

Dacă  $P(x,y)$  este un predicat binar, atunci în  $A$  sînt adevărate enunțurile:

- (b)  $(\forall x)(\forall y) P(x,y) \iff (\forall y)(\forall x) P(x,y)$
- (i)  $(\exists x)(\exists y) P(x,y) \iff (\exists y)(\exists x) P(x,y)$
- (j)  $(\exists x)(\forall y) P(x,y) \iff (\forall y)(\exists x) P(x,y)$

#### § 4. RELATII SI FUNCTII

Fie  $A$  o mulțime. O relație n-ară pe  $A$  este o submulțime  $R$  a lui  $A^n$ .

Definiția 1. Fie  $A, B$  două mulțimi oarecare. O funcție definită pe  $A$  cu valori în  $B$  este o relație unară pe  $A \times B$  (adică  $\Gamma \subset A \times B$ ) cu proprietatea că pentru orice  $x \in A$  există un element  $y \in B$  și numai unul, astfel încît  $(x,y) \in \Gamma$ .

Vom nota o funcție  $\Gamma \subset A \times B$  prin  $f: A \rightarrow B$ , simbolul  $f$  avînd semnificația următoare: fiecărui element  $x \in A$  îi corespunde un singur element  $f(x) \in B$  astfel încît  $(x, f(x)) \in \Gamma$ .

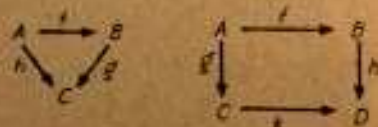
$A$  se numește domeniul de definiție al funcției  $f: A \rightarrow B$  și  $B$  se numește domeniul valorilor lui  $f$ .

Date funcțiile  $f: A \rightarrow B$  și  $g: B \rightarrow C$ , prin compunerea lor se înțelege funcția  $g \circ f: A \rightarrow C$ , definită de  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , pentru orice  $x \in A$ .

Compunerea funcțiilor este asociativă: pentru funcțiile  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  $h: C \rightarrow D$ , avem relația  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

Pentru orice mulțime  $A$ , funcția identică  $1_A: A \rightarrow A$  este definită de  $1_A(x) = x$ , pentru orice  $x \in A$ .

Vom spune, că diagramele următoare



sînt comutative, dacă  $g \circ f = h$ , respectiv  $h \circ f = k \circ g$ .

În general, o configurație compusă din diagrame de tipul de mai sus este o diagramă comutativă, dacă diagramele componente sînt comutative.

Funcția  $f: A \rightarrow B$  este injectivă dacă pentru orice  $x, y \in A$ , avem:

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Evident, această relație este echivalentă cu

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Funcția  $f: A \rightarrow B$  este surjectivă dacă pentru orice  $y \in B$ , există  $x \in A$ , astfel încît  $f(x) = y$ .

O funcție injectivă și surjectivă se numește bijectivă. Pentru aceste trei categorii de funcții se folosesc și denumirile: injecție, surjecție și bijecție.

O funcție  $f: A \rightarrow B$  este inversabilă, dacă există o funcție  $g: B \rightarrow A$  cu proprietățile  $g \circ f = 1_A$  și  $f \circ g = 1_B$ .

Exercițiu. Dacă  $f: A \rightarrow B$  este inversabilă, să se arate că există o singură funcție  $g: B \rightarrow A$  cu proprietățile  $g \circ f = 1_A$  și  $f \circ g = 1_B$ .

Funcția  $g: B \rightarrow A$  cu aceste proprietăți se numește inversa lui  $f$  și se notează  $f^{-1}$ . Deci avem relațiile

$$f^{-1} \circ f = 1_A, \quad f \circ f^{-1} = 1_B.$$

PROPOZIȚIA 1. Pentru o funcție  $f: A \rightarrow B$ , sînt echivalente afirmațiile următoare:

- (i)  $f$  este bijectivă.
- (ii)  $f$  este inversabilă.

Demonstrație (i)  $\implies$  (ii). Presupunem că  $f$  este bijectivă. Fie  $y \in B$ . Cum  $f$  este surjectivă, există  $x \in A$ , astfel încît  $f(x) = y$ .



$f$  fiind injectivă, acest element este unic, deci putem defini o funcție  $g: B \rightarrow A$  prin  $g(y) = x$ . Rezultă imediat că această funcție este inversa lui  $f$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Este un simplu exercițiu pentru cititor.

Fie  $f: A \rightarrow B$  o funcție oarecare. Dacă  $X \subset A$  și  $Y \subset B$ , atunci notăm:

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$  : imaginea directă a lui  $X$  prin  $f$ .

$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$  : imaginea reciprocă a lui  $Y$  prin  $f$ .

**PROPOZIȚIA 2.** Fie  $f: A \rightarrow B$  o funcție oarecare și  $X_1, X_2 \subset A$ ,  $Y_1, Y_2 \subset B$ . Atunci avem următoarele relații:

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$

$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$$

$$f(X_1) - f(X_2) \subset f(X_1 - X_2)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$$

$$f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$$

Fie  $I$  o mulțime nevidă. Dacă fiecărui  $i \in I$  îi este asociată o mulțime  $A_i$  spunem că avem o familie de mulțimi  $(A_i)_{i \in I}$  indexată de mulțimea  $I$ .

Reuniunea și intersecția familiei  $(A_i)_{i \in I}$  sînt definite astfel

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{există } i \in I, \text{ astfel încît } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ pentru orice } i \in I\}$$

**PROPOZIȚIA 3.** Pentru orice familie  $(A_i)_{i \in I}$  de mulțimi și pentru orice mulțime  $B$ , avem relațiile următoare:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B); \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B);$$

**PROPOZIȚIA 4.** Dacă  $(A_i)_{i \in I}$  este o familie de părți ale unei mulțimi  $X$ , atunci

$$C_X \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} C_X(A_i); \quad C_X \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} C_X(A_i)$$

Demonstrația acestor două propoziții este simplă. Spre exemplificare, să demonstrăm a doua relație a Propoziției 4:

$$\begin{aligned} x \in C_X \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) &\Leftrightarrow \neg(x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall i \in I) [x \in A_i] \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I) [\neg(x \in A_i)] \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I) [x \in C_X(A_i)] \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} C_X(A_i). \end{aligned}$$

folosind relația (a), § 5.

