$$(13) \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \vee \psi ; \Gamma_2 \cup \{\varphi\} \vdash \gamma ; \Gamma_3 \cup \{\psi\} \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup P_3 \vdash \gamma}$$

3. Să se demonstreze că pentru orice enunţ φ exista $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile φ_{ij}, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij} \right)$$

unde fiecare φ_{ij} este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale pentru $i \leq m, j \leq n_i$.

4. Pentru orice enunţ φ există $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile φ_{ij}, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij} \right)$$

unde pentru orice $i \leq m, j \leq n_i$, φ_{ij} este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale.

5. Să se arate, pentru orice mulţime Σ de enunţuri, că sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) Σ este consistentă.

(ii) Orice parte finită a lui Σ este consistentă.

6. Să se arate demonstraţia că axiomele (A 1) - (A 3) ale sistemului formal al calculului propoziţional sînt independente.

CAPITOLUL 4

Sistemul formal al calculului predicatelor

Un al doilea sistem formal, acela al calculului predicatelor, este subiectul prezentului capitol. In primul paragraf este prezentată construcţia sistemului formal al calculului predicatelor şi proprietăţile sale sintactice.

Al doilea paragraf tratează algebra Lindenbaum-Tarski a sistemului formal al calculului predicatelor, care este o algebră Boole obţinută prin factorizarea mulţimii formulelor printr-o relaţie de echivalenţă canonică. Proprietăţile sintactice ale sistemului formal se vor reflecta în proprietăţi algebrice ale algebrei Lindenbaum-Tarski.

Ultimul paragraf al capitolului defineşte conceptul important de modol al unui enunţ şi conţine demonstraţia teoremei de completitudine pentru calculul predicatelor. Această demonstraţie este complet algebrică, bazîndu-se pe proprietăţile algebrei Lindenbaum-Tarski şi pe teorema Rasiowa-Sikorski.

De obicei calculul predicatelor este dezvoltat pe baza calculului propoziţional la care se adaugă axiomele specifice. Am preferat să abordăm acest capitol în altă manieră decît cea aleasă pentru capitolul precedent, pentru a avea în faţă două moduri de demonstraţie: unul algebric, ca cel de faţă, şi unul nealgebric, ca cel din capitolul precedent.

Vom remarca că acest ultim paragraf este doar începutul unui domeniu de mare actualitate al logicii: Teoria modelelor.

§ 1. SISTEMUL FORMAL AL CALCULULUI PREDICATELOR

Fie λ o funcţie

$$\lambda : N \longrightarrow N$$

Definiţia 1. Printr-o λ - structură vom înţelege o pereche ordonată

$$\mathcal{A} = \langle A, \{R_n\}_{n\in N} \rangle,$$

unde A este o mulţime nevidă, numită domeniul structurii $\mathcal{A}$ şi pentru orice $n\in N$, R_n este o relaţie $\lambda(n)$ - ară ($R_n \subset A^{\lambda(x)}$).

Definiţia 2. Două λ - structuri se vor numi structuri similare, iar clasa tuturor λ - structurilor se va numi clasă de similaritate.

Notăm cu $\mathcal{C}_\lambda$ clasa tuturor λ - structurilor.

Fiecărei $\lambda : N \longrightarrow N$ îi vom asocia un sistem formal L_λ, numit sistemul formal al calculului predicatelor asociat lui λ.

Simbolurile primitive ale lui L_λ sînt următoarele:

(1) O mulţime numărabilă V de simboluri numite variabile, notate x, y, z, u, v, w, ...

(2) O mulţime numărabilă de simboluri numite predicate:

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

Pentru orice $n\in N$, $\lambda(n)$ se va numi gradul predicatului P_n.

(3) Simbolul de egalitate =

(4) Conectorii $\neg$ şi $\wedge$

(5) Simbolul de cuantificare $\exists$.

(6) Parantezele: ( ), [ ].

Prin simboluri logice vom înţelege simbolurile $\neg$, $\wedge$ şi $\exists$. Celelalte simboluri se vor numi simboluri nelogice.

Un cuvînt va fi un şir finit de simboluri ale lui L.

O formulă atomică sau elementară este un cuvînt care are una din formele următoare:

(1) x = y, unde x, y sînt variabile oarecare

(2) $P_n(x_1,\dots,x_{\lambda(n)})$, unde P_n este un predicat de ordinul $\lambda(n)$.

OBSERVAŢIE: Aici este punctul unde începe să se observe că L_λ este construit astfel încît să exprime formal proprietăţile tuturor structurilor din clasa de similaritate $\mathcal{C}_\lambda$. Se vede că

- variabilele x, y, z,... vor reprezenta elementele arbitrare din structurile considerate;
- pentru orice $n\in N$, predicatul P_n este reprezentarea formală a relaţiei $\lambda(n)$ - are R_n.

Din mulţimea cuvintelor vom selecta submulţimea formulelor, care vor fi cuvintele „cu sens".

Definiţia conceptului de formulă se va face prin inducţie. Anume, un cuvînt φ este o formulă dacă satisface una din condiţiile următoare:

(1) φ este o formulă atomică ;

(2) $\varphi = \neg\psi$, unde ψ este o formulă ;

(3) $\varphi = \psi\wedge\chi$, unde ψ şi χ sînt formule ;

(4) $\varphi = (\exists x)\,\psi$, unde χ este o variabilă şi ψ este o formulă.

Pe lîngă conectorii $\neg$, $\wedge$ definim următorii conectori:

$$\varphi\vee\psi = \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$$
$$\varphi\rightarrow\psi = \neg(\varphi\wedge\neg\psi)$$
$$\varphi\leftrightarrow\psi = (\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi) = \neg(\varphi\wedge\neg\psi)\wedge\neg(\psi\wedge\neg\varphi)$$

De asemenea, introducem simbolul de cuantificare $\forall$ prin:

$$(\forall x)\,\varphi = \neg(\exists x)\neg\varphi$$

Observație: (a) Conectorii $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ se citesc astfel:

$\neg$: non ;

$\wedge$: și ; $\vee$: sau;

$\rightarrow$: implică; $\leftrightarrow$: echivalent .

(b) $\exists$ se numește cuantificator existențial și se citește „există", iar $\forall$ se numește cuantificator universal și se citește „oricare ar fi" sau „pentru orice".

Dacă într-o formulă apare $\exists x$, atunci x se numește variabilă legată sau cuantificată. O variabilă care nu este legată se numește liberă.

