FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Exerciţii[1]

(1) Fie T o mulţime şi $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ şi $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.

Demonstraţie: Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi $x \in X$. Atunci $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \in X$, $x \notin B \setminus X$, deci $x \in A$. Luăm acum $x \in A$. Atunci $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Cum $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$, deci $x \in X$. $\square$

(2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ şi $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relaţie binară pe A. Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R? Care dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ poate fi relaţia subiacentă unei funcţii de la A la A?

Demonstraţie: Obţinem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

Niciuna dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ nu poate descrie o funcţie de la A la A, deoarece

(i) $(a, b) \in R$ şi $(a, c) \in R$;

(ii) $(a, a) \in R^{-1}$ şi $(a, b) \in R^{-1}$;

(iii) nu există y astfel încât $(d, y) \in R \circ R$.

De asemenea, se observă că o relaţie "validă" ar avea patru elemente, fapt ce nu e valabil pentru niciuna din relaţiile de mai sus. $\square$

(3) Daţi exemplu de familie de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$, indexată, pe rând, după:

(i) $\mathbb{N}^*$;

(ii) $\mathbb{Z}$;

[1] Exerciţii redactate şi rezolvate de: Andrei Sipoş, Alexandra Otiman, Natalia Moangă

(iii) $\{2,3,4\}$.

Determinaţi reuniunea şi intersecţia fiecărei familii date ca exemplu.

Demonstraţie:

(i) (a) $A_n = \{n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.

(b) $B_1 = \{0\}, B_2 = \mathbb{N}^*, B_3 = \mathbb{Q}$ şi $B_n = \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 5$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$.

(c) $E_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = (-1,1)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \{0\}$.

(d) $A_n = \{1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(e) $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(ii) $C_1 = (-\infty, 0), C_2 = \{0\}, C_{-n} = \{3\}$ pentru orice $n \geq 0$, $C_n = \{7\}$ pentru orice $n \geq 3$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n = (-\infty, 0] \cup \{3\} \cup \{7\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} C_n = \emptyset$.

(iii) $D_2 = \{0\}, D_3 = \{2\}, D_4 = \{3\}$. Atunci $\bigcup_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \{0,2,3\}$, $\bigcap_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \emptyset$.

$\square$

(4) Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de submulţimi ale unei mulţimi X, arătaţi următoarele (**legile lui De Morgan**):

(i) $C_X \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$;

(ii) $C_X \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

Demonstraţie:

(i) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcup_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (există $i \in I$ a.î. $x \in A_i$) $\iff$

pentru orice $i \in I$, $x \notin A_i \iff$ pentru orice $i \in I$, $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcap_{i\in I} C_X A_i$.

(ii) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcap_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (pentru orice $i \in I$, $x \in A_i$) $\iff$ există $i \in I$ a.î. $x \notin A_i \iff$ există $i \in I$ a.î. $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

$\square$

Definiţia 1. *O familie de mulţimi* $(A_i)_{i\in I}$ *se numeşte* **disjunctă** *dacă pentru orice* $i, j \in I$ *cu* $i \neq j$ *avem* $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(5) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A'_i := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A'_i \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ şi că $(A'_i)_{i\in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi.

Demonstraţie: Este evident că, pentru orice $i \in I$, funcţia

$$f_i : A_i \to A'_i, \quad f_i(a) = (i, a)$$

este bijecţie.
Presupunem prin reducere la absurd că $(A'_i)_{i\in I}$ nu este o familie disjunctă de mulţimi. Atunci există $j, k \in I$ cu $j \neq k$ a.î. $A'_j \cap A'_k \neq \emptyset$, deci există $x \in A'_j \cap A'_k$. Deoarece $x \in A'_j$, există $a \in A_j$ cu $x = (j, a)$. Similar, deoarece $x \in A'_k$, există $b \in A_k$ cu $x = (k, b)$. Rezultă că $(j, a) = (k, b)$, deci $k = j$, ceea ce contrazice presupunerea. □

(6) Daţi exemple, pe rând, de relaţii care:

(i) sunt reflexive şi tranzitive, dar nu sunt simetrice;

(ii) sunt reflexive şi simetrice, dar nu sunt tranzitive;

(iii) sunt simetrice şi tranzitive, dar nu sunt reflexive.

