CAPITOLUL 2

Algebre Boole

Teoria algebrelor Boole s-a născut ca urmare a descoperirii că între legile logicii şi anumite legi ale calculului algebric există o perfectă analogie. Această descoperire este unanim atribuită lui George Boole (An investigation into the laws of thought, 1854).

Dintre matematicienii care au adus contribuţii mari în dezvoltarea teoriei algebrelor Boole trebuie menţionat în primul rînd M.H. Stone pentru celebra sa teoremă de reprezentare (The theory of representation for Boolean algebras, Trans. A.M.S., 40, 1936, p. 37 - 111) şi pentru teoria dualităţii a algebrelor Boole (Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. A.M.S., 41, 1937, p.375-481). De asemenea, A.Tarski a obţinut rezultate remarcabile atît pe linia algebrică a acestui domeniu, cît mai ales pe linia legăturilor sale cu logica.

Algebrele Boole constituie reflectarea algebrică a calculului propoziţional, fiind modelele algebrice ale calculului propoziţional. Afirmaţia va fi precizată în capitolul următor prin teorema următoare: algebra Lindenbaum-Tarski a sistemului formal al calculului propoziţional este o algebră Boole. In Capitolul IV, metodele folosite pentru demonstrarea completitudinii sistemului formal al calculului predicatelor se vor baza în întregime pe algebrele Boole.

Astăzi, teoria algebrelor Boole se prezintă ca un fragment important al algebrei, avînd puternice conexiuni cu logica, dar fiind un capitol de sine stătător, atît prin rezultatele obţinute în interiorul său cît şi prin aplicaţiile sale în topologie, analiză, calculul probabilităţilor, etc.

Este notoriu însă faptul că cele mai spectaculoase aplicaţii ale algebrelor Boole s-au obţinut în domeniul calculatoarelor electronice şi al disciplinelor învecinate (vezi [7] şi [19]).

Paragraful 1 al acestui capitol prezintă o serie de proprietăţi generale ale laticilor, care sînt structuri mai generale decît algebrele Boole.

In § 2 se dau o serie de definiţii legate de algebrele Boole, se studiază legătura cu inelele Boole, precum şi cîteva proprietăţi ale morfismelor de algebre Boole.

Congruenţele, filtrele şi algebrele Boole cît fac obiectul paragrafului 3. Paragraful 4 este foarte important, conţinînd teoria ultrafiltrelor şi demonstraţia teoremei lui Stone.

Algebrele Boole finite şi produsele directe de algebre Boole sînt prezentate în următoarele două paragrafe. In § 7 se demonstrează că orice două algebre Boole numărabile şi fără atomi sînt izomorfe, iar în § 8 se demonstrează teorema Rasiowa-Sikorski, care va fi folosită în demonstrarea teoremei de completitudine a lui Gödel (vezi Capitolul IV).

§ 1. LATICI

In acest paragraf vom stabili o serie de proprietăţi generale ale laticilor şi ale laticilor distributive.

PROPOZIŢIA 1. Intr-o latice oarecare L sînt verificate următoarele proprietăţi:

(L_1)	$a \wedge a = a,\ a \vee a = a$	(idempotenţa)
(L_2)	$a \wedge b = b \wedge a,\ a \vee b = b \vee a$	(comutativitate)
(L_3)	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	(asociativitate)
(L_4)	$a \wedge (a \vee b) = a,\ a \vee (a \wedge b) = a$	(absorbţie)

<u>Demonstrație</u>. Aceste relații sînt imediate, pe baza definiției infimumului și supremumului. Spre exemplu, să arătăm că $a \wedge (a \vee b) = a$. Conform definiției infimumului, va trebui să demonstrăm că:

$$a \leqslant a, \quad a \leqslant a \vee b$$

$$z \leqslant a, \; z \leqslant a \vee b \Longrightarrow z \leqslant a \wedge (a \vee b)$$

Se observă însă că aceste relații sînt evidente.

Vom stabili acum un rezultat care arată egalitățile (L_1) - (L_4) caracterizează o latice.

<u>PROPOZIȚIA 2</u>: Fie L o mulțime nevidă oarecare înzestrată cu două operații binare $\vee$, $\wedge$ astfel încît orice elemente $a, b, c \in L$ verifică egalitățile (L_1) - (L_4). Atunci pe mulțimea L se poate defini o relație de ordine parțială $\leqslant$ prin

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a,$$

astfel încît $a \wedge b$ (respectiv $a \vee b$) este infimumul (respectiv supremumul) mulțimii $\{a, b\}$ în sensul ordinii astfel definite.