Mai precis, variabilele libere sînt definite astfel prin inducție:

(a) orice variabilă ce apare într-o formulă atomică este liberă ;

(b) dacă x este o variabilă liberă a lui φ, atunci x este o variabilă liberă a lui $\neg\varphi$;

(c) dacă x este o variabilă liberă a lui φ sau a lui ψ, atunci x este o variabilă liberă a lui $\varphi \wedge \psi$;

(d) dacă x este o variabilă liberă a lui φ definită de variabile y, atunci x este o variabilă liberă a lui $(\exists y)\, \varphi$.

O formulă în care nu apare nici o variabilă liberă se numește enunț. Vom nota cu E mulțimea enunțurilor, iar cu F mulțimea formulelor lui L_λ .

OBSERVAȚIE: Pentru a specifica că $x_1, \ldots, x_n$ sînt variabile libere ale unei formule φ, vom nota $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Dacă avem o formulă $\varphi(x)$ și y este o altă variabilă, atunci prin $\varphi(y)$ vom înțelege formula obținută înlocuind în $\varphi(x)$ pe x cu y peste tot unde apare x.

Pasul următor în descrierea sintaxei lui L_λ este definirea teoremelor sale.

Axiomele lui L_λ sînt formule care au una din următoarele forme:

A 1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

A 2. $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$

A 3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

A 4. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

A 5. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$

A 6. $(\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow [(\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow [\varphi \wedge \psi])]$

A 7. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$

A 8. $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$

A 9. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ([\varphi \vee \psi] \rightarrow \chi)]$

A1o. $(\forall x)\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$

A11. $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$, dacă φ nu conține pe x ca variabilă liberă.

A12. $(\forall x)(x = x)$

A13. $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow [\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)])$

OBSERVAȚIE: In capitolul precedent, A 1 - A 3 au fost axiomele sistemului formal L al calculului propozițional. Se observă că în axiomatizarea calculului cu predicate ce o prezentăm aici axiomele prezentate folosesc conectorii $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$. Ca un exercițiu pentru cititor, după parcurgerea acestui capitol, rămîne a se arăta că sistemul de axiome A1 - A9 este echivalent cu sistemul de axiome prezentat în capitolul precedent.

Regulile de deducție ale sistemului formal L_λ sînt următoarele:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)}$$

$$\frac{\varphi}{(\forall x)} \quad \text{(generalizarea)}$$

Cele două reguli de deducţie se exprimă astfel:

<u>modus ponens</u> : ψ este o <u>consecinţă</u> a lui φ şi $\varphi \to \psi$, pentru orice formule φ şi ψ ale lui L_λ;

<u>generalizarea</u>: $(\forall x)\varphi$ este o <u>consecinţă</u> a lui φ, unde φ este o formulă şi x este o variabilă oarecare a lui L_λ.

O <u>demonstraţie formală</u> a unei formule φ este un şir finit de formule

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi .$$

astfel încît pentru orice $i = 1, \ldots, n$, să fie verificată una din condiţiile următoare:

a) φ_i este o axiomă;

b) există $j, k < i$, astfel încît $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$;

c) există $j < i$, astfel încît $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$.

n se numeşte <u>lungimea</u> demonstraţiei formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Dacă pentru un enunţ φ există o demonstraţie formală atunci φ se numeşte <u>teoremă</u> a sistemului formal L_λ. Notăm cu $\vdash \varphi$ faptul că φ este o teoremă a lui L_λ. Deci mulţimea T a teoremelor lui L_λ este obţinută din axiomele lui L_λ prin aplicarea celor două reguli de deducţie de mai sus.

Fie Σ o mulţime de formule ale lui L_λ. Spunem că o formulă φ este <u>dedusă din ipotezele</u> Σ dacă există un şir finit de formule

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$$

astfel încît pentru orice $i \leq n$ este verificată una din condiţiile următoare:

(i) φ este o axiomă ;

(ii) $\varphi \in \Sigma$;

(iii) există $j, k < i$, astfel încît $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$;

(iv) există $j < i$, astfel încît $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$.

Vom nota cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că φ este dedusă din Σ. Dacă $\Sigma = \emptyset$, atunci este evident că avem

$$\emptyset \vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \varphi$$

Deci teoremele sînt formulele deduse din ipoteza vidă.

<u>OBSERVATIE</u>. Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$, pentru orice $\Sigma \subset F$.

<u>Lema 1</u>. Pentru orice formulă φ, avem

$$\vdash (\varphi \to \varphi)$$

<u>Demonstraţie</u>. Următorul şir de formule este o demonstraţie formală a lui $\varphi \to \varphi$:

(A 2) $[\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)] \to [(\varphi \to]\varphi \to \varphi]) \to (\varphi \to \varphi)]$

(A 1) $\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)$

m.p. $(\varphi \to [\varphi \to \varphi] \to (\varphi \to \varphi))$

(A 1) $\varphi \to [\varphi \to \varphi]$

m.p. $\varphi \to \varphi$

<u>Lema 2</u>. Pentru orice formule φ, ψ şi χ, avem

$$\vdash (\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$$

<u>Demonstraţie</u>

(A 2) $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$

(A 1) $\left([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right) \to$

$\to \left((\psi \to \chi) \to \left([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right)\right)$

m.p. $(\psi \to \chi) \to \left([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right)$

(A-2) $\left((\psi \to \chi) \to \left([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right)\right) \to$

$\to \left(\left[(\psi \to \chi) \to [\varphi \to (\psi \to \chi)]\right] \to \left[(\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right]\right)$

m.p. $\left[(\psi \to \chi) \to [\varphi \to (\psi \to \chi)]\right] \to \left[(\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right]$

(A 1) $(\psi \to \chi) \to [\varphi \to (\psi \to \chi)]$

m.p. $(\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$

<u>Lema 3</u>. Pentru orice formule φ, ψ avem:

$$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$$

<u>Demonstratie</u>

(A 3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

$$[(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)] \to \left([\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)] \to [\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)]\right)$$

(Lema 2)

m.p. $[\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)] \to [\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)]$

(A 1) $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

m.p. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

<u>Lema 4</u>. Pentru orice formule φ, ψ, θ, χ avem

(a) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$

(b) $\vdash \varphi \to [\psi \to (\varphi \wedge \psi)]$

(c) $\vdash [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)] \to [(\varphi \vee \psi) \wedge \chi]$

(d) $\vdash (\chi \to \theta) \to [(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))]$

(e) $\vdash (\varphi \vee \psi) \to \left(\chi \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)]\right)$

(f) $\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \wedge \psi) \to \chi]$

(g) $\vdash [(\varphi \vee \psi) \wedge \chi] \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)]$

(h) $\vdash (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$

Demonstraţia acestei leme o lăsăm pe seama cititorului.