Demonstraţie: Notăm, pentru orice mulţime C, $\Delta_C := \{(x, y) \in C \times C \mid x = y\}$ (**relaţia diagonală**).

(i) $\leq$ pe $\mathbb{Z}$; $\leq$ pe $\mathbb{R}$; relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$.

(ii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup \{(7, 8), (8, 7), (8, 9), (9, 8)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Nu este tranzitivă, deoarece $(7, 8) \in R$ şi $(8, 9) \in R$, dar $(7, 9) \notin R$. Alt exemplu este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 1\}$ (R' nu este tranzitivă, pentru că $(1, 2)$ şi $(2, 3)$ sunt în R', dar $(1, 3)$ nu este).

În general, o intuiţie potrivită pentru acest gen de relaţii este relaţia de prietenie între oameni (considerând că orice om este prieten cu sine). Doi oameni pot fi prieteni cu un al treilea fără să fie prieteni între ei. Pornind de la această idee, putem construi următorul exemplu "minimal" – luăm mulţimea $A := \{1, 2, 3\}$ şi relaţia R pe ea egală cu $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

(iii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \setminus \{(7, 7)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Alt exemplu (tot pe $\mathbb{Z}$) este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0\}$.

Observăm, de asemenea, că pe orice mulţime nevidă relaţia vidă satisface condiţia (de ce, totuşi, relaţia vidă pe mulţimea vidă nu este un exemplu?). Un exemplu "minimal", dar nevid, este următorul: $A := \{1, 2\}$, $R := \{(2, 2)\}$.

$\square$

(7) Fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie descrisă în fiecare situaţie de mai jos. Verificaţi, pe rând, dacă R este relaţie de ordine parţială, strictă sau totală sau relaţie de echivalenţă.

(i) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $a \mid b$.

(ii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ şi $(a, b)R(c, d)$ dacă şi numai dacă $a \leq b$ sau $b \leq d$.

(iii) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $b = a$ sau $b = a + 1$.

(iv) A este mulţimea tuturor cuvintelor în limba engleză şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă a nu este mai lung ca b.

Demonstraţie:

(i) R este

(a) tranzitivă: Fie $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, deci $a \mid b$ şi $b \mid c$. Rezultă că $a \mid c$, deci $(a, c) \in R$.

(b) reflexivă: Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, avem că $a \mid a$, deci $(a, a) \in R$.

(c) antisimetrică: Presupunem că $(a, b) \in R$ şi $(b, a) \in R$, deci că $a \mid b$ şi $b \mid a$. Deoarece $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că $a = b$.

R nu este

(a) simetrică: avem că $(3, 6) \in R$, deoarece $3 \mid 6$. Pe de altă parte $6 \nmid 3$, prin urmare $(6, 3) \notin R$.

(b) totală: $2 \nmid 3$ şi $3 \nmid 2$. Aşadar, $(2, 3) \notin R$ şi $(3, 2) \notin R$.

Prin urmare, R este relaţie de ordine parţială, dar R nu este relaţie de ordine strictă sau totală şi nici relaţie de echivalenţă.

(ii) R este reflexivă, deoarece $b \leq b$, prin urmare $(a, b)R(a, b)$ pentru orice $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aşadar, R nu este relaţie de ordine strictă. Observăm că R nu este

(a) simetrică: $(2, 2)R(4, 3)$, dar $((4, 3), (2, 2)) \notin R$.

(b) antisimetrică: $(3, 5)R(7, 2)$ (deoarece $3 \leq 5$) şi $(7, 2)R(3, 5)$ (deoarece $2 \leq 5$), dar $(3, 5) \neq (7, 2)$.

(c) tranzitivă: $(5, 4)R(5, 6)$ şi $(5, 6)R(3, 3)$, dar $((5, 4), (3, 3)) \notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iii) În acest caz, $R = \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Este clar că R este reflexivă, deci R nu este o relaţie de ordine strictă. Se observă că R nu este tranzitivă: $(5,6) \in R$ şi $(6,7) \in R$, dar $(5,7) \notin R$. Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iv) R este reflexivă, deci R nu este o relaţie de ordine strictă. Observăm că R nu este

(a) antisimetrică: dacă (a,b) şi (b,a) sunt în R, atunci a şi b au aceeaşi lungime, dar nu coincid neapărat. De exemplu, $a =$"do" şi $b =$"go".