Fie acum  $R$  o relație binară pe mulțimea  $A$  ( $R \subset A^2$ ).  $R$  se numește relație de echivalență pe  $A$  dacă pentru orice  $x, y, z \in A$  sînt satisfăcute proprietățile:

$$(x, x) \in R \quad (\text{reflexivitate})$$

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \quad (\text{simetrie})$$

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \quad (\text{transitivitate})$$

Vom folosi următoarea notație:  $x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in R$ . Proprietățile de mai sus se transcriu astfel

$$x \sim x$$

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x$$

$$x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z.$$

Pentru orice  $x \in A$ , vom nota  $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ .  $\hat{x}$  se numește clasa de echivalență a lui  $x$ . Sînt imediate proprietățile



$$x \sim y \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

$$x \sim y \Rightarrow \hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$$

O familie  $(A_i)_{i \in I}$  de submulțimi ale lui  $A$  se numește partiție dacă:

$$i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset;$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

Orice partiție  $(A_i)_{i \in I}$  definește o relație de echivalență pe  $A$ :

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{există } i \in I, \text{ astfel încât } x, y \in A_i.$$

Reciproc, orice relație de echivalență  $\sim$  pe  $A$  pune în evidență o partiție, dată de mulțimea claselor de echivalență.

Se poate arăta că această corespondență este bijectivă.

Dată relația de echivalență  $\sim$  pe  $A$ , mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui  $A$  se numește mulțimea cînt a lui  $A$  prin  $\sim$  și se notează prin  $A/\sim$ .

Funcția  $p: A \rightarrow A/\sim$  definită de  $p(x) = \hat{x}$ , pentru orice  $x \in A$ , este surjectivă.

## § 5. PRODUS CARTEZIAN AL UNEI FAMILII DE MULTIMI

Fie  $(A_i)_{i \in I}$  o familie de mulțimi indexată de mulțimea  $I$ . Prin produsul cartezian al familiei  $(A_i)_{i \in I}$  înțelegem mulțimea următoare

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i, \text{ pentru orice } i \in I \right\}.$$

În general, printr-o familie  $(x_i)_{i \in I}$  de elemente ale unei mulțimi  $X$  se înțelege că fiecărui  $i \in I$  îi este asociat un singur element  $x_i$  al lui  $X$ .  $I$  se numește mulțimea de indici a familiei  $(x_i)_{i \in I}$ .

Orice funcție  $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  este perfect determinată de familia  $(f(i))_{i \in I}$ , deci definiția produsului cartezian  $\prod_{i \in I} A_i$  mai poate fi dată astfel:

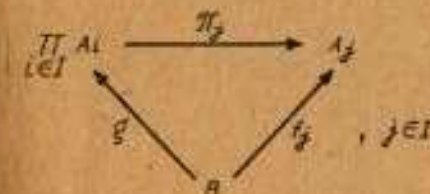
$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i, \text{ pentru orice } i \in I \right\}.$$

Pentru orice  $j \in I$ , aplicația  $\pi_j: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$  definită de

$$\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$$

este surjectivă.  $\{\pi_j \mid j \in I\}$  se numesc proiecțiile canonice ale lui  $\prod_{i \in I} A_i$ .

PROPOZIȚIA 1. Considerăm produsul cartezian  $\prod_{i \in I} A_i$  și proiecțiile canonice  $\pi_j, j \in I$ . Atunci pentru orice mulțime  $B$  și pentru orice familie de aplicații  $\{f_j: B \rightarrow A_j \mid j \in I\}$ , există o



funcție  $g: B \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$  și una singură, astfel încât diagramele următoare sînt comutative.

Cu alte cuvinte, pentru orice  $j \in I$ , avem  $\pi_j \circ g = f_j$ .

Demonstrație. (Existență). Pentru orice  $x \in B$ , vom pune prin definiție

$$g(x) = (f_i(x))_{i \in I}.$$

Pentru orice  $i \in I$ , avem  $f_i(x) \in A_i$ , deci  $(f_i(x))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ . Dacă  $j \in I$  și  $x \in B$ , atunci

$$\pi_j(g(x)) = \pi_j((f_i(x))_{i \in I}) = f_j(x),$$

ceea ce arată că  $\pi_j \circ g = f_j$ , pentru orice  $j \in I$ .



(Unicitate) fie  $h: B \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$  astfel încît  $\pi_j \circ h = f_j$  pentru orice  $j \in I$ . Vom arăta că  $h$  coincide cu  $g$ . Pentru orice  $x \in B$ , vom avea  $h(x) = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ , deci

$$f_j(x) = \pi_j(h(x)) = \pi_j((y_i)_{i \in I}) = y_j, \text{ pentru orice } j \in I.$$

De aici rezultă

$$g(x) = (f_i(x))_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} = h(x),$$

deci  $g = h$ . Propoziția a fost demonstrată.

**Corolar.** Fie două familii de mulțimi  $(A_i)_{i \in I}$ ,  $(B_i)_{i \in I}$  și o familie de funcții  $(f_i: A_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$ . Atunci există o aplicație

$$g: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$$

și una singură astfel încît sînt comutative următoarele diagrame.

$$\begin{array}{ccc} \prod A_i & \xrightarrow{g} & \prod B_i \\ \pi_j \downarrow & & \downarrow \pi_j \\ A_j & \xrightarrow{f_j} & B_j \end{array}$$

$\pi_j, \pi_j'$  fiind proiecțiile canonice.

## § 6. MULȚIMI ECHIPOTENTE. CARDINALI

Pentru orice mulțime finită, numărul său de elemente este o noțiune bine precizată. Numărul natural  $n$  este reprezentarea abstractă a tuturor mulțimilor „cu  $n$  elemente”. Conceptul de număr natural permite compararea mulțimilor finite.

Este evident că a spune că două mulțimi finite au același număr de elemente este echivalent cu faptul că ele se pot pune în

correspondență bijectivă.

Această observație sugerează introducerea unui concept care să reprezinte „numărul de elemente ale unei mulțimi oarecare”.

Vom spune că două mulțimi  $A$  și  $B$  sînt echipotente sau că au aceeași putere dacă există o bijecție  $f: A \rightarrow B$ . Se scrie acest lucru simbolic:  $A \sim B$ .

**PROPOZIȚIA 1.** Echipotența este o relație reflexivă, simetrică și transitivă.

**Demonstrație.** Aplicația identică  $1_A: A \rightarrow A$  este bijectivă, deci  $A \sim A$ . Dacă  $A \sim B$ , atunci există o bijecție  $f: A \rightarrow B$ . Inversa  $f^{-1}: B \rightarrow A$  este bijectivă, deci  $B \sim A$ . Presupunind că  $A \sim B$  și  $B \sim C$ , rezultă bijecțiile  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . Funcția compusă  $g \circ f: A \rightarrow C$  este bijectivă, deci  $A \sim C$ .