<u>Lema 5</u>. Pentru orice formulă $\varphi(x,y)$ a lui L, avem

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to (\forall y)(\forall x)\,\varphi(x,y)$$

<u>Demonstraţie</u>. Conform A 9, avem

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to (\forall y)\,\varphi(x,y)$$

$$\vdash (\forall y)\,\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$$

Lema 4, (h) ne spune că

$$\vdash [(\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to (\forall y)\,\varphi(x,y)] \to$$

$$\to \left[[(\forall y)\,\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)] \to [(\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)]\right]$$

Aplicînd de două ori modus ponens rezultă

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$$

de unde, conform generalizării se obţine

$$\vdash \forall x\,[(\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)]$$

Din A 11:

$$\vdash (\forall x)[(\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)] \to [(\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to (\forall x)\varphi(x,y)]$$

se obţine prin modus ponens:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to (\forall x)\,\varphi(x,y))$$

In acelaşi mod, folosind generalizarea A 11 şi modus ponens obţinem:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \to (\forall y)(\forall x)\,\varphi(x,y)$$

<u>Corolar</u>:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\,\varphi(x,y).$$

O <u>formulă deschisă</u> este o formulă care nu conţine nici un cuantificator. Dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este o formulă ale cărei variabile libere sînt $x_1,\dots,x_n$ atunci prin <u>închiderea</u> lui $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ vom înţelege enunţul

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\, \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

<u>Lema 6.</u> Pentru orice formulă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ avem

$$\vdash \varphi(x_1,\dots,x_n) \Longleftrightarrow\ \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\, \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

<u>Demonstrație</u>. Implicația $\Longrightarrow$ se obține aplicînd generalizarea de n ori.

$\Longleftarrow$: Prin procedeul folosit în demonstrația lemei precedente se arată că

$$\vdash (\forall x_1)\dots(\forall x_n)\, \varphi(x_1,\dots,x_n) \rightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Conform ipotezei, aplicînd modus ponens rezultă

$$\vdash \varphi(x_1,\dots, x_n)$$

Deci o formulă a lui L_λ este teoremă dacă și numai dacă închiderea ei este o teoremă. Cu alte cuvinte, din punct de vedere al „adevărurilor sintactice" este suficient să considerăm enunțurile care sînt teoreme.

<u>Lema 7.</u> Dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Sigma_0 \subset \Sigma$ finită astfel încît $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

Lăsăm demonstrația acestei leme pe seama cititorului.

<u>Exerciții</u>:

(a) Pentru orice variabile x,y,z ale lui L_λ avem

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\, [x = y \rightarrow y = x]$$

$$\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)\, [(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z]$$

(b) Dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este o formulă care are variabilele libere $x_1,\dots,x_n$ și dacă $y_1,\dots,y_n$ nu apar în $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, atunci

$$\vdash [(x_1 = y_1) \wedge \dots \wedge (x_n = y_n)] \rightarrow [\varphi(x_1,\dots,x_n) \rightarrow \varphi(y_1,\dots,y_n)]$$

§ 2. <u>ALGEBRA LINDENBAUM - TARSKI a lui</u> L_λ

In capitolul precedent, am studiat algebra Lindenbaum-Tarski B_Γ asociată unei mulțimi de enunțuri Γ folosind teorema de completitudine extinsă.

Pentru scopurile noastre, algebra Lindenbaum-Tarski va juca un rol important. De aceea, în cazul lui L_λ, vom folosi mijloace <u>strict sintactice</u> pentru studiul său.

Pe mulțimea F a formulelor considerăm următoarea relație

$$\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi \rightarrow \psi \ \text{și}\ \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Conform Lemei 1, § 1 $\sim$ este reflexivă și conform Lemei 2, § 2 este tranzitivă. Este evident că $\sim$ este simetrică, deci $\sim$ este o relație de echivalență pe F.

Pe mulțimea cît $F/\sim$ considerăm următoarea relație binară:

$$\tilde{\varphi} \leqslant \tilde{\psi} \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Lăsăm cititorului să arate că această definiție nu depinde de reprezentanți: dacă $\varphi \sim \varphi', \psi \sim \psi'$, atunci

$$\vdash \varphi \rightarrow \psi \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$$

<u>OBSERVAȚIE</u>: Cu $\tilde{\varphi}$ am notat clasa de echivalență a lui φ.

<u>PROPOZIȚIA 1</u>. $(F/\sim, \leqslant)$ este o algebră Boole. In această algebră Boole avem:

$$\tilde{\varphi} = 1 \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi$$

$$\tilde{\varphi} = 0 \Longleftrightarrow\ \vdash \neg \varphi$$

<u>Demonstrație</u>: Conform Lemelor 1 și 2, § 1, relația $\leqslant$ este reflexivă și tranzitivă. Conform definiției, ea este tranzitivă, deci $(F/\sim, \leqslant)$ este o mulțime parțial ordonată.

Fie $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ două elemente oarecare ale lui $F/\sim$. Vom arăta că $\widetilde{\varphi \wedge \psi}$ este infimumul mulțimii $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$. Din axiomele A4 și A5:

$$\vdash \varphi\wedge\psi \rightarrow \varphi$$
$$\vdash \varphi\wedge\psi \rightarrow \psi$$

se obţine

$$\widetilde{\varphi\wedge\psi}\leq\tilde{\varphi} \text{ şi } \widetilde{\varphi\wedge\psi}\leq\tilde{\psi}$$

Deci $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este un minorant al mulţimii $\{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\}$. Să arătăm acum că $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este cel mai mare minorant al acestei mulţimi.Pentru aceasta, presupunem că $\tilde{\chi}\leq\tilde{\varphi}$ şi $\tilde{\chi}\leq\tilde{\psi}$, deci

$$\vdash \chi\rightarrow\varphi \text{ şi } \vdash \chi\rightarrow\psi$$

Din axioma A 6:

$$\vdash(\chi\rightarrow\varphi)\rightarrow[(\chi\rightarrow\psi)\rightarrow(\chi\rightarrow(\varphi\wedge\psi))]$$

rezultă, aplicînd de două ori modus ponens:

$$\vdash \chi \rightarrow (\varphi\wedge\psi),$$

ceea ce înseamnă că $\tilde{\chi}\leq\widetilde{\varphi\wedge\psi}$. Cu aceasta, am arătat că $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este cel mai mare minorant al mulţimii $\{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\}$. Similar se arată că

$$\widetilde{\varphi\vee\psi}$$

este supremumul mulţimii $\{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\}$.