(b) simetrică: ("it", "and") $\in R$, dar ("and","it") $\notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

$\square$

(8) Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$. Atunci:

(i) Dacă minimul lui S există, atunci acesta este unic.

(ii) Orice minim (maxim) al lui S este element minimal (maximal).

Demonstraţie:

(i) Vom presupune că există două valori minime şi vom demonstra că acestea sunt egale. Fie x minim al lui S, deci pentru orice $y \in S$, $x \leq y$. Fie x' minim al lui S, deci pentru orice $y' \in S$, $x' \leq y'$. Cum $x \leq y$ pentru orice $y \in S$, alegem $y = x'$. Rezultă că $x \leq x'$. Cum $x' \leq y'$ pentru orice $y' \in S$, alegem $y' = x$. Rezulă că $x' \leq x$. Atunci obţinem că $x' = x$, deci minimul este unic.
Se procedează asemănător pentru maxim.

(ii) Fie x minimul mulţimii S. Pentru a demonstra că x este element minimal, vom presupune că există cel puţin un element $t \in S$ a.î. $t \leq x$ şi vom arăta că $t = x$. Cum x este minim şi $t \in S$, rezultă că $x \leq t$. Prin urmare, $t = x$, deci x este element minimal al lui S.
Se procedează asemănător pentru maxim.

$\square$

(9) Fie $D(n) = \{d \in \mathbf{N} |\ \ d|n\}$ şi $P(n) = \{d \in \mathbf{N} |\ \ d|n,\ d \neq 1,\ d \neq n\}$.
Demonstraţi că $(P(n), |)$ şi $(D(n), |)$ sunt mulţimi parţial ordonate. Enumeraţi elementele minimale, elementele maximale, minimul şi maximul (dacă există) pentru următoarele mulţimi: $P(12)$, $P(32)$, $P(72)$, $D(72)$.

Demonstraţie:

Definim relaţia de divizibilitate pe mulţimea $P(n)$ astfel : $R = \{(a,b) \in P(n) \times P(n) |\ a|b\}$.

Reflexivitate

Pentru orice $a \in P(n)$, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a|a$ pentru orice $a \in P(n)$

Antisimetrie

Pentru orice $a, b \in P(n)$, dacă $(a,b) \in R$ şi $(b,a) \in R$, atunci:

$$\left.\begin{array}{c} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|a \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } a = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow a = a \cdot r \cdot t,\ r,t \in \mathbb{N} \Rightarrow r \cdot t = 1,\ r,t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{r} \in \mathbb{N}$. Deci r este divizor al lui 1. Rezultă $r = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow a = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$.

Tranzitivitate

Pentru orice $a, b, c \in P(n)$, dacă $(a,b) \in P(n)$ şi $(b,c) \in P(n)$, atunci:

$$\left.\begin{array}{c} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|c \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } c = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow c = a \cdot r \cdot t,\ r,t \in \mathbb{N} \Rightarrow a|c, \text{ unde } a, c \in P(n)$$

$\Rightarrow (a,c) \in R$.

În concluzie, R este o relaţie de ordine parţială, deci $(P(n), |)$ este mulţime parţial ordonată. Asemător se demonstrează şi că $(D(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.

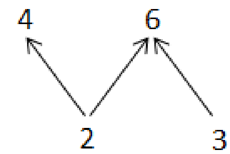
Definiţia 2. *Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Construim diagrama Hasse corespunzătoare sub forma unui graf orientat în modul următor:*

(i) vârfurile grafului reprezintă toate elementele mulţimii A.

(ii) există muchie $x \to y$ dacă $x < y$ şi nu există $z \in A$ a.î. $x < z < y$

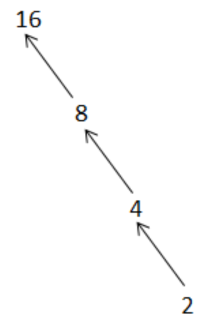
Folosim diagrama Hasse pentru a observa diferenţa dintre elementele minimale(maximale) şi minimul(maximul) unei mulţimi parţial ordonate.