<u>Demonstrație</u>. Verificăm întîi că $\leqslant$ este o relație de ordine parțială:

$a \leqslant a$ rezultă din $a \wedge a = a$

$$a \leqslant b, \; b \leqslant a \Longrightarrow a = a \wedge b, \; b = b \wedge a \Longrightarrow a = b$$

$$a \leqslant b, \; b \leqslant c \Longrightarrow a = a \wedge b, \; b = b \wedge c$$

$$\Longrightarrow a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$$

$$\Longrightarrow a \leqslant c$$

Pentru a arăta că $a \wedge b$ este infimumul mulțimii $\{a,b\}$ va trebui să stabilim relațiile:

$$a \wedge b \leqslant a, \quad a \wedge b \leqslant b$$

$$x \leqslant a, \; x \leqslant b \Longrightarrow x \leqslant a \wedge b.$$

Primele două relații rezultă din

$$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

Cealaltă relație rezultă conform implicației

$$x \wedge a = x, \; x \wedge b = x \Longrightarrow x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a) \wedge b = x \wedge b = x$$

Vom arăta acum că $a \vee b$ este ~~infimumul~~ supremumul mulțimii $\{a,b\}$.

$a \leqslant a \vee b$ rezultă din (L_4) : $a \wedge (a \vee b) = a$ și analog se deduce și $b \leqslant a \vee b$.

Restul rezultă conform implicațiilor:

$$a \leqslant x, \; b \leqslant x \Longrightarrow a \wedge x = a, \; b \wedge x = b$$

$$\Longrightarrow a \vee x = \underbrace{(a \wedge x)}_{a} \vee x = x, \; b \vee x = (b \wedge x) \vee x = x$$

$$\Longrightarrow (a \vee b) \wedge x = (a \vee b) \wedge (a \vee x) = (a \vee b) \wedge [a \vee (b \vee x)] =$$

$$= (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee x] = a \vee b \Longrightarrow a \vee b \leqslant x.$$

Cu aceasta, demonstrația este terminată.

Indicăm cititorului să pună în evidență toate punctele demonstrației în care am folosit relațiile (L_1) - (L_4).

<u>OBSERVAȚIE</u>. Relația de ordine din propoziția precedentă poate fi definită în mod echivalent și prin

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \vee b = b.$$

Intr-o latice avem <u>implicațiile</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \leqslant y \Longrightarrow a \wedge x \leqslant a \wedge y \text{ și } a \vee x \leqslant a \vee y \\ x \leqslant y, \; a \leqslant b \Longrightarrow x \wedge a \leqslant y \wedge b \text{ și } x \vee a \leqslant y \vee b \end{array}}$$

Stabilirea lor este imediată.

Operațiile unei latici finite pot fi descrise prin tabele. Spre exemplu, în mulțimea

$$L = \{o, a, b, 1\}$$

putem defini două operaţii de latice în felul următor:

$\wedge$	o	a	b	1
o	o	o	o	o
a	o	a	o	a
b	o	o	b	b
1	o	a	b	1

$\vee$	o	a	b	1
o	o	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Fie L_1, L_2 două latici. O funcţie $f: L_1 \longrightarrow L_2$ se numeşte <u>morfism de latici</u> dacă pentru orice $x,y \in L_1$, avem

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

Un morfism bijectiv de latici $f: L_1 \longrightarrow L_2$ se numeşte <u>izomorfism de latici</u>. Se mai spune în acest caz că laticile L_1, L_2 sînt izomorfe.

Un element 0 al unei latici L se numeşte <u>element prim</u> dacă $o \leqslant x$, pentru orice $x \in L$. Dual, un <u>element ultim</u> al lui L este definit de: $x \leqslant 1$, pentru orice $x \in L$.

<u>PROPOZIŢIA 3</u>. Intr-o latice L sînt echivalente următoarele trei relaţii

(i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$, pentru orice $x,y,z \in L$.

(ii) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$, pentru orice $x,y,z \in L$.

(iii) $(x \vee y) \wedge z \leqslant x \vee (y \wedge z)$, pentru orice $x,y,z \in L$.

<u>Demonstraţie</u>: <u>(i) $\Longrightarrow$ (ii)</u>. Vom arăta că orice elemente $a,b,c \in L$ verifică (ii).