Deci $F/\sim$ este o latice pentru care avem

$$\tilde{\varphi}\wedge\tilde{\psi} = \widetilde{\varphi\wedge\psi}$$
$$\tilde{\varphi}\vee\tilde{\psi} = \widetilde{\varphi\vee\psi}$$

Conform Lemei 4, (c) şi (g), pentru orice formule φ,ψ,χ avem

$$\widetilde{(\varphi\vee\psi)\wedge\chi} = \widetilde{(\varphi\wedge\chi)\vee(\psi\wedge\chi)}$$

deci

$$(\tilde{\varphi}\vee\tilde{\psi})\wedge\tilde{\chi} = (\tilde{\varphi}\wedge\tilde{\chi})\vee(\tilde{\psi}\wedge\tilde{\chi})$$

Aceasta este suficient pentru a afirma că $F/\sim$ este o latice distributivă.

Presupunem acum $\vdash\varphi$. Aplicînd modus ponens axiomei A 1:

$$\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

rezultă $\vdash\psi\rightarrow\varphi$, pentru orice $\psi\in F$. Cu alte cuvinte, dacă $\varphi\in T$, atunci

$$\tilde{\psi}\leq\tilde{\varphi}, \text{ pentru orice } \psi\in F.$$

De aici rezultă, pentru $\vdash\varphi$ şi $\vdash\varphi'$, că avem $\tilde{\varphi}'\leq\tilde{\varphi}$ şi , deci $\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}'$. Deducem că mulţimea T a teoremelor formează o clasă de echivalenţă, care va fi elementul ultim al laticii $F/\sim$:

$$1 = \tilde{\varphi}, \text{ pentru } \varphi\in T$$

Presupunem acum că $\vdash\neg\varphi$.Aplicînd modus ponens Lemei 3:

$$\vdash\neg\varphi\rightarrow(\varphi\rightarrow\psi)$$

rezultă $\vdash\varphi\rightarrow\psi$, pentru orice $\psi\in F$. Cu alte cuvinte, dacă $\neg\varphi\in T$, atunci

$$\tilde{\varphi}\leq\tilde{\psi}, \text{ pentru orice } \psi\in F.$$

Deci pentru orice φ, $\varphi'\in F$, astfel încît $\vdash\neg\varphi$ şi $\vdash\neg\varphi'$, vom avea $\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}'$. Aceasta arată că mulţimea

$$\{\varphi\in F \mid \vdash\neg\varphi\}$$

formează o clasă de echivalenţă care va fi elementul prim al laticii $F/\sim$:

$$0 = \tilde{\varphi}, \text{ pentru } \neg\varphi\in T.$$

Pentru orice formulă φ, avem

$$\vdash\varphi\rightarrow\varphi \qquad \text{(Lema 1)}$$

Conform definiţiei conectorului $\rightarrow$, aceasta este totuna cu:

$$\vdash\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$$

În particular, punînd în locul lui φ pe $\neg\varphi$, se obţine:

$$\vdash \neg(\neg\varphi\wedge\neg\neg\varphi)$$

adică

$$\vdash \varphi\vee\neg\varphi$$

Din cele două relaţii demonstrate mai sus rezultă:

$$\widetilde{\varphi\wedge\neg\varphi} = 0 \text{ şi } \widetilde{\varphi\vee\neg\varphi} = 1$$

ceea ce se mai scrie astfel

$$\tilde{\varphi}\wedge\widetilde{\neg\varphi} = 0 \text{ şi } \varphi\vee\widetilde{\neg\varphi} = 1$$

Aceste două egalităţi arată că $\widetilde{\neg\varphi}$ este complementul lui φ, pentru orice formulă φ :

$$\neg\tilde{\varphi} = \widetilde{\neg\varphi}$$

In concluzie, $F/\sim$ este o algebră Boole care verifică cele două proprietăţi ale Propoziţiei 1.

<u>OBSERVAŢIE</u>. Făcînd legătura cu algebrele Lindenbaum-Tarski pentru sistemul formal al calculului propoziţional, observăm că aici am considerat numai cazul $\Gamma = \emptyset$, fiindu-ne suficient pentru scopurile noastre. In notaţiile de acolo, am avea $F/\sim = B_{\emptyset}$.

Pentru orice formulă de forma $(\forall x)\varphi(x)$ vom nota cu $\varphi(y)$ formula obţinută din $\varphi(x)$ înlocuind pe x cu y peste tot unde x apare ca variabilă liberă în $\varphi(x)$.

<u>PROPOZIŢIA 2</u>: Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L_{χ}, în algebra Lindenbaum-Tarski $F/\sim$ este verificată egalitatea:

$$\widetilde{(\forall x)\varphi(x)} = \bigwedge\left\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v\in V\right\}$$

<u>Demonstraţie</u>. Pentru orice $v\in V$, avem

$$\vdash (\forall x)\varphi(x)\rightarrow\varphi(v) \qquad \text{(A 1o)}$$

deci

$$\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}\leqslant\widetilde{\varphi(v)}, \text{ pentru orice } v\in V.$$

Aceasta arată că $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}$ este un minorant al mulţimii

$$\left\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v\in V\right\}$$

Să arătăm că $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}$ este cel mai mare minorant al acestei mulţimi. Pentru aceasta, să considerăm o formulă Ψ astfel încît

$$\tilde{\Psi}\leqslant\widetilde{\varphi(v)}, \text{ pentru orice } v\in V.$$

Fie v o variabilă ce nu apare în Ψ sau $\varphi(x)$. Vom avea

$$\vdash \Psi\rightarrow\varphi(v)$$

conform definiţiei relaţiei de ordine $\leqslant$ în algebra Lindenbaum-Tarski. Aplicînd generalizarea, se obţine

$$\vdash (\forall v)(\Psi\rightarrow\varphi(v))$$

Din această relaţie şi din axioma A 11:

$$\vdash (\forall v)(\Psi\rightarrow\varphi(v)) \rightarrow (\Psi\rightarrow(\forall v)\varphi(v))$$

rezultă prin modus ponens:

$$\text{(a)} \qquad \vdash \Psi\rightarrow(\forall v)\varphi(v)$$

Conform A 1o:

$$\vdash (\forall v)\varphi(v)\rightarrow\varphi(x)$$

de unde prin generalizare rezultă

$$\vdash (\forall x)((\forall v)\varphi(v)\rightarrow\varphi(x))$$

Din această relaţie şi din axioma A 11:

$$\vdash (\forall x)((\forall v)\varphi(v)\rightarrow\varphi(x))\rightarrow\left[(\forall v)\varphi(v)\rightarrow(\forall x)\varphi(x)\right]$$

rezultă prin modus ponens:

$$\text{(b)} \qquad \vdash (\forall v)\varphi(v) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$$

Lema 2, § 1 arată că:

$$\vdash \left[(\forall v)\varphi(v) \to (\forall x)\varphi(x)\right] \to \left[(\psi \to (\forall v)\varphi(v)) \to (\psi \to (\forall x)\varphi(x))\right]$$

