole B' şi pentru orice funcţie $f: X\rightarrow B'$ există un unic morfism de algebre Boole $g: B\rightarrow B'$ astfel încît $g(x) = f(x)$ pentru orice $x\in X$.

<u>Exerciţiu</u>: Orice două algebre Boole generate de X sînt izomorfe.

<u>PROPOZIŢIA 2</u>. $B_\emptyset$ este algebra Boole liberă generată de V.

<u>Demonstraţie</u>: Fie $f: V\rightarrow B'$ o funcţie arbitrară (B' fiind o algebră Boole). In acelaşi mod ca în Propoziţia 1, § 3 se arată că există o <u>unică</u> funcţie $\tilde{f}: E\rightarrow B'$ astfel încît:

(a) $\tilde{f}(v) = f(v)$, pentru orice $v\in V$.

(b) $\tilde{f}(\neg\varphi) = \neg\tilde{f}(\varphi)$

(c) $\tilde{f}(\varphi\rightarrow\psi) = \tilde{f}(\varphi)\rightarrow\tilde{f}(\psi)$

(d) $\tilde{f}(\varphi\vee\psi) = \tilde{f}(\varphi)\vee\tilde{f}(\psi)$

(e) $\tilde{f}(\varphi\wedge\psi) = \tilde{f}(\varphi)\wedge\tilde{f}(\psi)$

(f) $\tilde{f}(\varphi\leftrightarrow\psi) = \tilde{f}(\varphi)\leftrightarrow\tilde{f}(\psi)$,

pentru orice $\varphi,\psi\in E$. Observăm că operaţiile din dreapta au loc în algebra Boole B'. Exact ca în demonstraţia Propoziţiei 2, § 3, se poate arăta că $\tilde{f}(\varphi) = 1$ pentru orice teoremă formală φ.

Mulţimea V a variabilelor lui L poate fi considerată submulţime a lui $B_\emptyset$ prin funcţia injectivă $v\mapsto\hat{v}$. Va trebui să probăm că

$$v\neq v' \Longrightarrow \hat{v}\neq\hat{v}', \text{ pentru orice } v, v'\in V.$$

Intr-adevăr, să presupunem prin absurd că $v\neq v'$, dar $v\sim_\emptyset v'$, adică $\vdash(v\leftrightarrow v')$.

Dacă $v\neq v'$ atunci putem găsi o interpretare $h: V\rightarrow L_2$ astfel încît $h(v) = 0$ şi $h(v') = 1$, deci $h(v)\neq h(v')$. Insă avem $\models(v\leftrightarrow v')$, deci

$$\tilde{h}(v\leftrightarrow v') = 1,$$

de unde rezultă

$$h(v)\leftrightarrow h(v') = \tilde{h}(v)\leftrightarrow\tilde{h}(v') = \tilde{h}(v\leftrightarrow v') = 1.$$

Se obţine de aici $h(v) = h(v')$. Contradicţia este evidentă, deci implicaţia de mai sus este corectă.

Cu ajutorul funcţiei $\tilde{f}: E\rightarrow B'$ de mai sus obţinem o funcţie

$$\bar{f}: E/_{\sim_\emptyset}\rightarrow B',$$

definită astfel:

$\bar{f}(\hat{\varphi}) = \tilde{f}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$.

Faptul că definiţia lui $\bar{f}$ nu depinde de reprezentanţi:

$$\varphi \sim_{\emptyset} \psi \Longrightarrow \tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$$

rezultă astfel:

Dacă $\varphi \sim_{\emptyset} \psi$, atunci $\vdash (\varphi \to \psi)$, deci

$$\tilde{f}(\varphi \to \psi) = 1.$$

Din proprietatea (f) de mai sus se obţine

$\tilde{f}(\varphi) \to \tilde{f}(\psi) = \tilde{f}(\varphi \to \psi) = 1,$

deci $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$.

Aplicînd proprietăţile (a) - (f) de mai sus rezultă imediat că $\bar{f}: B_\Gamma \to B'$ este un morfism de algebre Boole.

Pentru orice $v \in V$, avem ,

$\bar{f}(\hat{v}) = \tilde{f}(v) = f(v)$.

Cu aceasta propoziţia a fost complet demonstrată.