In (i) vom pune $x = a \vee b$, $y = a$, $z = c$:

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \vee b) \wedge c] && \text{(conform } L_4) \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] && \text{(conform (i))} \\ &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c) && \text{(conform } L_4) \end{aligned}$$

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (iii)</u>. Din $z \leqslant x \vee z$ rezultă

$$(x \vee y) \wedge z \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$$

<u>(iii) $\Longrightarrow$ (i)</u>. Fie a, b, $c \in L$ oarecare. In (iii) facem $x = a$, $y = b$, $z = a \vee c$:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leqslant a \vee [b \wedge (a \vee c)] = a \vee [(a \vee c) \wedge b]$$

Punînd în (iii) $x = a$, $y = c$, $z = b$ rezultă

$$(a \vee c) \wedge b \leqslant a \vee (c \wedge b)$$

deci

$$a \vee [(a \vee c) \wedge b] \leqslant a \vee [a \vee (c \wedge b)] = (a \vee a) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

Din inegalităţile stabilite mai sus obţinem

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leqslant a \vee (b \wedge c)$$

Va fi suficient să stabilim inegalitatea inversă, care este valabilă în orice latice:

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Din $a \leqslant a \vee b$ şi $a \leqslant a \vee c$ rezultă

$$a \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

De asemenea, din $b \leqslant a \vee b$ şi $c \leqslant a \vee c$, rezultă

$$b \wedge c \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Din aceste două inegalităţi se obţine, conform definiţiei supremumului, exact inegalitatea căutată. Demonstraţia este terminată.

<u>Definiţia 1</u>. O latice L care satisface una din condiţiile echivalente (i) - (iii) se numeşte <u>latice distributivă</u>.

Fie L o latice cu element prim o şi cu element ultim 1. Un element $a \in L$ este un <u>complement</u> al lui $b \in L$ dacă

$$a \wedge b = o \quad \text{şi} \quad a \vee b = 1.$$

<u>PROPOZIŢIA 4.</u> Intr-o latice distributivă L orice cu prim și ultim element element poate avea cel mult un complement.

Demonstrație. Presupunem că b, c sînt două elemente ale lui L care verifică egalitățile:

$$a \vee b = 1, \quad a \wedge b = o$$
$$a \vee c = 1, \quad a \wedge c = o\ .$$

Atunci avem

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = o \vee (b \wedge c) = b \wedge c.$$

Analog se arată că $c = b \wedge c$, deci $b = c$.

Intr-o latice distributivă (cu element prim o și cu element ultim 1) L vom nota cu $\neg a$ complementul unui element $a \in L$.

PROPOZITIA 5. Presupunem că în laticea distributivă L, pentru elementele a și b există $\neg a$ și $\neg b$. Atunci există și $\neg(a \wedge b)$, $\neg(a \vee b)$ și care sînt dați de

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b; \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$$

Demonstrație: Conform Propoziției 4, pentru verificarea primei relații este suficient să arătăm că

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = o$$

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1.$$

Aceste relații se obțin astfel:

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) = o \vee o = o$$

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = (a \vee \neg a \vee \neg b) \vee (b \vee \neg a \vee \neg b) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Egalitatea a doua a propoziției se obține în mod dual.

OBSERVATIE. Pentru cunoașterea în adîncime a problemelor fundamentale ale teoriei laticilor, indicăm următoarele cărți de referință: G. Birkhoff, Lattice theory, American Math. Soc., 1967, (ediția a III-a) și G. Grätzer, Lattice theory (First concepts and distributive lattices), San Francisco, 1971.

In cele ce urmează vom nota

$$x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$x \wedge y \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$$

pentru orice elemente x, y, z ale unei latici L.

§ 2. ALGEBRE BOOLE. PROPRIETATI GENERALE

Definiția 1. O algebră Boole este o latice distributivă B cu element prin 0 și cu element ultim 1, astfel încît orice element $x \in B$ are un complement $\neg x$.

EXEMPLE (1). Mulțimea $L_2 = \{o, 1\}$ este o algebră Boole pentru ordinea naturală:

$$o \leq o, \quad o \leq 1, \quad 1 \leq 1.$$

Operațiile lui L_2 sînt date de

$\wedge$	o	1
o	o	o
1	o	1

$\vee$	o	1
o	o	1
1	1	1

; $\neg o = 1$, $\neg 1 = o$.