**OBSERVAȚIE.** Echipotența este o „relație de echivalență” definită pe clasa tuturor mulțimilor.

Pentru orice mulțime  $A$ , vom nota cu  $\bar{A}$  sau  $\text{card } A$  clasa de echivalență a mulțimilor echipotente cu  $A$ :

$$\text{card } A = \bar{A} = \{B \mid \text{există } f: A \rightarrow B \text{ bijectivă}\}.$$

Vom spune că  $\bar{A}$  este cardinalul mulțimii  $A$ .

**OBSERVAȚIE.** În cazul cînd  $A$  este o mulțime finită,  $\bar{A}$  poate fi asimilat cu numărul  $n$  al elementelor lui  $A$ , în sensul că  $n$  reprezintă toate mulțimile din  $\bar{A}$ , identificate din punctul de vedere al „numărului lor de elemente”.

**Mulțimi numărabile.** O mulțime  $A$  este numărabilă dacă este echipotentă cu mulțimea  $\mathbb{N}$  a numerelor naturale. Vom nota cardinalul lui  $\mathbb{N}$  cu  $\aleph_0$  (aleph zero).

Cu alte cuvinte, o mulțime este numărabilă dacă elementele sale se pot așeza sub forma unui șir.



Este evident că mulțimea  $Z$  a numerelor întregi este numărabilă.

**PROPOZIȚIA 2.** Orice reuniune numărabilă de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

**Demonstrație.** Fie  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  o familie numărabilă de mulțimi numărabile.

Dacă  $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}, \dots\}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , atunci vom scrie elementele reuniunii  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  sub forma unui tablou:

$n=1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\dots$	$a_{1m}$	$\dots$
$n=2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$\dots$	$a_{2m}$	$\dots$
$n=3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$\dots$	$a_{3m}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n=n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	$a_{n3}$	$\dots$	$a_{nm}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Elementele acestui tablou pot fi puse sub forma unui șir conform ordinii indicată prin săgeți:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots$$

**Corolar 1:** Orice reuniune finită de mulțimi numărabile este numărabilă.

**Corolar 2:** Produsul cartezian a două mulțimi numărabile  $A, B$  este o mulțime numărabilă.

**Demonstrație:**  $A \times B = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times B)$ .

**Corolar 3:** Produsul cartezian a  $n$  mulțimi numărabile  $A_1, \dots, A_n$  este o mulțime numărabilă.

**Demonstrație:** Prin inducție, aplicând corolarul 2.

**Corolar 4:** Mulțimea  $Q$  a numerelor raționale este numărabilă.

**Demonstrație:** Dacă  $A_n = \left\{ \frac{n}{m} : m \in \mathbb{N} \right\}$ , pentru orice  $n = 1, 2, \dots$ , atunci

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

**Corolar 5.** Mulțimea șirurilor finite ai căror termeni aparțin unei mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

**Demonstrație:** Fie  $A$  o mulțime numărabilă și  $A_n$  mulțimea șirurilor cu  $n$  elemente din  $A$ . Atunci mulțimea menționată în corolarul 5 este  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

**Corolar 6.** Mulțimea  $Q[X]$  a polinoamelor cu coeficienți raționali este numărabilă.

**Demonstrație.** Orice polinom  $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  este definit de șirul finit  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , deci mulțimea polinoamelor cu coeficienți în  $Q$  poate fi pusă în corespondență bijectivă cu mulțimea șirurilor finite de numere raționale.

**Corolar 7.** Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

**Demonstrație.** Reamintim că un număr algebric este o rădăcină a unui polinom din  $Q[X]$ . Conform corolarului 6,  $Q[X]$  este o mulțime numărabilă:

$$Q[X] = \{P_1(X), P_2(X), \dots, P_n(X), \dots\}.$$

Pentru orice  $n = 1, 2, \dots$ , mulțimea  $A_n$  a rădăcinilor lui  $P_n(X)$  este finită. Observind că mulțimea numerelor algebrice este  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , demonstrația este încheiată.

**Propoziția 3.** Mulțimea  $(0,1)$  nu este numărabilă.

**Demonstrație.** Presupunem că intervalul  $(0,1)$  este numărabil, deci putem aranja elementele sale într-un șir:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \dots \\ a_2 &= 0, a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \dots \\ &\vdots \\ a_n &= 0, a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$



Notind

$$e_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a_{nn} \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } a_{nn} = 0, \end{cases}$$

se obține un număr  $0, e_1 e_2, \dots, e_n, \dots$  din intervalul  $(0,1)$  care este diferit de toți termenii șirului considerat. Contradicția este evidentă.

Corolar 1. Mulțimea  $\mathbb{R}$  a numerelor reale este nenumărabilă.

OBSERVAȚIE. Din faptul că  $\mathbb{R}$  este nenumărabilă, iar mulțimea numerelor algebrice este numărabilă, rezultă existența numerelor transcendente (numere reale care nu sînt algebrice).

#### Operații cu cardinali

Fie  $A, B$  două mulțimi oarecare. Atunci putem găsi două mulțimi  $A_1, B_1$  astfel încît  $A \sim A_1, B \sim B_1$  și  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ . Într-adevăr, luînd două elemente  $a \neq b$  și punînd  $A_1 = \{a\} \times A, B_1 = \{b\} \times B$ , vom avea:

$A \sim A_1$ : prin funcția bijectivă  $f: A \rightarrow A_1$  dată de  $f(x) = (a, x)$ , pentru orice  $x \in A$ ;

$B \sim B_1$ : prin funcția bijectivă  $g: B \rightarrow B_1$  dată de  $g(y) = (b, y)$ , pentru orice  $y \in B$ ;

$$A_1 \cap B_1 = \emptyset.$$

Prin definiție, suma cardinalilor  $\bar{A}, \bar{B}$  este

$$\bar{A} + \bar{B} = \overline{A_1 \cup B_1}$$

Este necesar să arătăm că această definiție nu depinde de reprezentanți, adică:

$$\left. \begin{aligned} A \sim A_1, B \sim B_1, A_1 \cap B_1 = \emptyset \\ A \sim A_2, B \sim B_2, A_2 \cap B_2 = \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2.$$

Conform ipotezei din aținga implicației, există bijecțiile:

$$f_1: A \rightarrow A_1, g_1: B \rightarrow B_1;$$

$$f_2: A \rightarrow A_2, g_2: B \rightarrow B_2.$$

Notind  $f = f_2 \circ f_1^{-1}: A_1 \rightarrow A_2, g = g_2 \circ g_1^{-1}: B_1 \rightarrow B_2$ , rezultă că  $f, g$  sînt bijective. Considerînd funcția  $h: A_1 \cup B_1 \rightarrow A_2 \cup B_2$  definită astfel

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A_1 \\ g(x), & \text{dacă } x \in B_1, \end{cases}$$

și ținînd seama  $A_1 \cap B_1 = \emptyset, A_2 \cap B_2 = \emptyset$ , se poate arăta ușor că  $h$  este o bijectivă. Rezultă  $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$ .