$P(12) = \{2, 3, 4, 6\}$.
Observăm că pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$, sau dacă $y|3$, rezultă $y = 3$. Deci, 2 şi 3 sunt elemente minimale.
Asemănător, pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $4|y$, rezultă $y = 4$, sau dacă $y|6$, rezultă $y = 6$. Deci, 4 şi 6 sunt elemente maximale.
Nu avem element minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie.
Nu avem element maxim, deoarece 4 şi 6 nu sunt într-o relaţie.
Observăm că dacă un element este minimal(maximal), nu implică faptul că el este minim(maxim).



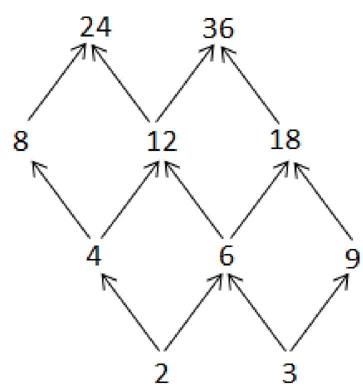
$2|4$
$2|6$
$3|6$

$P(32) = \{2, 4, 8, 16\}$.
2 este element minimal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$.
Exemplu: 4 nu este maximal, deoarece pentru $y|4$, unde $y \in S$, avem $y \in \{2, 4\}$, deci nu implică $y = 4$.
2 este şi minim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $2|y$.
16 este element maximal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $16|y$, rezultă $y = 16$.
Dar 16 este şi maxim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $y|16$.

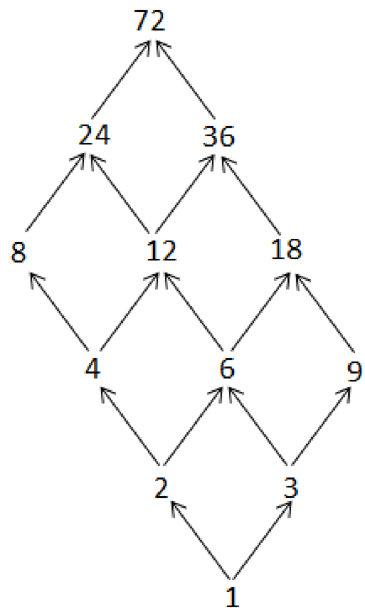


$2|4|8|16$

$P(72) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$.
2 şi 3 sunt elemente minimale.
24 şi 36 sunt elemente maximale.
Nu avem minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate şi nici maxim, deoarece 24 şi 36 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate.



$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
1 este element minimal, dar şi minim.
72 este element maximal, dar şi maxim.



$\square$

(10) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.

Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

$$p = \text{Merg în parc.} \quad q = \text{Îmi termin treaba.} \quad r = \text{Apare altceva.}$$

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p$.

(ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice:

$$s = \text{Plouă.} \quad t = \text{Putem observa stelele.}$$

Atunci $\psi = t \to \neg s$.

(iii) Fie $\theta =$ Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

$$w = \text{Treci examenul la logică.} \quad z = \text{Înţelegi subiectul.}$$

Atunci $\theta = w \to z$.

(iv) Fie $\chi =$ Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propoziţiile atomice:

$$u = \text{Treci examenul la logică.} \quad v = \text{Faci o prezentare de calitate.}$$

Atunci $\chi = v \to u$.

$\square$

(11) Să se arate că mulţimea $Form$, a formulelor logicii propoziţionale, este numărabilă.

Demonstraţie: Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \to, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din (S4.2).(i), că Sim este numărabilă. Conform (S2.4).(ii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând (S4.2).(iii) şi (S4.2).(i), rezultă că $Expr$ este numărabilă. Deoarece $V \subseteq Form$, din (S4.1).(i) rezultă că $Form$ este infinită. Însă $Form \subseteq Expr$, deci $Form$ este o submulţime infinită a unei mulţimi numărabile. Aplicăm (S4.1).(ii) pentru a conchide că $Form$ este numărabilă. $\square$

(12) Să se arate că pentru orice formulă φ, numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ.

Demonstraţie: Notăm, pentru orice $\varphi \in Form$, cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise şi cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ dacă şi numai dacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- Formula φ este în V, deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $\varphi = v_n$. Atunci $l(\varphi) = l(v_n) = 0 = r(v_n) = r(\varphi)$.