Din această relaţie şi din (a),(b) rezultă, aplicînd de două ori modus ponens:

$$\vdash \psi \to (\forall x)\varphi(x)$$

Deci

$$\tilde{\psi} \leq \widetilde{(\forall x)\varphi(x)},$$

de unde rezultă că $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}$ este cel mai mare minorant al mulţimii

$$\left\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\right\}.$$

<u>Corolar</u>: Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L_{λ}, avem:

$$\widetilde{(\exists x)\varphi(x)} = \bigvee \left\{\widetilde{\varphi(v)};\ v \in V\right\}$$

<u>Demonstraţie</u>: Din relaţia:

$$\widetilde{\neg(\exists x)\varphi(x)} = \widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)} = \bigwedge \left\{\widetilde{\neg\varphi(v)} \mid v \in V\right\}$$

rezultă, prin aplicarea legilor lui de Morgan:

$$\begin{aligned} \widetilde{(\exists x)\varphi(x)} &= \neg\,\widetilde{\neg(\exists x)\varphi(x)} \\ &= \neg \bigwedge \left\{\neg\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\right\} \\ &= \bigvee \left\{\neg\neg\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\right\} \\ &= \bigvee \left\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\right\} \end{aligned}$$

§ 3. <u>M O D E L E</u>

Fie $\lambda: N \to N$ o funcţie oarecare şi

$$\mathcal{A} = < A, \{R_n\}_{n \in N} >$$

o λ-structură. Considerăm o formulă $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ a lui L_{λ} cu variabilele libere aflate în mulţimea $\{x_1,\dots,x_m\}$.

Pentru orice elemente $a_1,\dots,a_m$ ale lui A, vom defini acum relaţia:

„$a_1,\dots, a_m$ <u>satisfac</u> formula $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ în $\mathcal{A}$", care va fi scrisă prescurtat

$$\mathcal{A} \models \varphi\left[a_1,\dots,a_m\right].$$

Această definiţie este dată prin inducţie asupra modului de formare al formulelor sistemului formal L_{λ}:

(1) Dacă φ este de forme $x = y$ şi $a, b \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models (x = y)\left[a,b\right] \iff a = b$$

(2) Dacă φ este de forma $P_n(x_1,\dots,x_{\lambda(n)})$ şi $a_1,\dots, a_{\lambda(n)} \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models P_n\left[a_1,\dots,a_{\lambda(n)}\right] \iff (a_1,\dots,a_{\lambda(n)}) \in R_n.$$

(3) Dacă φ este de forma $\neg\psi(x_1,\dots,x_m)$ şi $a_1,\dots,a_m \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models \neg\psi\left[a_1,\dots,a_m\right] \iff \mathcal{A} \not\models \psi\left[a_1,\dots, a_m\right]$$

(4) Dacă φ este de forma $\psi(x_1,\dots,x_n) \wedge \chi(x_1,\dots,x_m)$ şi $a_1,\dots,a_n \in A$, atunci:

$$\mathcal{A} \models (\psi \wedge \chi)\left[a_1,\dots,a_m\right] \iff \mathcal{A} \models \psi\left[a_1,\dots,a_m\right] \text{ şi } \mathcal{A} \models \chi\left[a_1,\dots,a_m\right]$$

(5) Dacă φ este de forma $(\exists x)\psi(x,x_1,\dots,x_m)$ şi $a_1,\dots,a_m \in A$, atunci:

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\psi\left[a_1,\dots,a_m\right] \iff \begin{cases} \text{există } b \in A, \text{ astfel încît} \\ \mathcal{A} \models \psi\left[a, a_1,\dots,a_m\right]. \end{cases}$$

<u>Exerciţii</u>

(1) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[a_1,\dots,a_n] \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n]$

(2) $$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[a_1,\dots,a_n] \iff \begin{cases} \text{dacă } \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \text{ atunci} \\ \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n] \end{cases}$$

(3) $$\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[a_1,\dots,a_n] \iff \begin{cases} \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \text{ dacă şi numai dacă} \\ \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n] \end{cases}$$

(4) $$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[a_1,\dots,a_n] \iff \begin{cases} \mathcal{A} \models \varphi[b,a_1,\dots,a_n], \\ \text{pentru orice } b \in B \end{cases}$$

Dacă avem un enunţ φ, atunci mulţimea variabilelor sale libere este vidă. In acest caz, conceptul definit mai sus:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$$

nu depinde de elementele $a_1,\dots,a_n \in A$, deci vom scrie simplu:

$$\mathcal{A} \models \varphi .$$

Spunem că un enunţ φ este <u>adevărat</u> sau <u>valid</u> în λ- structura $\mathcal{A}$, dacă $\mathcal{A} \models \varphi$. In acest caz, $\mathcal{A}$ se numeşte <u>model al lui</u> φ.

Dată o mulţime Σ de enunţuri, vom spune că $\mathcal{A}$ este model al lui Σ dacă $\mathcal{A} \models \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Sigma$. Notăm acest lucru: $\mathcal{A} \models \Sigma$

Un enunţ φ se numeşte <u>universal adevărat</u> dacă orice λ - structură este model al lui φ.

O λ- structură este <u>model</u> al unei formule $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ dacă

$$\mathcal{A} \models (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)$$

O formulă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ se numeşte <u>universal adevărată</u> dacă $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este un enunţ universal adevărat.

Dacă φ este o formulă universal adevărată, atunci vom nota aceasta prin $\models \varphi$.

<u>PROPOZITIA 1</u>. Dacă φ este o formulă oarecare a lui L_λ, atunci

$$\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$$

<u>Demonstraţie</u>: Prin inducţie asupra modului de obţinere al teoremelor lui L_λ. Tratăm întîi cazul axiomelor:

(A 1). Este suficient să arătăm că pentru orice λ- structură $\mathcal{A}$, avem

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi \rightarrow \varphi$$

Ţinînd seama de Exerciţiul 2, aceasta rezultă imediat. In concluzie, avem

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

(A 2). Presupunem că

(a) $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

şi vrem să arătăm că

(b) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

A demonstra (b) este echivalent cu a demonstra că

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \chi$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi,\ \mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \chi$$

Conform (a), din $\mathcal{A} \models \varphi$ rezultă $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \chi$. Din $\mathcal{A} \models \varphi$ şi $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi$ rezultă $\mathcal{A} \models \psi$. De asemenea, din $\mathcal{A} \models \psi$ şi $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \chi$ rezultă $\mathcal{A} \models \chi$

(A 3). Presupunem că

(c) $\mathcal{A} \models \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$

şi vom arăta că

(d) $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \varphi$

Pentru a stabili pe (d), presupunem că $\mathcal{A} \models \psi$, deci $\mathcal{A} \not\models \neg\psi$ atunci din (c) va rezulta că $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, deci $\mathcal{A} \models \varphi$

In mod analog se arată pentru axiomele A 4 - A 9.