<u>OBSERVATIE</u>: In demonstraţia de mai sus $\hat{v}$ şi v s-au identificat.

<u>PROPOZITIA 3</u>. Fie F un filtru al algebrei Lindenbaum-Tarski B_Γ . Dacă

$$\Delta = \bigcup_{\hat{\varphi} \in F} \hat{\varphi}$$

atunci $\Gamma \subset \Delta$ şi $B_{\Gamma}/_F$ este izomorfă cu B_Δ .

<u>Demonstraţie</u>. Reamintim că $\hat{\varphi}$ este clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in E$ în raport cu relaţia de echivalenţă $\sim_\Gamma$. Pentru că avem trei mulţimi cît vom nota:

$[\varphi]_\Gamma$: clasa de echivalenţă a lui φ în raport cu $\sim_\Gamma$;

$[\varphi]_\Delta$: clasa de echivalenţă a lui φ în raport cu $\sim_\Delta$;

$[x]_F$: clasa de echivalenţă a lui $x \in B_\Gamma$ în raport cu relaţia $\sim_F$ asociată filtrului F.

Este evident că $\hat{\varphi} = [\varphi]_\Gamma$ şi $\Delta = \bigcup_{[\varphi]_\Gamma \in F} [\varphi]_\Gamma$

Să arătăm încît că $\Gamma \subset \Delta$:

$$\begin{aligned}
\varphi \in \Gamma &\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \\
&\Rightarrow \Gamma \models \varphi \\
&\Rightarrow \Gamma \models (\varphi \to (\varphi \vee \neg \varphi)) \\
&\Rightarrow \Gamma \vdash (\varphi \to (\varphi \vee \neg \varphi)) \\
&\Rightarrow \varphi \sim_\Gamma (\varphi \vee \neg \varphi) \\
&\Rightarrow [\varphi]_\Gamma = [\varphi \vee \neg \varphi]_\Gamma = 1 \\
&\Rightarrow [\varphi]_\Gamma \in F \Rightarrow \varphi \in \Delta .
\end{aligned}$$

Pentru orice $\varphi , \psi \in E$, vom arăta că

$$\big[[\varphi]_\Gamma\big]_F = \big[[\psi]_\Gamma\big]_F \Longleftrightarrow [\varphi]_\Delta = [\psi]_\Delta$$

Avem implicaţiile:

$$\begin{aligned}
\big[[\varphi]_\Gamma\big]_F = \big[[\psi]_\Gamma\big]_F &\Rightarrow \big([\varphi]_\Gamma \to [\psi]_\Gamma\big) \in F \\
&\Rightarrow [\varphi \to \psi]_\Gamma \in F \\
&\Rightarrow (\varphi \to \psi) \in \Delta \\
&\Rightarrow [\varphi]_\Delta = [\psi]_\Delta
\end{aligned}$$

Analog se demonstrează şi cealaltă implicaţie.

Conform celor demonstrate, putem să considerăm funcţia injectivă:

$$f: B_{\Gamma}/_F \longrightarrow B_\Delta$$

$f\big(\big[[\varphi]_\Gamma\big]_F\big) = [\varphi]_\Delta$, pentru orice $\big[[\varphi]_\Gamma\big]_F \in B_{\Gamma}/_F$

Este evident faptul că f este surjectivă. De asemenea, rezultă imediat şi faptul că f este morfism de algebre Boole. Deci $B_{\Gamma/F}$, B_Δ sînt izomorfe.

PROPOZIŢIA 4: Pentru orice algebră Boole A există un sistem formal al calculului propoziţional şi o mulţime Γ de enunţuri ale lui L astfel încît A este izomorfă cu B_Γ.

Demonstraţie. Considerăm limbajul formal L în care mulţimea V a variabilelor este A.

Fie $f: V \longrightarrow A$ funcţia identică. Conform Propoziţiei 2, există un morfism de algebre Boole

$$f^+: B_\emptyset \longrightarrow A$$

astfel încît

$f^+(a) = f(a) = a$, pentru orice $a \in A$.

Deci f^+ este un morfism surjectiv. Dacă

$$F = M_{f^+} = \left\{ x \in B_\emptyset \mid f^+(x) = 1 \right\}$$

atunci A este izomorfă cu $B_\emptyset/F$ (vezi Capitolul II, corolarul Propoziţiei 3, § 3).