- Există $\psi \in Form$ cu $\varphi = (\neg\psi)$. Presupunem că ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Obţinem

$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$

- Există $\psi, \chi \in Form$ cu $\varphi = (\psi \to \chi)$. Presupunem că ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Obţinem

$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

□

□

(13) Să se dea o definiţie recursivă a mulţimii variabilelor unei formule.

Demonstraţie: Se observă că $Var : Form \to 2^V$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lll} (R0) & Var(v) & = \{v\} \\ (R1) & Var(\neg\varphi) & = Var(\varphi) \\ (R2) & Var(\varphi \to \psi) & = Var(\varphi) \cup V(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = 2^V$ şi pentru

$$\begin{array}{rl} G_0 : V \to A, & G_0(v) = \{v\}, \\ G_\neg : A \to A, & G_\neg(\Gamma) = \Gamma, \\ G_\to : A \times A \to A, & G_\to(\Gamma, \Delta) = \Gamma \cup \Delta. \end{array}$$

pentru a concluziona că Var este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2). □

(14) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

□

(15) Să se arate că pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ şi pentru orice formule φ, ψ avem:

(i) $f_e(\varphi \vee \psi) = f_e(\varphi) \vee f_e(\psi)$;

(ii) $f_e(\varphi \wedge \psi) = f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)$;

(iii) $f_e(\varphi \leftrightarrow \psi) = f_e(\varphi) \leftrightarrow f_e(\psi)$.

Demonstraţie:

(i)

$$f_e(\varphi \vee \psi) = f_e(\neg\varphi \to \psi) = f_e(\neg\varphi) \to f_e(\psi) = \neg f_e(\varphi) \to f_e(\psi) \overset{(*)}{=} f_e(\varphi) \vee f_e(\psi).$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg x \to y = x \vee y$:

x	y	$\neg x$	$\neg x \to y$	$x \vee y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

$$\begin{aligned} f_e(\varphi \wedge \psi) &= f_e(\neg(\varphi \to \neg\psi)) \\ &= \neg f_e(\varphi \to \neg\psi) \\ &= \neg(f_e(\varphi) \to f_e(\neg\psi)) \\ &= \neg(f_e(\varphi) \to \neg f_e(\psi)) \\ &\overset{(*)}{=} f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg(x \to \neg y) = x \wedge y$:

x	y	$\neg y$	$x \to \neg y$	$\neg(x \to \neg y)$	$x \wedge y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

(iii)

$$\begin{aligned} f_e(\varphi \leftrightarrow \psi) &= f_e((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} f_e(\varphi \to \psi) \wedge f_e(\psi \to \varphi) \\ &= (f_e(\varphi) \to f_e(\psi)) \wedge (f_e(\psi) \to f_e(\varphi)) \\ &\overset{(*)}{=} f_e(\varphi) \leftrightarrow f_e(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $(x \to y) \wedge (y \to x) = x \leftrightarrow y$:

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$(x \to y) \wedge (y \to x)$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

□

(16) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$f_e(v_0 \to v_2) = f_e(v_0) \boldsymbol{\to} f_e(v_2) = e(v_0) \boldsymbol{\to} e(v_2) = 0 \boldsymbol{\to} 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} f_e(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= f_e(v_0) \boldsymbol{\wedge} f_e(v_3) \boldsymbol{\wedge} \boldsymbol{\neg} f_e(v_4) \\ &= e(v_0) \boldsymbol{\wedge} e(v_3) \boldsymbol{\wedge} \boldsymbol{\neg} e(v_4) \\ &= 1 \boldsymbol{\wedge} 1 \boldsymbol{\wedge} \boldsymbol{\neg} 0 \\ &= 1 \boldsymbol{\wedge} 1 \boldsymbol{\wedge} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(17) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ,

(i) φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$
\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie } &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ f_e(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \neg f_e(\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ f_e(\neg\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că }\ f_e(\neg\varphi) = 1\\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu }\ f_e(\neg\varphi) = 1\\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă}\\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă}\\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}
$$

(ii) Avem:

$$
\begin{aligned}
\varphi \text{ este nesatisfiabilă } &\iff \varphi \text{ nu e satisfiabilă}\\
&\iff \text{nu avem că } \varphi \text{ e satisfiabilă}\\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu }\ f_e(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că }\ f_e(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ f_e(\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \neg f_e(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ f_e(\neg\varphi) = 1\\
&\iff \neg\varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}
$$