(2) Mulțimea $\mathscr{P}(X)$ a părților unei mulțimi nevide X este o algebră Boole în care relația de ordine $\leq$ este incluziunea $\subset$. Operațiile lui $\mathscr{P}(X)$ vor fi

$$A \vee B = A \cup B$$

$$A \wedge B = A \cap B$$

$$\neg A = C_X(A).$$

pentru orice $A, B \in \mathscr{P}(X)$. $\emptyset$ este element prim și X este elementul ultim al lui $\mathscr{P}(X)$. Dacă B, B' sînt două algebre Boole, atunci un morfism de algebre Boole este o funcție $f: B \longrightarrow B'$ care satisface proprietățile următoare, pentru orice $x, y \in B$:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$f(\neg x) = \neg f(x)$$

OBSERVAŢIE. (1) Orice morfism de algebre Boole $f: B \longrightarrow B'$ verifică relaţiile:

$$f(o) = o; \quad f(1) = 1.$$

Cum $B \neq \emptyset$, atunci există $x \in B$, deci vom putea scrie:

$$f(o) = f(x \wedge \neg x) = f(x) \wedge \neg f(x) = o$$

$$f(1) = f(x \vee \neg x) = f(x) \vee \neg f(x) = 1$$

(2) Orice morfism de algebre Boole este o aplicaţie izotonă:

$$x \leqslant y \Rightarrow x \wedge y = y \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(y) \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

In cele ce urmează vom arăta că algebre Boole sînt echivalente cu o clasă de inele comutative, numite inele Boole.

Definiţia 2. Se numeşte inel Boole orice inel unitar $(A, +, \cdot, o, 1)$ cu proprietatea că

$x^2 = x$, pentru orice $x \in A$.

Lema 1. Pentru orice două elemente x, y ale unui inel Boole A, avem relaţiile:

$$x + x = o$$

$$xy = yx \qquad \text{(comutativitate)}$$

Demonstraţie. Din

$$x + y = (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 =$$
$$= x + xy + yx + y$$

rezultă

$$xy + yx = o.$$

Făcînd $y = x$, se obţine $x^2 + x^2 = o$, deci $x + x = o$. Pentru orice $z \in A$, vom avea deci $z + z = o$, adică $z = - z$. Luînd $z = xy$, din relaţia stabilită mai sus avem

$$xy = - yx = yx.$$

Dacă A, A' sînt două inele Boole, atunci un morfism de inele Boole $g: A \longrightarrow A'$ este o funcţie $g: A \longrightarrow A'$ cu proprietăţile următoare:

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

$$g(x.y) = g(x).g(y)$$

$$g(1) = 1,$$

pentru orice $x, y \in A$. Cu alte cuvinte, este un morfism de inele unitare.

PROPOZIŢIA 1. Dacă A este un inel Boole, atunci A poate fi organizat ca o algebră Boole $F(A)$:

$$x \vee y = x + y + xy$$

$$x \wedge y = xy$$

$$\neg x = x + 1$$

o este elementul prim al lui $F(A)$

1 este elementul ultim al lui $F(A)$

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow xy = x.$$

LATICE Demonstraţie. Operaţiile astfel definite verifică axiomele (L_1) - (L_4) din § 1. Spre exemplu, să arătăm că $x \vee (x \wedge y) = x$, pentru orice $x \in A$.

$$x \vee (x \wedge y) = x + xy + x\,xy = x + xy + x^2 y = x + (xy + xy) = x + o = x$$

conform Lemei 1. Deci $F(A)$ este o latice. Printr-un calcul simplu se poate arăta că $F(A)$ este distributivă şi că

$o \leqslant x$, $x \leqslant 1$, pentru orice $x \in A$.

Să arătăm că $x + 1$ verifică proprietăţile complementului

$$x \vee (x + 1) = x + x + 1 + x(x + 1) = 2x + 1 + x^2 + x = o + 1 + (x+x)$$
$$= 1 + o = 1$$

$$x \wedge (x + 1) = x(x + 1) = x^2 + x = x + x = o$$

PROPOZITIA 2. Dacă B este o algebră Boole, atunci B poate fi organizată ca un inel Boole G(B) punînd

$$x + y = (x\wedge\neg y)\vee(\neg x\wedge y)$$

$$x.y = x\wedge y$$

pentru orice $x, y\in B$. o şi 1 vor avea semnificaţia naturală.