Dacă $\Gamma = \bigcup_{[\varphi]_\emptyset \in F} [\varphi]_\emptyset$, atunci conform propoziţiei precedente

$B_\emptyset/_F$ şi $B/_\Gamma$ sînt izomorfe. Deci A este izomorfă cu $B/_\Gamma$.

OBSERVAŢIE. Această teoremă are o semnificaţie deosebită, arătînd că toate algebrele Boole pot fi obţinute ca algebre Lindenbaum-Tarski.

EXERCIŢII LA CAPITOLUL III

1. Să se arate că următoarele enunţuri sînt teoreme ale sistemului formal L:

(1) $p \vee p \rightarrow p$

(2) $q \rightarrow p \vee q$

(3) $p \vee q \rightarrow q \vee p$

(4) $p \vee (q \vee r) \rightarrow q \vee (p \vee r)$

(5) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$

(6) $p \rightarrow p \vee p$

(7) $p \vee \neg p$

(8) $p \vee \neg\neg\neg p$

(9) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(10) $p \vee (p \vee q \rightarrow p)$

(11) $\neg p \vee ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(12) $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(13) $p \vee (q \vee r) \rightarrow p \vee (r \vee q)$

(14) $p \vee (q \vee r) \rightarrow (p \vee q) \vee r$

(15) $(p \vee q) \vee r \rightarrow p \vee (q \vee r)$

(16) $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \vee p)$

(17) $(q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow p \vee r)$

(18) $(q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow r \vee p)$

(19) $(\neg p \vee (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(20) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(21) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p$

(22) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg q$

(23) $\neg (p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q)$

(24) $\neg (p \to q) \to (\neg p \to q)$

(25) $\neg (p \to q) \to (p \to \neg q)$

(26) $\neg (p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

(27) $\neg (p \to q) \to (q \to p)$

(28) $p \vee q \to (\neg p \to q)$

(29) $(\neg p \to q) \to p \vee q$

(3o) $\neg p \to (p \vee q \to q)$

(31) $\neg q \to (p \vee q \to p)$

(32) $(\neg p \to q) \to ((p \to q) \to q)$

(33) $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

(34) $p \vee q \to ((p \to q) \to q))$

(35) $p \vee q \to ((\neg p \vee q) \to q)$

(36) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

(37) $p \vee q \to (q \to (p \to q))$

(38) $(p \to q) \to (q \to p \vee q)$

(39) $(p \to q) \to (p \vee q \vee r \to q \vee r)$

(4o) $p \vee q \to ((p \vee q \to r) \to p \vee r)$

(41) $(q \to (r \to s)) \to (p \vee q \to (p \vee r \to p \vee s))$

(42) $p \vee q \vee r \to (p \vee \neg r \vee s \to p \vee q \vee s)$

(43) $(p \to (q \to r)) \to [(p \to (r \to s) \to (p \to (q \to s))]$

(44) $(p \vee q \to p \vee r) \to (p \vee q \to r)$

(45) $(p \to q) \to (p \to s)) \to (p \to (q \to s))$

(46) $p \to (q \to p \wedge q)$

(47) $q \to (p \to p \wedge q)$

(48) $p \wedge q \to q \wedge p$

(49) $\neg (p \wedge \neg p)$

(5o) $p \wedge q \to p$

(51) $p \wedge q \to q$

(52) $(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$

(53) $(p \to (q \to r) \to (p \wedge q \to r)$

(54) $((p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

(55) $((q \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \to r)$

(56) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(57) $(p \wedge q \to r) \to (p \wedge \neg r \to \neg q)$

(58) $p \wedge q \to (p \to q)$

(59) $(p \to r) \to (p \wedge q \to r)$

(6o) $(q \to r) \to (p \wedge q \to r)$

(61) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \to (p \to q \wedge r)$

(62) $(p \to q) \to (p \wedge r \to q \wedge r)$

(63) $(p \to r) \wedge (q \to s) \to (p \wedge q \to r \wedge s)$

(64) $((p \to r) \wedge (q \to s) \to (p \vee q \to r \vee s)$

(65) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

(66) $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$

(67) $(p \wedge q \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$

(68) $(p \wedge q \to \neg r) \leftrightarrow (q \wedge r \to \neg p)$

(69) $p \leftrightarrow p$

(7o) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

(71) $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \to (p \leftrightarrow r)$