$\square$

(18) Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\psi \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \vDash \varphi &\iff \text{orice model al lui } \psi \text{ este şi model pentru } \varphi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{dacă } f_e(\psi) = 1,\ \text{atunci } f_e(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\psi) \leq f_e(\varphi) \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\psi) \rightarrow f_e(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \to \varphi.
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \sim \varphi &\iff Mod(\psi) = Mod(\varphi) \\
&\iff Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi) \text{ şi } Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi) \\
&\iff \psi \vDash \varphi \text{ şi } \varphi \vDash \psi \\
&\overset{\text{(i)}}{\iff} \vDash \psi \to \varphi \text{ şi } \vDash \varphi \to \psi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\varphi \to \psi) = 1 \text{ şi } f_e(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\varphi \to \psi) \wedge f_e(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \leftrightarrow \varphi.
\end{aligned}$$

□

(19) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} f_e(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\varphi) = 1 \text{ şi } f_e(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\varphi) = 1 \text{ şi} \\
&\qquad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, f_e(\psi) = 1 \\
&\iff \models \varphi \text{ şi} \models \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, $e_1(x) = 1$, pentru orice $x \in V$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, $e_2(x) = 0$, pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \not\models \neg v_0$ şi $e_2 \not\models v_0$, deci v_0 şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

□

(20) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \models \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \models \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$;

(vi) $\models \neg\varphi \to (\neg\psi \to (\psi \leftrightarrow \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$\begin{array}{rcl}
a \mathbin{\pmb{\to}} b = 1 & \iff & a \leq b, \\
1 \mathbin{\pmb{\to}} a = a, & & a \mathbin{\pmb{\to}} 1 = 1 \\
0 \mathbin{\pmb{\to}} a = 1, & & a \mathbin{\pmb{\to}} 0 = \pmb{\neg} a \\
1 \mathbin{\pmb{\wedge}} a = a, & & 0 \mathbin{\pmb{\wedge}} a = 0, \\
1 \mathbin{\pmb{\vee}} a = 1, & & 0 \mathbin{\pmb{\vee}} a = a.
\end{array}$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $f_e(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $f_e(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$f_e(\varphi \to \psi) = f_e(\varphi) \mathbin{\pmb{\to}} f_e(\psi) = f_e(\varphi) \mathbin{\pmb{\to}} 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $f_e((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = 1$. Vrem să arătăm că $f_e(\varphi \to \chi) = 1$. Avem că

$$1 = f_e((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = (f_e(\varphi) \rightarrow f_e(\psi)) \wedge (f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $f_e(\varphi) \rightarrow f_e(\psi) = 1$ şi $f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi) = 1$. Prin urmare, $f_e(\varphi) \leq f_e(\psi)$ şi $f_e(\psi) \leq f_e(\chi)$. Obţinem atunci, din tranzitivitatea lui $\leq$, că $f_e(\varphi) \leq f_e(\chi)$. Aşadar,

$$f_e(\varphi \to \chi) = f_e(\varphi) \rightarrow f_e(\chi) = 1.$$

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$f_e(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } f_e(\varphi \wedge \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $f_e(\varphi \to (\psi \to \chi)) = f_e(\varphi \wedge \psi \to \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$f_e(\varphi)$	$f_e(\psi)$	$f_e(\chi)$	$f_e(\psi \to \chi)$	$f_e(\varphi \to (\psi \to \chi))$	$f_e(\varphi \wedge \psi)$	$f_e(\varphi \wedge \psi \to \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} f_e(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= f_e(\varphi) \rightarrow (f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi)), \\ f_e(\varphi \wedge \psi \to \chi) &= f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $f_e(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} f_e(\varphi) \rightarrow (f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi)) &= 0 \rightarrow (f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi)) = 1, \\ f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi) &= 0 \wedge f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi) = 0 \rightarrow f_e(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $f_e(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} f_e(\varphi) \rightarrow (f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi)) &= 1 \rightarrow (f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi)) = f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi), \\ f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi) &= 1 \wedge f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi) = f_e(\psi) \rightarrow f_e(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$f_e(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = f_e(\varphi), \quad \text{deci că} \quad f_e(\varphi) \vee (f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)) = f_e(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $f_e(\varphi) = 1$. Atunci

$$f_e(\varphi) \vee (f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge f_e(\psi)) = 1 \vee f_e(\psi) = 1.$$