Demonstraţia este calculatorie şi o lăsăm pe seama cititorului.

PROPOZITIA 3. (i) Dacă $f\colon A \longrightarrow A'$ este un morfism de inele Boole, atunci f este şi un morfism de algebre Boole $f\colon F(A) \longrightarrow F(A')$.

(ii) Dacă $g\colon B \longrightarrow B'$ este un morfism de algebre Boole, atunci g este şi un morfism de inele Boole $g\colon G(B) \longrightarrow G(B')$.

PROPOZITIA 4. Dacă A este un inel Boole şi B este algebră Boole, atunci

(i) A şi G(F(A)) coincid ca inele Boole.

(ii) B şi F(G(B)) coincid ca algebre Boole.

Demonstraţia celor două propoziţii este un exerciţiu util.

Intr-o algebră Boole B se defineşte operaţia de *implicaţie booleană*:

$$\boxed{x \longrightarrow y = \neg x\vee y,} \quad x,y\in B$$

şi operaţia de *echivalenţă booleană*:

$$x \longleftrightarrow y = (x \longrightarrow y)\wedge(y \longrightarrow x), \quad x,y\in B.$$

Se poate arăta că $x \longrightarrow y = 1$ dacă şi numai dacă $x \leqslant y$.

Aceste două operaţii au proprietăţile următoare:

$$x \longrightarrow (y \longrightarrow x) = 1$$

$$(x \longrightarrow (x \longrightarrow y)) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x \longrightarrow y) \longrightarrow ((y \longrightarrow z) \longrightarrow (x \longrightarrow z)) = 1$$

$$(x \longleftrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x \longleftrightarrow y) \longrightarrow (y \longrightarrow x) = 1$$

$$(x \longrightarrow y) \longrightarrow ((y \longrightarrow x) \longrightarrow (x \longleftrightarrow y)) = 1$$

$$(\neg y \longrightarrow \neg x) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x\vee y) \longleftrightarrow (\neg x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x\wedge y) \longleftrightarrow \neg(\neg x\vee\neg y) = 1.$$

$$(x \longleftrightarrow y) = 1 \Longleftrightarrow x = y.$$

Să stabilim, de exemplu, proprietatea a doua:

$$\begin{aligned}(x \longrightarrow (x \longrightarrow y)) \longrightarrow (x \longrightarrow y) &= \neg(x \longrightarrow (x \longrightarrow y))\vee(x \longrightarrow y)\\ &= \neg(\neg x\vee\neg x\vee y)\vee(\neg x\vee y)\\ &= \neg(\neg x\vee y)\vee(\neg x\vee y) = 1.\end{aligned}$$

Lema 2. In orice algebră Boole B avem

(i) $\neg\neg x = x$

(ii) $x\leqslant y \Longleftrightarrow \neg y\leqslant\neg x$

(iii) $x\leqslant y \Longleftrightarrow x\wedge\neg y = o.$

Demonstraţie

(i) Rezultă din unicitatea complementului: $\neg x\vee x = 1$, $\neg x\wedge x = o$.

(ii) $x\leqslant y \Rightarrow x\wedge y = x \Rightarrow \neg x\vee\neg y = \neg x \Rightarrow \neg y\leqslant\neg x$

$\neg y\leqslant\neg x \Rightarrow \neg\neg x\leqslant\neg\neg y$ (conform celor demonstrate)

$\Rightarrow x\leqslant y$ (conform (i))

(iii) $x\leqslant y \Rightarrow x\wedge\neg y\leqslant y\wedge\neg y = o \Rightarrow x\wedge\neg y = o$

$x\wedge\neg y = o \Rightarrow x = x\wedge 1 = x\wedge(y\vee\neg y) = (x\wedge y)\vee(x\wedge\neg y)$

$= (x\wedge y)\vee o = x\wedge y$

$\Rightarrow x\leqslant y$

Un morfism de algebre Boole $f\colon B \longrightarrow B'$ se numeşte *izomorfism de algebre Boole* dacă este bijectiv.

OBSERVATIE. Compunerea a două morfisme (respectiv izomorfisme) de algebre Boole este încă un morfism (respectiv, izomorfism) de algebre Boole. Pentru orice algebră Boole B, aplicaţia $1_B : B \to B$ este un izomorfism de algebre Boole.

PROPOZITIA 5. Fie $f: B \to B'$ un morfism de algebre Boole. Sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) f este izomorfism ;

(ii) f este surjectiv şi pentru orice $x, y \in B$, avem $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$;

(iii) f este inversabilă şi f^{-1} este un morfism de algebre Boole.