(72) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$

(73) $p \leftrightarrow (p \vee p)$

(74) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

(75) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

(76) $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

(77) $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

(78) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r)$

(79) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$

(8o) $(p \leftrightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow r \wedge s)$

(81) $(p \leftrightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \rightarrow (p \vee q \leftrightarrow r \vee s)$

(82) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

(83) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

(84) $p \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$

(85) $p \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q))$

(86) $p \leftrightarrow p \vee (p \wedge q)$

(87) $p \leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$

(88) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

(89) $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(9o) $(p \rightarrow \neg q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(91) $\neg (\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(92) $(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$

(93) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$

(94) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q)$

(95) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p \vee q)$

(96) $q \rightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q)$

(97) $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p$

(98) $(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$

(99) $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

(1oo) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

2. Să se demonstreze următoarele reguli de deducţie.

(1) $$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}$$

(2) $$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi;\ \Gamma_2 \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}$$

(3) $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

(4) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$

(5) $$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi;\ \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg \psi}{\Gamma \vdash \neg \varphi}$$

(6) $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi;\ \Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$

(7) $$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \gamma;\ \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \gamma}{\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \gamma}$$

(8) $\Gamma \cup \{\neg\neg \varphi\} \vdash \varphi$

(9) $$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi;\ \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi \wedge \psi}$$

(1o) $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

(11) $$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

(12) $$\frac{\Gamma_1 \vdash (\varphi \rightarrow \psi),\ \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}$$

$$\text{(13)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \vee \psi \,;\, \Gamma_2 \cup \{\varphi\} \vdash \gamma \,;\, \Gamma_3 \cup \{\varphi\} \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup P_3 \vdash \gamma}$$

3. Să se demonstreze că pentru orice enunţ φ există $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile φ_{ij}, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij} \right)$$

unde fiecare φ_{ij} este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale pentru $i \leqslant m, j \leqslant n_i$.

4. Pentru orice enunţ φ există $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile φ_{ij}, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij} \right)$$

unde pentru orice $i \leqslant m, j \leqslant n_i$, φ_{ij} este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale.

5. Să se arate, pentru orice mulţime Σ de enunţuri, că sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) Σ este consistentă.

(ii) Orice parte finită a lui Σ este consistentă.

6. Să se arate demonstraţia că axiomele (A 1) - (A 3) ale sistemului formal al calculului propoziţional sînt independente.

CAPITOLUL 4

Sistemul formal al calculului predicatelor

Un al doilea sistem formal, acela al calculului predicatelor, este subiectul prezentului capitol. In primul paragraf este prezentată construcţia sistemului formal al calculului predicatelor şi proprietăţile sale sintactice.

Al doilea paragraf tratează algebra Lindenbaum-Tarski a sistemului formal al calculului predicatelor, care este o algebră Boole obţinută prin factorizarea mulţimii formulelor printr-o relaţie de echivalenţă canonică. Proprietăţile sintactice ale sistemului formal se vor reflecta în proprietăţi algebrice ale algebrei Lindenbaum-Tarski.

Ultimul paragraf al capitolului defineşte conceptul important de <u>model al unui enunţ</u> şi conţine demonstraţia teoremei de completitudine pentru calculul predicatelor. Această demonstraţie este complet algebrică, bazîndu-se pe proprietăţile algebrei Lindenbaum-Tarski şi pe teorema Rasiowa-Sikorski.

De obicei calculul predicatelor este dezvoltat pe baza calculului propoziţional la care se adaugă axiomele specifice. Am preferat să abordăm acest capitol în altă manieră decît cea aleasă pentru capitolul precedent, pentru a avea în faţă două moduri de demonstraţie: unul <u>algebric</u>, ca cel de faţă, şi unul <u>nealgebric</u>, ca cel din capitolul precedent.

Vom remarca că acest ultim paragraf este doar începutul unui domeniu de mare actualitate al logicii: <u>Teoria modelelor</u>.

§ 1. <u>SISTEMUL FORMAL AL CALCULULUI PREDICATELOR</u>

Fie λ o funcţie

$$\lambda : N \longrightarrow N$$