(A 1o). Va trebui să arătăm că închiderea axiomei A 1o este validă în $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \models (\forall y)\left[(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(y)\right]$$

Fie $b \in A$. Vom arăta că

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \to \varphi[b]$$

ceea ce este totuna cu

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[b]$$

deoarece $\forall x\, \varphi(x)$ este un enunț.

Dar

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a] \text{, pentru orice } a \in A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[b]$$

(A 11). Presupunînd că

(e) $\mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$

şi că φ nu conține pe x ca variabilă liberă, vom arăta că

$$\mathcal{A} \models \varphi \to (\forall x)\psi$$

Pentru aceasta, fie $\mathcal{A} \models \varphi$ şi $a \in A$. Din (e) rezultă

$$\mathcal{A} \models [\varphi \to \psi]\,(a)$$

adică

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a]$$

deoarece φ nu conține pe x ca variabilă liberă.

Presupunînd că ψ a fost obținută prin modus ponens

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

şi că am arătat că $\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)$, va trebui să deducem că $\mathcal{A} \models \psi$. Aceasta rezultă din Exercițiul (2).

A rămas să mai tratăm cazul cînd $(\forall x)\varphi$ a fost obținută prin generalizare din φ.

Dacă $\varphi = \varphi(x, x_1,\dots,x_n)$, atunci presupunem că închiderea lui $\varphi(x, x_1,\dots,x_n)$ este validă în $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models (\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\forall x)\varphi(x, x_1,\dots,x_n)$$

Rezultă că închiderea lui $(\forall x)\varphi$, care este totuna cu închiderea lui φ, este validă în $\mathcal{A}$.

<u>Definiția 1</u>. O mulțime Σ de formule se numeşte <u>consistentă</u> sau <u>necontradictorie</u> dacă nu există nici o formulă $\varphi \in F$ astfel încît

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \text{şi} \quad \Sigma \vdash \neg\varphi.$$

<u>PROPOZIȚIA 2</u>. $\emptyset$ este consistentă.

<u>Demonstrație</u>: Presupunem prin absurd că există $\varphi \in F$ astfel încît $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \vdash \neg\varphi$, deci $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$. Conform Propoziției 1, avem $\models \varphi$ şi $\models \neg\varphi$, deci pentru orice λ structură $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi' \quad \text{şi} \quad \mathcal{A} \models \neg\varphi'$$

unde φ' este închiderea formulei φ. Contradicția este evidentă.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Propoziția 1 spune că orice teoremă a sistemului formal L_λ este un enunț universal adevărat. Reprezentăm aceasta simbolic astfel:

sintactic $\Longrightarrow$ semantic

Din Propoziția 2 s-a obținut direct faptul că o formulă a lui L_λ nu poate fi teoremă în acelaşi timp cu negația ei, ceea ce exprimă <u>non-contradicția</u> lui L_λ. De aceea, putem afirma că esența faptului că sistemul formal al calculului predicatelor este necontradictoriu constă în implicația: „sintactic $\Longrightarrow$ semantic".

Reciproca Propoziţiei 1, va fi <u>teorema de completitudine a lui Gödel</u>.

<u>Propoziţia 3.</u> Pentru orice formulă φ a lui L_λ, avem

$$\models \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie σ o formulă a lui L_λ pentru care $\not\vdash \sigma$. Vom arăta că există o λ- structură $\mathcal{A}$ astfel încît $\mathcal{A} \not\models \sigma'$, unde σ' este închiderea lui σ. Va rezulta că σ nu este universal adevărată ($\not\models \sigma$), deci demonstraţia va fi terminată cu aceasta.

Conform Lemei 6, § 1, avem $\not\vdash \sigma'$. In algebra Lindenbaum-Tarski $F/\sim$ acest lucru se exprimă prin $\widetilde{\sigma'} \neq 1$, deci $\widetilde{\neg\sigma'} = \neg\widetilde{\sigma'} \neq 0$

Conform Propoziţiei 2, § 2, pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L este valabilă relaţia

$$\text{(i)} \qquad \widetilde{(\forall x)\varphi(x)} = \bigwedge\left\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\right\}$$

Cum mulţimea formulelor lui L_λ este numărabilă, în (i) avem o mulţime numărabilă de infimumuri. Aplicînd teorema Rasiowa-Sikorski (vezi Capitolul 1, § 8) rezultă existenţa unui ultrafiltru Δ al lui $F/\equiv$ astfel încît $\widetilde{\neg\sigma'} \in \Delta$ şi pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L_λ să avem:

$$\text{(ii)} \quad \widetilde{(\forall x)\varphi(x)} \in \Delta \Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v)} \in V \text{, pentru orice } v \in V.$$

Definim pe V următoarea relaţie binară $\sim$:

$$x \approx y \Longleftrightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta$$

Conform axiomei A 12, avem $\vdash x = y$, deci $\widetilde{x = y} = 1 \in \Delta$. Rezultă $x \approx x$, deci $\approx$ este reflexivă.

Din exerciţiul (a), § 1 rezultă

$$\vdash x = y \longrightarrow y = x$$

$$\vdash x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z$$

De aici se obţine

$$\widetilde{(x = y)} \leqslant \widetilde{(y = x)}$$

$$\widetilde{(x = y)} \wedge \widetilde{(y = z)} \leqslant \widetilde{(x = z)}$$

Din aceste relaţii şi din proprietăţile filtrului avem:

$$x \approx y \Longrightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta \Longrightarrow \widetilde{(y = x)} \in \Delta \Longrightarrow y \approx x$$

$$x \approx y,\ y \approx z \Longrightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta\ ,\ \widetilde{(y = z)} \in \Delta$$

$$\Longrightarrow \widetilde{(x = y)} \wedge \widetilde{(y = z)} \in \Delta$$

$$\Longrightarrow \widetilde{(x = z)} \in \Delta$$

$$\Longrightarrow x \approx z$$

In concluzie, $\approx$ este o relaţie de echivalenţă pe V. Notăm cu $A = V/\approx$ şi cu $\hat{x}$ clasa de echivalenţă a lui $x \in V$.