Pentru orice două mulțimi  $A, B$ , definim produsul cardinalilor  $\bar{A}, \bar{B}$  prin

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{A \times B}$$

Se poate arăta (exercițiu) că definiția nu depinde de alegerea reprezentanților  $A, B$  și claselor  $\bar{A}, \bar{B}$ , adică

$$A \sim A', B \sim B' \Rightarrow A \times B \sim A' \times B'.$$

Tot pe seama cititorului lășăm să arate și faptul că în cazul mulțimilor finite, cele două definiții corespund adunării și înmulțirii a două numere naturale.

Aceste definiții se generalizează pentru o familie oarecare de mulțimi  $(A_i)_{i \in I}$ .

Se poate găsi la fel ca mai sus, o familie  $(A'_i)_{i \in I}$  de mulțimi cu proprietățile:

$$A_i \sim A'_i, \text{ pentru orice } i \in I.$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ pentru orice } i, j \in I, i \neq j.$$

Atunci suma cardinalilor  $(\bar{A}_i)_{i \in I}$  este

$$\sum_{i \in I} \bar{A}_i = \overline{\bigcup_{i \in I} A'_i}.$$



Produsul familiei  $(\bar{A}_i)_{i \in I}$  de cardinali va fi:

$$\prod_{i \in I} \bar{A}_i = \overline{\prod_{i \in I} A_i}$$

Fie acum  $A, B$  două mulțimi oarecare. Dacă notăm  $A^B$  mulțimea funcțiilor  $f: B \rightarrow A$ , atunci cardinalul  $\bar{A}^{\bar{B}}$  este, prin definiție,  $\overline{A^B}$ .

Menționăm următoarele proprietăți ale operațiilor cu cardinali:

- (1)  $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$ ;  $(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C})$
- (2)  $\bar{A} + \bar{A} = \bar{A}$ ;  $\bar{A} \cdot \bar{A} = \bar{A}$ ;  $\bar{A} + n = \bar{A}$ ,  $\bar{A} \cdot n = \bar{A}$ ,

unde  $n$  este un număr natural oarecare.

- (3)  $\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C}$
- (4)  $\bar{A} \cdot n = \underbrace{\bar{A} + \dots + \bar{A}}_{\text{de } n\text{-ori}}$ ,

unde  $n$  este un număr de natural oarecare.

- (5)  $\bar{A}^{\bar{B} + \bar{C}} = \bar{A}^{\bar{B}} \cdot \bar{A}^{\bar{C}}$
- (6)  $(\bar{A} \cdot \bar{B})^{\bar{C}} = \bar{A}^{\bar{C}} \cdot \bar{B}^{\bar{C}}$
- (7)  $(\bar{A}^{\bar{B}})^{\bar{C}} = \bar{A}^{\bar{B} \cdot \bar{C}}$
- (8)  $\bar{A}^n = \bar{A} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}}_{\text{de } n\text{-ori}}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

Demonstrarea acestor relații este un exercițiu util pentru cititor.

**PROPOZIȚIA 4.** Pentru orice mulțime  $A$ ,  $\overline{\mathcal{P}(A)} = 2^{\bar{A}}$ .

**Demonstrație.** Considerind o mulțime oarecare cu două elemente, fie ea  $\{0, 1\}$ , va trebui să arătăm că  $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A$ .

Pentru orice  $B \subset A$ , definim funcția sa caracteristică  $\chi_B$ :  $A \rightarrow \{0, 1\}$  prin

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in B \\ 0, & \text{dacă } x \notin B. \end{cases}$$

Considerăm funcția  $\Phi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$  dată de

$$\Phi(B) = \chi_B, \text{ pentru orice } B \in \mathcal{P}(A).$$

Definim, acum o altă funcție  $\Psi: \{0, 1\}^A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  prin

$$\Psi(f) = f^{-1}(\{1\}) = \{x \in A \mid f(x) = 1\},$$

pentru orice  $f \in \{0, 1\}^A$ .

Se poate arăta că

$$\Psi \circ \Phi = 1_{\mathcal{P}(A)}; \Phi \circ \Psi = 1_{\{0, 1\}^A}.$$

deci  $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A$ .

**PROPOZIȚIA 5.** (Cantor). Pentru orice mulțime  $A$ , avem  $\bar{A} \neq 2^{\bar{A}}$ .

**Demonstrație:** Vom arăta că orice funcție  $F: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  nu este surjectivă, de unde va rezulta că  $\bar{A} \neq \overline{\mathcal{P}(A)}$ . Presupunem că  $F$  este surjectivă.

Fie submulțimea lui  $A$  definită astfel

$$Z = \{x \in A \mid x \notin F(x)\}.$$

Cum am presupus că  $F$  este surjectivă, va exista  $x_0 \in A$ , astfel încât  $F(x_0) = Z$ . Din definiția lui  $Z$  rezultă echivalența

$$x \in Z \iff x \notin F(x),$$

deci

$$x \in F(x_0) \iff x \notin F(x).$$

Pentru  $x = x_0$ , obținem contradicția

$$x_0 \in F(x_0) \iff x_0 \notin F(x_0).$$



Cu aceasta, demonstrația s-a terminat.

Pentru orice doi cardinali  $\bar{A}$  și  $\bar{B}$ , vom spune că  $\bar{A} \leq \bar{B}$  dacă există o injecție  $f: A \rightarrow B$ .

Definiția nu depinde de reprezentanți: dacă  $A \sim A'$ ,  $B \sim B'$  și  $f: A \rightarrow B$  este o injecție, atunci putem defini o injecție  $g: A' \rightarrow B'$ .

Cum  $A \sim A'$ ,  $B \sim B'$  există bijecțiile  $h_1: A \rightarrow A'$ ,  $h_2: B \rightarrow B'$ . Definim pe  $g$  prin

$$g = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$$

Dacă  $\bar{A} \leq \bar{B}$  și  $\bar{A} \neq \bar{B}$ , atunci vom scrie  $\bar{A} < \bar{B}$ .

Pentru  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  finiți, relația  $\bar{A} \leq \bar{B}$  revine la relația obişnuită de ordine între două numere naturale.