Demonstraţie (i) $\Rightarrow$ (ii). Amintim că orice morfism de algebre Boole este o aplicaţie izotonă.

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Presupunem $f(x) \leq f(y)$, deci:

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(x) \Rightarrow f(x \wedge y) = f(x) \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow x \leq y.$$

Am aplicat injectivitatea lui f.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Trebuie să arătăm că f este injectivă:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ şi } f(y) \leq f(x) \Rightarrow x \leq y \text{ şi } y \leq y \Rightarrow x = y.$$

(i) $\Rightarrow$ (iii). Este suficient să arătăm că f^{-1} este morfism de algebre Boole.

Fie $y, y' \in B'$ şi $x = f^{-1}(y) \in B$, $x' = f^{-1}(y') \in B$. Cum f este morfism, rezultă:

$$f(x \vee x') = f(x) \vee f(x')$$

Dar $f(x) = y$, $f(x') = y'$, deci $f(x \vee x') = y \vee y'$, de unde prin aplicarea lui f^{-1} rezultă:

$$f^{-1}(f(x \vee x')) = f^{-1}(y \vee y'), \text{ deci}$$
$$f^{-1}(y \vee y') = x \vee x' = f^{-1}(y) \vee f^{-1}(y')$$

Analog se arată că

$$f^{-1}(y \wedge y') = f^{-1}(y) \wedge f^{-1}(y')$$
$$f^{-1}(\neg y) = \neg f^{-1}(y).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Evidentă.

Definiţia 3. O submulţime nevidă B' a unei algebre Boole B se numeşte subalgebră Boole a lui B dacă:

$$x, y \in B' \Rightarrow x \vee y \in B' \text{ şi } x \wedge y \in B'$$
$$x \in B' \Rightarrow \neg x \in B'.$$

OBSERVATIE. Dacă B' este subalgebră Boole a lui B, atunci $0 \in B'$ şi $1 \in B'$.

Intr-adevăr, cum $B' \neq \emptyset$, există $x \in B'$, deci:

$$0 = x \wedge \neg x \in B';\ 1 = x \vee \neg x \in B'.$$

PROPOZITIA 6. Dacă $f: B \to B'$ este un morfism de algebre Boole şi B_1 este o subalgebră Boole a lui B, atunci $f(B_1)$ este o subalgebră Boole a lui B'. In particular, imaginea f(B) a lui B prin f este o subalgebră Boole a lui B'.

Demonstraţia este imediată.

OBSERVATIE. Dacă $f: B \to B'$ este un morfism de algebre Boole injectiv atunci B este izomorfă cu subalgebra Boole f(B) a lui B'.

Este util să observăm că un morfism de algebre Boole $f: B \to B'$ verifică relaţiile:

$$f(x \to y) = f(x) \to f(y),$$
$$f(x \leftrightarrow y) = f(x) \leftrightarrow f(y),$$

pentru orice $x, y \in B$.

<u>Exercițiu</u>. Pentru ca funcția $f: B \longrightarrow B'$ să fie morfism de algebre Boole este necesar şi suficient ca să avem

$$f(x\vee y) = f(x)\vee f(y) \quad , \quad x, y\in B$$

$$f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y) \quad , \quad x, y\in B$$

$$f(1) = 1;\ f(o) = o.$$

§ 3. <u>FILTRE. ALGEBRE BOOLE CIT</u>.

<u>Definiția 1</u>. Fie B o algebră Boole oarecare. O submulțime <u>nevidă</u> F a lui B se numeşte <u>filtru</u>, dacă pentru orice $x, y\in B$ avem:

(a) $x,y\in F \Rightarrow x\wedge y\in F$

(b) $x\in F,\ x\leq y \Rightarrow y\in F$

Dual, un <u>ideal</u> I al lui B este o submulțime nevidă I a lui B pentru care:

(a') $x, y\in I \Rightarrow x\vee y\in I$

(b') $y\in I,\ x\leq y \Rightarrow x\in I$

<u>OBSERVATIE</u>: Pentru orice filtru F, $1\in F$.