Pentru orice $n \in N$, definim relaţia $\lambda(n)$ - ară R_n pe A prin

$$(*) \quad (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{\lambda(n)}) \in R_n \Longleftrightarrow \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Să arătăm că definiţia nu depinde de reprezentanţi, adică

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \approx y_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{\lambda(n)} \approx y_{\lambda(n)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})} \in \Delta \Longleftrightarrow \widetilde{P_n(y_1, \ldots, y_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Presupunem deci că

$$\widetilde{(x_i = y_i)} \in \Delta\ ,\ i = 1, \ldots, \lambda(n).$$

Din Exerciţiul (b), § 1 rezultă

$$\widetilde{(x_1 = y_1)} \wedge \ldots \wedge \widetilde{(x_{\lambda(n)} = y_{\lambda(n)})} \leqslant \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)}) \longrightarrow P_n(y_1, \ldots, y_{\lambda(n)})}$$

Conform proprietăţilor filtrului, rezultă

$$\widetilde{(x_1 = y_1)} \wedge \ldots \wedge \widetilde{(x_{\lambda(n)} = y_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Din această relaţie şi din inegalitatea de mai sus se obţine

$$\widetilde{P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})} \longrightarrow \widetilde{P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})} \quad .$$

Dacă $\widetilde{P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})}\in\Delta$, atunci din relaţia precedentă rezultă

$$\widetilde{P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})}\in\Delta .$$

În mod analog se arată că

$$P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})\in\Delta \Longrightarrow P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})\in\Delta .$$

Prin inducţie asupra modului de formare a formulelor lui L_λ, vom arăta că pentru fiecare formulă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ a lui L_λ ale cărei variabile libere se află printre $x_1,\ldots,x_n$, este valabilă relaţia:

$$(**)\quad \mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

pentru orice $v_1,\ldots,v_n\in V$.

Pentru formule atomice, relaţia (**) este chiar relaţia (*).

Dacă $\varphi = \neg\psi(x_1,\ldots,x_n)$ şi presupunem (**) adevărată pentru ψ, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \mathcal{A}\not\models\psi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi(v_1,\ldots,v_n)}\notin\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\neg\psi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

Dacă $\varphi = \psi_1\wedge\psi_2$ şi presupunem (**) adevărată pentru ψ_1 şi ψ_2, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \mathcal{A}\models\psi_1[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \text{ şi } \mathcal{A}\models\psi_2[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta \text{ şi } \widetilde{\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)}\wedge\widetilde{\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)\wedge\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta .$$

Din (ii) deducem, pentru orice formulă $\varphi(x)$:

$$\widetilde{(\exists x)\varphi(x)}\in\Delta \Longleftrightarrow \neg\widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)}\notin\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \text{există } v\in V, \text{ astfel încît } \widetilde{\neg\varphi(v)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \text{există } v\in V, \text{ astfel încît } \widetilde{\varphi(v)}\in\Delta$$

ţinînd cont de proprietăţile de ultrafiltru ale lui Δ.

Presupunem acum că $\varphi = (\exists x)\psi(x, x_1,\ldots,x_n)$ şi că (**) este adevărată pentru $\psi(x, x_1,\ldots,x_n)$. Atunci avem:

$$\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \text{există } \hat{v}\in A, \text{ astfel încît } \mathcal{A}\models\psi[\hat{v},\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]$$

$$\Longleftrightarrow \text{există } v\in V, \text{ astfel încît } \widetilde{\psi(v,v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\exists x\,\psi(x, v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta .$$

Cu aceasta, relaţia (**) a fost demonstrată.

Din (**) şi din faptul că $\widetilde{\neg\sigma'}\in\Delta$, rezultă $\mathcal{A}\models\neg\sigma'$ deci $\mathcal{A}\not\models\sigma'$. Am arătat deci că σ' nu este valid în $\mathcal{A}$, deci $\not\models\sigma$. Teorema a fost demonstrată.

Propoziţiile 1 şi 3 pot fi formulate împreună astfel:

<u>PROPOZIŢIA 4</u>. Pentru orice formulă φ a lui L_λ, avem

$$\vdash\varphi \Longleftrightarrow \models\varphi .$$

<u>OBSERVAŢIE</u>. Propoziţia 4 identifică teoremele lui L_λ cu enunţurile universal adevărate. Simbolic putem formula aceasta astfel:

sintactic $\Longleftrightarrow$ semantic.

EXERCIŢII LA CAPITOLUL IV

1. Să se demonstreze că următoarele formule sînt teoreme ale lui L_λ :

(a) $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$

(b) $(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$

(c) $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \longrightarrow (\forall x)\varphi(x,x)$

(d) $(\exists x)\varphi(x,x) \longrightarrow (\exists x)(\exists y)\varphi(x,y)$

(e) $\neg(\forall x)\varphi(x) \longleftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$

(f) $\neg(\exists x)\varphi(x) \longleftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$

(g) $(\forall x)(\varphi(x)\wedge\Psi(x)) \longleftrightarrow ((\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\Psi(x))$

(h) $(\exists x)(\varphi(x)\vee\Psi(x)) \longleftrightarrow ((\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\varphi(x))$

(i) $(\forall x)(\varphi\wedge\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\wedge(\forall x)\Psi(x)$, dacă φ nu conţine pe x ca variabilă liberă.

(j) $(\exists x)(\varphi\vee\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\vee(\exists x)\Psi(x)$, dacă φ nu conţine pe x ca variabilă liberă.

(l) $(\forall x)(\varphi\vee\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\vee(\forall x)\Psi(x)$, dacă φ nu conţine pe x ca variabilă liberă.

(m) $(\exists x)(\varphi\wedge\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\wedge(\exists x)\Psi(x)$, dacă φ nu conţine pe x ca variabilă liberă.

(n) $(\exists x)(\varphi(x)\wedge\Psi(x)) \longrightarrow ((\exists x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\Psi(x))$

(o) $((\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\Psi(x)) \longrightarrow (\forall x)(\varphi(x)\vee\Psi(x))$

(p) $(\forall x)(\varphi\longrightarrow\Psi(x)) \longleftrightarrow (\varphi\longrightarrow(\forall x)\Psi(x))$, dacă x nu este variabilă liberă a lui φ.

(q) $(\forall x)(\varphi(x)\longrightarrow\Psi) \longleftrightarrow ((\exists x)\varphi(x)\longrightarrow\Psi)$, dacă x nu este variabilă liberă a lui Ψ.

(r) $(\exists x)(\varphi(x)\longrightarrow\Psi) \longleftrightarrow ((\forall x)\varphi(x)\longrightarrow\Psi)$, dacă x nu este variabilă liberă a lui Ψ.

(s) $(\exists x)(\varphi\longrightarrow\Psi(x)) \longleftrightarrow (\varphi\longrightarrow(\exists x)\Psi(x))$, dacă x nu este variabilă liberă a lui φ.