Relația  $\leq$  are proprietățile următoare

$$(9) \quad A \subset B \Rightarrow \bar{A} \leq \bar{B};$$

$$(10) \quad \bar{A} \leq \bar{A};$$

$$(11) \quad \bar{A} \leq \bar{B}, \bar{B} \leq \bar{C} \Rightarrow \bar{A} \leq \bar{C};$$

$$(12) \quad \bar{A} \leq \bar{B} \Rightarrow \bar{A} + \bar{C} \leq \bar{B} + \bar{C} \text{ și } \bar{A} \cdot \bar{C} \leq \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$(13) \quad \bar{A} \leq \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \cdot \bar{C} \leq \bar{B} \cdot \bar{C} \text{ și } \bar{C} \cdot \bar{A} \leq \bar{C} \cdot \bar{B}$$

#### OBSERVAȚIE

(1) Din Corolarul Propoziției 3, rezultă  $\aleph_0 = \bar{\mathbb{N}} < \bar{\mathbb{R}}$ .

(11) Teorema lui Cantor (Propoziția 5) se poate formula astfel:

$$\bar{A} < 2^{\bar{A}}, \text{ pentru orice mulțime } A.$$

Teorema Cantor - Bernstein :  $\bar{A} \leq \bar{B}$ ,  $\bar{B} \leq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}$ .

Pentru demonstrație, se poate consulta K. Kuratowski, Introducere în teoria mulțimilor și în topologie, Ed. Tehnică, 1969, pag. 79-80.

#### § 7. RELATII DE ORDINE

O relație binară  $R$  pe o mulțime nevidă  $A$  se numește relație de preordine dacă pentru orice  $x, y, z \in A$  avem:

$$(P_1) \quad x R x \quad (\text{reflexivitate})$$

$$(P_2) \quad x R y, y R z \Rightarrow x R z \quad (\text{transitivitate})$$

Mulțimea  $A$  înzestrată cu o relație de preordine  $R$  se numește mulțime preordonată.

Relația de preordine  $R$  se numește relație de ordine dacă verifică relația

$$(P_3) \quad x R y, y R x \Rightarrow x = y \quad (\text{antisimetrie})$$

pentru orice  $x, y \in A$ .

O relație de ordine se notează în mod uzual cu  $\leq$ , deci cele trei relații ce o definesc se transcriu astfel:

$$x \leq x$$

$$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

$$x \leq y, y < x \Rightarrow x = y$$

O mulțime ordonată este o mulțime  $A$  înzestrată cu o relație de ordine  $\leq$ . Vom nota:  $x < y \Leftrightarrow x \leq y$  și  $x \neq y$ .

Exemplu de relație de preordine care nu este relație de ordine. Considerăm o mulțime  $A = \{x, y, z\}$  în care relația  $R$  este definită prin graful următor:



și anume:

$$x R x, y R y, z R z$$

$$x R y, y R x, z R y, x R z.$$

Se observă că  $R$  este reflexivă și tranzitivă, dar nu este antisimetrică:



$$y R z, z R y \not\Rightarrow y = z$$

O mulțime parțial ordonată  $(A, \leq)$  se numește mulțime total ordonată dacă

$(P_4)$  pentru orice  $x, y \in A$ , avem  $x R y$  sau  $y R x$ .

Exemplu de mulțime parțial ordonată care nu este total ordonată. În mulțimea  $Z$  a numerelor întregi considerăm relația:

$$x R y \Leftrightarrow x \text{ divide pe } y$$

Este evident că  $R$  este o relație de ordine care nu este totală.

Mulțimea  $R$  a numerelor reale înzestrată cu relația de ordine naturală este o mulțime total ordonată.

Dacă  $(A, R)$  și  $(A', R')$  sînt două mulțimi preordonate, atunci o funcție  $f: A \rightarrow A'$  se numește izotonă dacă pentru orice  $x, y \in A$  avem:

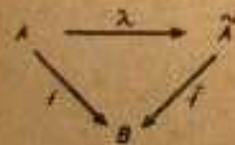
$$x R y \Rightarrow f(x) R' f(y).$$

În cazul cînd  $(A, \leq)$ ,  $(A', \leq)$  sînt două mulțimi parțial ordonate,  $f: A \rightarrow A'$  este izotonă dacă

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

**PROPOZIȚIA 1.** Fie  $(A, R)$  o mulțime parțial ordonată. Atunci există o mulțime parțial ordonată  $(\tilde{A}, \leq)$  și o funcție izotonă  $\lambda: A \rightarrow \tilde{A}$  cu proprietatea următoare:

(\*) Pentru orice mulțime parțial ordonată  $(B, \leq)$  și pentru orice funcție izotonă  $f: A \rightarrow B$  există o unică funcție izotonă  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow B$ , astfel încît următoarea diagramă este comutativă:



Demonstrație. În  $A$  introducem următoarea relație:

$$x \sim y \Leftrightarrow x R y \text{ și } y R x.$$

Se deduce imediat că  $\sim$  este o relație de echivalență pe  $A$ . Considerăm mulțimea cit  $\tilde{A} = A/\sim$  și  $\lambda: A \rightarrow \tilde{A}$  surjecția canonică:

$$\lambda(x) = \hat{x}, \text{ pentru orice } x \in A.$$

În  $\tilde{A}$  definim relația:

$$\hat{x} \leq \hat{y} \Leftrightarrow x R y.$$

Definiția lui  $\leq$  nu depinde de reprezentanți: dacă  $x \sim x'$  și  $y \sim y'$ , atunci

$$x R y \Leftrightarrow x' R y'$$

Într-adevăr, dacă  $x \sim x'$  și  $y \sim y'$ , atunci  $x R x'$ ,  $x' R x$ ,  $y R y'$  și  $y' R y$ , deci

$$x R y \Rightarrow x' R y \quad (\text{deoarece } x' R x)$$

$$\Rightarrow x' R y' \quad (\text{deoarece } y R y')$$

Implicația cealaltă rezultă identic.

Relația  $\leq$  este o relație de ordine pe  $\tilde{A}$ .

$$\hat{x} \leq \hat{x} \quad (\text{deoarece } x R x)$$

$$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x R y, y R z \Rightarrow x R z \Rightarrow \hat{x} \leq \hat{z}.$$

$$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x R y, y R x \Rightarrow x \sim y \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}.$$

Aplicația  $\lambda$  este izotonă:  $x R y \Rightarrow \hat{x} \leq \hat{y} \Rightarrow \lambda(x) \leq \lambda(y)$ . Definim aplicația  $\tilde{f}$  în modul următor:

$$\tilde{f}(\hat{x}) = f(x), \text{ pentru orice } \hat{x} \in \tilde{A}.$$

Definiția lui  $\tilde{f}$  nu depinde de reprezentanți.

$$x \sim y \Rightarrow x R y, y R x \Rightarrow f(x) \leq f(y), f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(x) = f(y).$$

deoarece, în  $B$ ,  $\leq$  este o relație de ordine parțială (deci antisimetrică).