(b) $f_e(\varphi) = 0$. Atunci

$$f_e(\varphi) \vee (f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge f_e(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(v) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$f_e(\varphi \wedge \psi \to \chi) = f_e((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)) \to f_e(\chi) = (f_e(\varphi) \to f_e(\chi)) \vee (f_e(\psi) \to f_e(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $f_e(\varphi) = f_e(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} (f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)) \to f_e(\chi) &= 1 \to f_e(\chi) = f_e(\chi), \\ (f_e(\varphi) \to f_e(\chi)) \vee (f_e(\psi) \to f_e(\chi)) &= (1 \to f_e(\chi)) \vee (1 \to f_e(\chi)) \\ &= f_e(\chi) \vee f_e(\chi) = f_e(\chi). \end{aligned}$$

(b) $f_e(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)) \to f_e(\chi) &= (0 \wedge f_e(\psi)) \to f_e(\chi) \\ &= 0 \to f_e(\chi) = 1, \\ (f_e(\varphi) \to f_e(\chi)) \vee (f_e(\psi) \to f_e(\chi)) &= (0 \to f_e(\chi)) \vee (f_e(\psi) \to f_e(\chi)) \\ &= 1 \vee (f_e(\psi) \to f_e(\chi)) = 1. \end{aligned}$$

(c) $f_e(\psi) = 0$. Similar cu cazul precedent.

(vi) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară.

$$f_e(\neg\varphi \to (\neg\psi \to (\psi \leftrightarrow \varphi))) = \neg f_e(\varphi) \to (\neg f_e(\psi) \leftrightarrow (f_e(\psi) \to f_e(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $f_e(\varphi) = 1$. Atunci $\neg f_e(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}\neg f_e(\varphi) \to (\neg f_e(\psi) \leftrightarrow (f_e(\psi) \to f_e(\varphi))) &= 0 \to (\neg f_e(\psi) \leftrightarrow (f_e(\psi) \to f_e(\varphi))) \\ &= 1.\end{aligned}$$

(b) $f_e(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\neg f_e(\varphi) \to (\neg f_e(\psi) \leftrightarrow (f_e(\psi) \to f_e(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg f_e(\psi) \leftrightarrow (f_e(\psi) \to 0)) \\ &= 1 \to (\neg f_e(\psi) \leftrightarrow (f_e(\psi) \to 0)) \\ &= \neg f_e(\psi) \leftrightarrow (f_e(\psi) \to 0) \\ &= \neg f_e(\psi) \leftrightarrow \neg f_e(\psi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

(21) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

Demonstraţie:

Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $f_e(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) şi $f_e(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 \;=\; \neg e(v_0) \vee e(v_1) \vee e(v_2) = \neg 1 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = 0 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = e(v_1) \vee e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \vee e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \vee e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \vee 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. □

(22) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1 \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \boldsymbol{\to} 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

"$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

$\square$

(23) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie:

Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$	(A3)
(4)	Γ	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \varphi \to \varphi$	
(6)	Γ	$\vdash \psi$	(MP): (4), (5).

$\square$

(24) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(iv) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	(24).(i)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm în continuare (iii).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(1) şi (23)
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	(iii) cu $\varphi := \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

$\square$

(25) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demonstraţie:

$$\begin{array}{lrll}
(1) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \varphi \to \psi & \\
(2) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\psi & \\
(3) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\neg\varphi & \\
(4) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi & (24).(\text{iii}) \\
(5) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \varphi & (\text{MP}): (3), (4) \\
(6) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \psi & (\text{MP}): (1), (5) \\
(7) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) & (24).(\text{ii}) \\
(8) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \psi \to \neg(\varphi \to \varphi) & (\text{MP}): (2), (7) \\
(9) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg(\varphi \to \varphi) & (\text{MP}): (6), (8) \\
(10) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi\} & \vdash \neg\varphi & (9) \text{ şi } (23) \\
(11) & \{\varphi \to \psi\} & \vdash \neg\psi \to \neg\varphi & \text{Teorema deducţiei} \\
(12) & & \vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