(t) $(\exists x)(\varphi(x)\longrightarrow\Psi(x)) \longleftrightarrow ((\forall x)\varphi(x)\longrightarrow(\exists x)\Psi(x))$

2. Să se arate că dacă $\Sigma\vdash(\varphi\longleftrightarrow\Psi)$, atunci:

(a) $\Sigma\vdash(\neg\varphi\longleftrightarrow\neg\Psi)$

(b) $\Sigma\vdash(\varphi\wedge\chi\longleftrightarrow\Psi\wedge\chi)$

(c) $\Sigma\vdash(\varphi\vee\chi\longleftrightarrow\Psi\vee\chi)$

(d) $\Sigma\vdash((\varphi\longrightarrow\chi)\longleftrightarrow(\Psi\longrightarrow\chi))$

(e) $\Sigma\vdash((\chi\longrightarrow\varphi)\longleftrightarrow(\chi\longrightarrow\Psi))$

3. Să se arate că dacă $\Sigma\vdash(\varphi(x)\longleftrightarrow\Psi(x))$, atunci

$$\Sigma\vdash((\forall x)\varphi(x)\longleftrightarrow(\forall x)\Psi(x))$$

$$\Sigma\vdash((\exists x)\varphi(x)\longleftrightarrow(\exists x)\Psi(x))$$

4. Nu există nici o formulă φ a lui L_λ astfel încît să avem

$$\Sigma\vdash\varphi \text{ şi } \Sigma\vdash\neg\varphi$$

5. Notăm cu $T(\Sigma)$ mulţimea formulelor deduse din ipotezele Σ

$$T(\Sigma)=\{\varphi\in F \mid \Sigma\vdash\varphi\}$$

Să se arate că

$$\Sigma\cup T\subset T(\Sigma)$$

$T(\Sigma)$ este închisă la modus ponens

$$\Sigma\subset T \Rightarrow T(\Sigma)=T$$

$$\Sigma\subset\Sigma' \Rightarrow T(\Sigma)\subset T(\Sigma')$$

$$T(T(\Sigma))=T(\Sigma)$$

6. $\Sigma\vdash\varphi$ dacă şi numai dacă există $\Gamma\subset\Sigma$ finită astfel încît $\Gamma\vdash\varphi$.

7. Dacă $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, ceea ce se scrie simbolic

$$\frac{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Sigma, \varphi \vdash \psi}$$

8. $$\frac{\Sigma, \varphi \vdash \psi}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)}$$

<u>Notă</u>: Exercițiul 8 reprezintă <u>teorema de deducție</u> pentru L_λ.

9. Pentru orice mulțime de formule sînt echivalente afirmațiile:

(i) $\Sigma \vdash \varphi$

(ii) Există un număr finit de formule $\psi_1, \dots, \psi_n$ ale lui Σ, astfel încît:

$$\psi_1 \to (\psi_2 \to (\dots(\psi_n \to \varphi))\dots) \in T.$$

10. $$\frac{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi), \Sigma \vdash (\psi \to \chi)}{\Sigma \vdash (\varphi \to \chi)}$$

11. $$\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$$

12. $$\frac{\Sigma \vdash \neg\varphi}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)}$$

13. $$\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \neg\neg\varphi$$

14. O mulțime Δ de formule se numește <u>sistem deductiv</u> dacă

a) $T \subset \Delta$;

b) $\Delta \neq F$;

c) Δ este închisă la modus ponens:

$$\varphi \in \Delta, (\varphi \to \psi) \in \Delta \Longrightarrow \psi \in \Delta$$

Să se arate că $T(\Sigma) = \Sigma$, pentru orice sistem deductiv Σ.

15. Orice intersecție de sisteme deductive este un sistem deductiv.

16. Mulțimea sistemelor deductive ordonate de incluziune este inductivă.

17. Orice sistem deductiv este inclus într-un sistem deductiv maximal.

18. Pentru orice sistem deductiv Σ, sînt echivalente afirmațiile:

(i) Σ este maximal.

(ii) Pentru orice $\varphi \in F$, $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \neg\varphi$

19. Orice sistem deductiv Σ este intersecția tuturor sistemelor deductive maximale ce includ pe Σ.

20. Dacă Σ este un sistem deductiv maximal, atunci:

$$\varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$$

$$\neg\varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Sigma$$

$$\varphi \vee \psi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma \text{ sau } \psi \in \Sigma$$

$$\varphi \wedge \psi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma \text{ și } \psi \in \Sigma$$

$$(\varphi \to \psi) \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Sigma \text{ sau } \psi \in \Sigma$$

21. Fie $F/\sim$ algebra Lindenbaum-Tarski a lui L_λ. Pentru orice $\Sigma \subset F$ sînt echivalente afirmațiile:

a) Σ este sistem deductiv.

b) $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\varphi} \mid \varphi \in \Sigma\}$ este un filtru propriu al lui $F/\sim$.

22. În condițiile exercițiului precedent sînt echivalente afirmațiile:

a) Σ este un sistem deductiv maximal.

b) Σ este un ultrafiltru al lui $F/\sim$.

23. Să se descrie funcţia λ şi sistemul formal al calculului predicatelor corespunzător următoarelor clase de structuri:

a) mulţimi parţial ordonate ;

b) mulţimi total ordonate ;

c) latici distributive ;

d) algebre Boole ;

e) grupuri ;

f) inele ;

g) corpuri.

Cum se scriu axiomele structurilor respective în sistemele formale respective?

CAPITOLUL 5

Algebre Lukasiewicz şi logici cu mai multe valori

Logicile cu mai multe valori (polivalente) au fost introduse şi studiate de logicianul polonez J. Lukasiewicz în urma unor cercetări legate de studiul modalităţilor. Legate de aceste logici, Gr. C. Moisil a studiat începînd din 1940 o clasă de structuri algebrice (numite algebre Lukasiewicz în onoarea logicianului polonez) care sînt reflectarea pe plan algebric a logicilor lui Lukasiewicz. Astăzi teoria algebrelor Lukasiewicz este destul de bogată, atît prin rezultatele lui Moisil şi ale elevilor săi, cît şi prin contribuţia a numeroşi cercetători străini. In primul paragraf prezentăm sumar ideile care l-au condus pe Lukasiewicz în considerarea logicilor cu mai multe valori. Paragraful 2 prezintă o serie de rezultate privind algebrele Lukasiewicz, cel mai important fiind teorema de reprezentare a lui Moisil. In sfîrşit, ultimul paragraf conţine cîteva elemente incipiente ale logicii trivalente neformalizate, făcîndu-se legătura cu algebrele Lukasiewicz trivalente.

§ 1. <u>IDEI CARE AU CONDUS LA APARITIA LOGICILOR CU MAI MULTE VALORI</u>

Logica trivalentă a apărut ca urmare a studierii propoziţiilor de forma „este posibil ca..." sau „este necesar ca...". Pentru fixarea ideilor, să considerăm o propoziţie oarecare p. Vom nota cu Mp[1] propoziţia „<u>p este posibil</u>".

---

1) Simbolul M derivă de la „möglich" (posibil).