$\tilde{f}$  este o aplicație izotonă:



$$\hat{x} \leq \hat{y} \Rightarrow x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Diagrama din teoremă este comutativă:

$$(\bar{f} \circ \lambda)(x) = \bar{f}(\lambda(x)) = \bar{f}(\hat{x}) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A.$$

Să arătăm acum unicitatea lui  $\bar{f}$ . Propunem, prin absurd, că ar mai exista o funcție izotonă  $g: \tilde{A} \rightarrow B$  astfel încât  $g \circ \lambda = f$ .

Atunci avem:

$$g(\hat{x}) = g(\lambda(x)) = f(x) = \bar{f}(\hat{x}), \text{ pentru orice } \hat{x} \in \tilde{A}.$$

Rezultă  $g = \bar{f}$ , deci  $\bar{f}$  este unică. Demonstrația este terminată.

Fie acum  $(x_i)_{i \in I}$  o familie carecare de elemente ale unei mulțimi parțial ordonate  $(A, \leq)$ .

Un element  $y \in A$  este un majorant al familiei  $(x_i)_{i \in I}$  dacă  $x_i \leq y$  pentru orice  $i \in I$ . Dual,  $y \in A$  este un minorant al familiei  $(x_i)_{i \in I}$  dacă  $y \leq x_i$  pentru orice  $i \in I$ .

$y \in A$  este supremumul familiei  $(x_i)_{i \in I}$  dacă pentru orice majorant  $z$  al familiei  $(x_i)_{i \in I}$  avem  $y \leq z$ . Supremumul familiei  $(x_i)_{i \in I}$  va fi notat

$$\bigvee_{i \in I} x_i$$

Deci elementul  $\bigvee_{i \in I} x_i$  al lui  $A$  este caracterizat de următoarele două relații:

$$(i) \quad x_i \leq \bigvee_{i \in I} x_i, \text{ pentru orice } i \in I.$$

$$(ii) \quad \text{Dacă } x_i \leq y \text{ pentru orice } i \in I, \text{ atunci } \bigvee_{i \in I} x_i \leq y.$$

Dual,  $y \in A$  este infimumul familiei  $(x_i)_{i \in I}$  dacă pentru orice minorant  $z$  al familiei  $(x_i)_{i \in I}$  avem  $z \leq y$ . Infimumul familiei  $(x_i)_{i \in I}$  va fi notat

$$\bigwedge_{i \in I} x_i$$

și este caracterizat de

$$(a) \quad \bigwedge_{i \in I} x_i \leq x_i, \text{ pentru orice } i \in I.$$

$$(b) \quad \text{Dacă } y \leq x_i \text{ pentru orice } i \in I, \text{ atunci } y \leq \bigwedge_{i \in I} x_i.$$

Supremumul (respectiv infimumul) familiei  $\{x_1, \dots, x_n\}$  se va nota  $\bigvee_{i=1}^n x_i$  (respectiv  $\bigwedge_{i=1}^n x_i$ ). Pentru mulțimea  $\{x, y\}$ , notăm

$$x \vee y: \text{ supremumul mulțimii } \{x, y\}.$$

$$x \wedge y: \text{ infimumul mulțimii } \{x, y\}.$$

Definiția 1. O mulțime parțial ordonată  $(A, \leq)$  se numește latice dacă pentru orice  $x, y \in A$  există  $x \vee y$  și  $y \wedge x$ .  $(A, \leq)$  se numește latice completă dacă pentru orice familie  $(x_i)_{i \in I}$  de elemente ale lui  $A$ , există  $\bigvee_{i \in I} x_i$  și  $\bigwedge_{i \in I} x_i$ .

O mulțime parțial ordonată  $(A, \leq)$  se numește inductivă dacă orice submulțime total ordonată a sa admite cel puțin un majorant.

Fie  $(A, \leq)$  o mulțime parțial ordonată. Un element  $x \in A$  se numește maximal dacă nu există nici un element  $y \in A$  astfel încât  $x < y$ ; cu alte cuvinte, dacă din  $x \leq y$  rezultă  $x = y$ .

Axioma lui Zorn: Orice mulțime parțial ordonată inductivă admite un element maximal.

OBSERVAȚIE: Această axiomă a fost impusă de o serie de construcții ale matematicii care vizează mulțimile infinite. Cunoscută mai ales sub o formă echivalentă (axioma alegerii), ea a generat multe controverse în matematică și în filosofia matematicii. În prezent, situația este următoarea:

Pentru teoria mulțimilor s-au propus mai multe sisteme de axiome, mai cunoscute fiind sistemul Zermelo - Fraenkel și sistemul Gödel - Bernays. Nu s-a reușit până acum să se demonstreze pentru nici unul din aceste sisteme că este necontradictoriu.



Presupunându-se că sistemul de axiome Zermelo - Fraenkel este necontradictoriu, Kurt Gödel<sup>1)</sup> a demonstrat în 1940 că prin adăugarea axiomei lui Zorn se obține încă un sistem necontradictoriu. Ulterior s-a demonstrat că dacă adăugăm la sistemul Zermelo - Fraenkel negația axiomei lui Zorn se obține încă un sistem necontradictoriu (A. Mostowski, P. Cohen).

Cu alte cuvinte, axioma lui Zorn este independentă de celelalte axiome ale teoriei mulțimilor. Independența axiomei lui Zorn este unul din rezultatele de vîrf ale matematicii secolului XX.

Se cuvine a preciza că cea mai mare parte a matematicienilor contemporani presupun în cercetările lor că axioma lui Zorn este verificată.

1) Este o părere unanimă aceea că K. Gödel este cel mai mare logician în viață.