□

(26) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)} \\
&\sim \neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
&\sim (\neg\neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
&\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}(v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 &\sim ((v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1)) \vee v_0 && \text{(distributivitate)}\\ &\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0) && \text{(distributivitate)}\\ &\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0), && \text{(idempotenţă)}\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \vee \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\ &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\ &\sim (\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)}\\ &\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)}\\ &\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), && \text{(distributivitate)}\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(27) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi a funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.75 şi 1.77, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.76 şi 1.77, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 1.71.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

$\square$

(28) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că am avea un model e al mulţimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum $e \vDash \{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci $e \nvDash \{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obţinut o contradicţie. Rămâne că mulţimea de clauze din enunţ este nesatisfiabilă.

(ii) Fie evaluarea $e : V \to \{0, 1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulţime, deci este model pentru mulţimea de clauze. Aşadar, mulţimea de clauze din enunţ este satisfiabilă.

$\square$

(29) Să se determine mulţimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

(i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;

(ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;

(iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

Demonstraţie:

(i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.

(ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ şi $L := \neg v_4$, obţinând aşadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

(iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ şi $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

□

(30) Derivaţi prin rezoluţie clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulţimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstraţie: Notăm:

$C_1 := \{v_0, v_4\}$

$C_2 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}$

$C_3 := \{\neg v_4, v_0, v_1\}$

$C_4 := \{\neg v_0, v_3\}$

$C_5 := \{v_0, v_1\}$ (rezolvent al C_1, C_3)

$C_6 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_4)

$C_7 := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_5, C_6)

Avem, aşadar, că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}$. □

(31) Să se deriveze prin rezoluţie clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \to v_2) \wedge (v_0 \to v_1)$$

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile şi aplicând legile de Morgan, obţinem că:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1)\\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1),\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ', a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ şi $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 şi C_2. Cum C_1 şi C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem aşadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ', formulă în FNC echivalentă semantic cu φ. $\square$

(32) Să se arate, folosind rezoluţia, că formula:

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \to v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \to v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \to v_3)$$

este nesatisfiabilă.

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile, obţinem că:

$$\varphi \sim (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ'. Notând:

$$\begin{aligned}C_1 &:= \{v_0, v_2\}\\ C_2 &:= \{\neg v_2, v_1\}\\ C_3 &:= \{\neg v_1\}\\ C_4 &:= \{\neg v_0, v_4\}\\ C_5 &:= \{\neg v_3\}\\ C_6 &:= \{\neg v_4, v_3\}\end{aligned}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{aligned}
C_7 &:= \{\neg v_2\} && \text{(rezolvent al } C_2,\ C_3\text{)}\\
C_8 &:= \{v_0\} && \text{(rezolvent al } C_1,\ C_7\text{)}\\
C_9 &:= \{v_4\} && \text{(rezolvent al } C_4,\ C_8\text{)}\\
C_{10} &:= \{v_3\} && \text{(rezolvent al } C_6,\ C_9\text{)}\\
C_{11} &:= \square && \text{(rezolvent al } C_5,\ C_{10}\text{)}
\end{aligned}$$

avem că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_{11})$ este o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 1.93, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziţia 1.87, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci şi φ, care este echivalentă semantic cu φ', este nesatisfiabilă. $\square$

(33) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$
\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \\
P1.1. & x_1 := v_0 \\
 & T_1^1 := \{\{v_0\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_1 \\
 & T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.4. & i := 3;\ \text{goto } P3.1 \\
P3.1. & x_3 := v_2 \\
 & T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
 & T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\} \\
P3.2. & U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.3. & \mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.4. & i := 4;\ \text{goto } P4.1 \\
P4.1. & x_4 := v_3 \\
 & T_4^1 := \{\{v_3\}\} \\
 & T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P4.2. & U_4 := \{\{v_4, v_6\}\} \\
P4.3. & \mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\} \\
P4.4. & i := 5;\ \text{goto } P5.1 \\
P5.1. & x_5 := v_4 \\
 & T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\} \\
 & T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\} \\
P5.2. & U_5 := \{\{v_5, v_6\}\} \\
P5.3. & \mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\} \\
P5.4. & i := 6;\ \text{goto } P6.1
\end{array}
$$

$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7;$ goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$