# EXERCITII LA CAPITOLUL I

1. Pentru orice submulțimi A, B, C, ale unei mulțimi X să se arate că

- a)  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- b)  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- c)  $A - (A - B) = A \cap B$
- d)  $A - B = A - (A \cap B)$
- e)  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
- f)  $(A - B) - C = (A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$
- g)  $A \cup B = A \cup (B - A)$
- h)  $(A \cap B) \cup (A \cap C_X(B)) = (A \cup B) \cap (A \cup C_X(B)) = A$
- i)  $A \cap [C_X(A) \cup B] = A \cap B$
- j)  $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

2. Să se stabilească următoarele echivalențe:

- a)  $A \cup B \subset C \iff A \subset C \text{ și } B \subset C$
- b)  $A \subset B \cap C \iff A \subset B \text{ și } A \subset C$
- c)  $A \cap B \subset C \iff A \subset C_X(B) \cup C$
- d)  $A \subset B \cup C \iff A \cap C_X(B) \subset C$
- e)  $(A - B) \cup B = A \iff B \subset A$
- f)  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subset A$

3. Să se demonstreze că o mulțime formată din n elemente are  $2^n$  submulțimi.

4. Este valabilă implicația:

$$A \not\subset B, B \not\subset C \implies A \not\subset C ?$$

5. Să se rezolve sistemul de ecuații



$$A \cap X = B$$

$$A \cup X = C,$$

unde  $A, B, C$  sînt mulțimi date și  $B \subset A \subset C$ .

6. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$A - X = B$$

$$X - A = C,$$

unde  $A, B, C$  sînt mulțimi date și  $B \subset A, A \cap C = \emptyset$ .

7. Fie șirul descrescător:

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$$

Să se arate că intersecția oricărui subșir infinit al acestui șir coincide cu intersecția întregului șir.

8. Fie șirul crescător:

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$$

Să se arate că reuniunea oricărui subșir infinit al acestui șir coincide cu reuniunea întregului șir.

9. Să se demonstreze următoarele relații:

$$a) \bigcup_{k \in K} \left( \bigcup_{e \in L} A_{ke} \right) = \bigcup_{e \in L} \left( \bigcup_{k \in K} A_{ke} \right)$$

$$b) \bigcap_{k \in K} \left( \bigcap_{e \in L} A_{ke} \right) = \bigcap_{e \in L} \left( \bigcap_{k \in K} A_{ke} \right)$$

$$c) X - \bigcup_{k \in K} A_k = \bigcap_{k \in K} (X - A_k)$$

$$d) X - \bigcap_{k \in K} A_k = \bigcup_{k \in K} (X - A_k)$$

$$e) \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right) \cup \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right) = \bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t)$$

$$f) \bigcup_{t \in T} (B \cap A_t) = B \cap \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)$$

$$g) \bigcap_{t \in T} (B \cup A_t) = B \cup \left( \bigcap_{t \in T} A_t \right)$$

$$h) \bigcup_{k \in K} \bigcap_{e \in L} A_{ke} \subset \bigcap_{e \in L} \bigcup_{k \in K} A_{ke}$$

10. Să se arate că  $A_t \subset B_t$ , pentru orice  $t \in T$ , atunci

$$\bigcup_{t \in T} A_t \subset \bigcup_{t \in T} B_t \text{ și } \bigcap_{t \in T} A_t \subset \bigcap_{t \in T} B_t.$$

11. Fie  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  un șir carecare de mulțimi.  
Formăm șirul:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_n = A_n - (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$$

$$\dots \dots \dots$$

Să se arate că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

12. Fie  $A, B \subset X$ . Definim diferența simetrică a submulțimilor  $A, B$  prin

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Să se stabilească proprietățile următoare:

$$a) A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

$$b) A \Delta B = B \Delta A$$

$$c) A \Delta (A \Delta C) = C$$

$$d) A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$$



e)  $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

f)  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$

g)  $\left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] \Delta \left[ \bigcup_{i=1}^n B_i \right] \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i \Delta B_i)$

h)  $\left[ \bigcap_{i=1}^n A_i \right] \Delta \left[ \bigcap_{i=1}^n B_i \right] \subset \bigcap_{i=1}^n (A_i \Delta B_i)$

13. Găsiți patru mulțimi A, B, C, D astfel încât

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$$

14. Să se stabilească relațiile:

a)  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$

b)  $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

c)  $A \subset B$  și  $C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D$

d)  $A \subset X, B \subset Y \Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$

e)  $A \times B = C \times D \Rightarrow A = C$  și  $B = D$  (pentru A, B, C, D nevide)

15. Dacă  $(A_s)_{s \in S}, (B_t)_{t \in T}$  sînt două familii de mulțimi,

atunci avem:

$$\left[ \bigcup_{s \in S} A_s \right] \times \left[ \bigcup_{t \in T} B_t \right] = \bigcup_{(s,t) \in S \times T} (A_s \times B_t)$$

$$\left[ \bigcap_{s \in S} A_s \right] \times \left[ \bigcap_{t \in T} B_t \right] = \bigcap_{(s,t) \in S \times T} (A_s \times B_t)$$

16. Să se stabilească relațiile:

$$\bigcup_{i \in I} \left[ \bigcap_{j \in J_i} A_{ij} \right] = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} \left[ \bigcup_{i \in I} A_{ij} \right]$$

$$\bigcap_{i \in I} \left[ \bigcup_{j \in J_i} A_{ij} \right] = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} \left[ \bigcap_{i \in I} A_{ij} \right]$$

17. Dacă  $R_1, R_2 \subset A^2$  sînt relații binare, atunci definim compunerea lor:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \in A^2 \mid \text{există } z \in A, (x, z) \in R_1, (z, y) \in R_2\}$$

Să se arate că compunerea relațiilor este asociativă, dar nu comutativă

18. Dacă  $R \subset A^2$ , atunci relația inversă  $R^{-1}$  este definită prin

$$R^{-1} = \{(x, y) \in A^2 \mid (y, x) \in R\}$$

Să se arate că

a)  $R \cup R = R \cap R = R$

b)  $(R^{-1})^{-1} = R$

c)  $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

d)  $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

19. Pentru orice relații binare  $R_1, R_2, Q$  pe mulțimea A, sînt verificate relațiile:

a)  $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

b)  $R_1 \subset R_2 \Rightarrow Q \circ R_1 \subset Q \circ R_2$

c)  $R_1 \subset R_2 \Rightarrow R_1 \circ Q \subset R_2 \circ Q$

20. Dacă Q,  $R_i, i \in I$  sînt relații pe A, atunci

a)  $\left( \bigcup_{i \in I} R_i \right) \circ Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q)$

b)  $Q \circ \left( \bigcup_{i \in I} R_i \right) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i)$

21. Să se stabilească o corespondență bijectivă între mulțimile:

a)  $A \times B$  și  $B \times A$



- b)  $A \times (B \times C)$  și  $(A \times B) \times C$   
 c)  $(A \times B)^C$  și  $A^C \times B^C$   
 d)  $(A^B)^C$  și  $A^B \times C$   
 e)  $A^{B \cup C}$  și  $A^B \times A^C$ , dacă  $B \cap C = \emptyset$ .

22. Fie  $A$  o mulțime oarecare. Pentru orice mulțime  $B \subset A$ , considerăm funcția caracteristică  $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$  a mulțimii  $B$ .

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin B \\ 1, & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Să se demonstreze că

- a)  $\chi_A(x) = 1, \chi_{\emptyset}(x) = 0$ , pentru orice  $x \in A$ .  
 b)  $\chi_{B \cap B'}(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_{B'}(x)$   
 c)  $\chi_{\complement_A(B)}(x) = 1 - \chi_B(x)$   
 d)  $\chi_{B - B'}(x) = \chi_B(x) - \chi_{B \cap B'}(x)$   
 e) Dacă  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ , atunci  $\chi_B(x) = \max_{i \in I} \chi_{B_i}(x)$   
 f) Dacă  $B = \bigcap_{i \in I} B_i$ , atunci  $\chi_B(x) = \inf_{i \in I} \chi_{B_i}(x)$ .

23. Presupunind că  $R, R_1, R_2$  sînt relații de echivalență pe  $A$ , atunci avem

- a)  $R^{-1}$  este relație de echivalență.  
 b)  $R_1 \circ R_2 = A^2 \iff R_1 = A^2$   
 c)  $R_1 \circ R_2 = A^2 \implies R_2 \circ R_1 = A^2$

24. Să se demonstreze că orice intersecție de relații de echivalență este o relație de echivalență.

25. Pentru orice funcție  $f: A \rightarrow B$ , considerăm funcțiile

$$f_*: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B): f_*(M) = f(M), M \subset A$$

$$f^*: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A): f^*(N) = f^{-1}(N), N \subset B.$$

Următoarele afirmații sînt echivalente:

- (a)  $f$  este injectivă;  
 (b)  $f_*$  este injectivă;  
 (c)  $f^*$  este surjectivă;  
 (d)  $f(M \cap M') = f(M) \cap f(M')$ , pentru orice  $M, M' \subset A$ ;  
 (e)  $f(\bigcup_A(M)) \subset \bigcup_B f(M)$ , pentru orice  $M \subset C$ .

26. În condițiile problemei 25, sînt echivalente afirmațiile

- (a)  $f$  este surjectivă;  
 (b)  $f_*$  este surjectivă;  
 (c)  $f^*$  este injectivă.

27. Pentru orice funcție  $f: A \rightarrow B$  sînt echivalente afirmațiile:

- (a)  $f$  este injectivă;  
 (b) Dacă  $g, h: X \rightarrow A$  sînt două funcții cu proprietatea  $f \circ g = f \circ h$ , atunci  $g = h$ .

28. Pentru orice funcție  $f: A \rightarrow B$  sînt echivalente afirmațiile:

- (a)  $f$  este surjectivă;  
 (b) Dacă  $g, h: B \rightarrow C$  sînt două funcții astfel încît  $g \circ f = h \circ f$ , atunci  $g = h$ .

29. În condițiile problemei 25, sînt echivalente afirmațiile:

- (a)  $f$  este bijectivă;



- (b)  $f_*$  și  $f^*$  sînt surjective;  
 (c)  $f_*$  și  $f^*$  sînt injective;  
 (d)  $f_*$  este bijectivă;  
 (e)  $f^*$  este bijectivă;  
 (f)  $f(C_A(M)) = C_B(f(M))$ , pentru orice  $M \subset A$ .

30. Dacă card  $A = m$ , card  $B = n$ , să se determine cîte funcții sînt de la  $A$  în  $B$ .

31. Să se demonstreze că proprietățile de reflexivitate, simetrie și transitivitate sînt independente.

32. Să se arate că orice mulțime finită poate fi ordonată total.

33. Dacă  $A, B \subset X$ , să se arate că

$$(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$$

$$C \times (A \Delta B) = (C \times A) \Delta (C \times B)$$

34. Notăm cu  $N(X)$  numărul elementelor unei mulțimi finite  $X$ . Pentru orice mulțimi finite  $A, B, C, A_1, \dots, A_n$  să se arate că

$$(a) \quad N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B);$$

$$(b) \quad N(A \cup B) = N(A) + N(B) \iff A \cap B = \emptyset;$$

$$(c) \quad N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

$$(d) \quad N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n N(A_i) - \sum_{1 \leq j < k} N(A_j \cap A_k) + \sum_{1 \leq j < k < l} N(A_j \cap A_k \cap A_l) - \dots + (-1)^{n+1} N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

35. Folosind exercițiul anterior să se arate că numărul numerelor naturale mai mici decît  $n$  și prime cu  $n$  este dat de formula:

$$n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

unde  $p_1, \dots, p_n$  sînt toți divizorii primi, distincti, ai lui  $n$ .

36. Pe mulțimea  $Z$  a numerelor întregi definim relația binară :

$$x | y \iff (\exists z)(z \in Z \wedge y = zx)$$

Să se arate că  $|$  este o relație reflexivă și transitivă, dar nu este simetrică.

37. Definim următoarele relații binare:

$$x \oslash y \iff x^2 = y^2 \quad ; \quad \text{pe mulțimea } Z.$$

$$x \oslash' y \iff |x| = |y| \quad ; \quad \text{pe mulțimea } R \text{ a numerelor reale}$$

Să se arate că  $\oslash$  și  $\oslash'$  sînt relații de echivalență și să se determine mulțimile cît.

38. Să se determine toate relațiile de echivalență pe mulțimea  $\{1, 2, 3\}$  și apoi mulțimile cît corespunzătoare.

39. Să se arate că singura relație de echivalență care este și relația de ordine este egalitatea.

40. Fie  $X$  o mulțime finită cu  $n$  elemente. Să se arate că numărul relațiilor de echivalență  $\sim$  pe  $X$ , pentru care  $X/\sim$  are exact două elemente este egal cu  $2^{n-1} - 1$ .

41. Fie funcția  $f: Z \rightarrow N$  definită de

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{dacă } z \geq 0 \\ 2|z| - 1, & \text{dacă } z < 0. \end{cases}$$

Să se arate că  $f$  este bijectivă și deci  $Z$  este numărabilă.

42. Să se arate că funcția  $f: N \times N \rightarrow N$

$$f(m, n) = \begin{cases} C_{m+n+1}^2 + m, & \text{pentru } m + n \geq 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

este o bijecție.

43. Fie  $p_1, p_2, \dots, p_k$  primele  $k$  numere prime ( $p_1=2, p_2=3, p_3=5$ , etc.).

Să se arate că funcția  $f: N^k \rightarrow N$ , definită de

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{x_1}{p_1} \frac{x_2}{p_2} \dots \frac{x_k}{p_k}$$

este injectivă.