Filtrele unei algebre Boole B se pot pune în corespondență bijectivă cu idealele sale. Unui filtru F i se asociază idealul

$$I_F = \{x\in B \mid \neg x\in F\},$$

iar idealului I i se asociază filtrul.

$$F_I = \{y\in B \mid \neg y\in I\}.$$

Se observă cu uşurință că funcțiile $F \longmapsto I_F$ şi $I \longmapsto F_I$ sînt inverse una celeilalte.

Conform acestei observații, vom studia numai filtrele unei algebre Boole. Pentru ideale, proprietățile respective se vor enunța prin <u>dualizare</u>.

<u>Definiția 2.</u> Fie B o algebră Boole. O relație de echivalență $\sim$ pe B se numeşte <u>congruență</u> dacă

$$x\sim y,\ x'\sim y' \Rightarrow x\vee x' \sim y\vee y'$$

$$x\sim y,\ x'\sim y' \Rightarrow x\wedge x' \sim y\wedge y'$$

$$x\sim y \quad \Rightarrow \quad \neg x\sim\neg y.$$

<u>OBSERVATIE</u>: Dacă $\sim$ este o congruență pe B atunci

$$x\sim y,\ x'\sim y' \Rightarrow \begin{cases} (x\longrightarrow x')\sim(y\longrightarrow y') \\ (x\longleftrightarrow x')\sim(y\longleftrightarrow y') \end{cases}$$

<u>PROPOZITIA 1</u>. Filtrele unei algebre Boole B sînt în corespondență bijectivă cu congruențele sale.

<u>Demonstrație</u>: Fiecărui filtru F al lui B îi asociem următoarea relație binară pe B:

$$x \sim_F y \Longleftrightarrow (x\longleftrightarrow y)\in F.$$

Această relație se poate scrie echivalent

$$x \sim_F y \Longleftrightarrow (x\longrightarrow y)\in F \text{ şi } (y\longrightarrow x)\in F.$$

Intr-adevăr, aplicăm proprietățile filtrului şi $x\longleftrightarrow y = (x\longrightarrow y)\wedge(y\longrightarrow x)$:

$$(x\longrightarrow y)\in F,\ (y\longrightarrow x)\in F \Rightarrow (x\longrightarrow y)\wedge(y\longrightarrow x)\in F \Rightarrow (x\longleftrightarrow y)\in F$$

$$(x\longleftrightarrow y)\in F,\ (x\longleftrightarrow y)\leq(x\longrightarrow y) \Rightarrow (x\longrightarrow y)\in F$$

şi analog

$$(x\longleftrightarrow y)\in F \Rightarrow (y\longrightarrow x)\in F.$$

Vom arăta că $\sim_F$ este o relație de echivalență:

$x \sim_F x$: deoarece $(x\longleftrightarrow x) = 1\in F$.

$x \sim_F y \Rightarrow (x\longleftrightarrow y)\in F \Rightarrow (y\longleftrightarrow x)\in F \Rightarrow y \sim_F x$,

folosind egalitatea evidentă $(x\longleftrightarrow y) = (y\longleftrightarrow x)$.

$$x \sim_F y,\ y \sim_F z \Rightarrow (x\longleftrightarrow y)\in F \text{ şi } (y\longleftrightarrow z)\in F$$

$$\Rightarrow (x\longleftrightarrow y)\wedge(y\longleftrightarrow z)\in F$$

Dar

$$\neg x \vee z = \neg x \vee (y \wedge \neg y) \vee z$$

$$= (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \geqslant (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z),$$

deci avem

$$(x \rightarrow z) \geqslant (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)$$

In mod analog obţinem

$$(z \rightarrow x) \geqslant (z \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x).$$

Din ultimile două relaţii se obţine

$$(x \rightarrow z) \wedge (z \rightarrow x) \geqslant (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \wedge (z \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$$

sau

$$x \leftrightarrow z \geqslant (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z) \in F$$

Rezultă $(x \leftrightarrow z) \in F$, deci $x \sim_F z$.

Relaţia de echivalenţă $\sim_F$ este o congruenţă:

$$\left.\begin{array}{l} x \sim_F y \\ x' \sim_F y' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \vee x' \sim_F y \vee y' \\ x \wedge x' \sim_F y \wedge y' \end{array}\right.$$

$$x \sim_F y \Rightarrow \neg x \sim_F \neg y$$

Presupunînd că $x \sim_F y$, $x' \sim_F y'$, avem $(x \leftrightarrow y) \in F$, $(x' \leftrightarrow y') \in F$, deci $(x \leftrightarrow y) \wedge (x' \leftrightarrow y') \in F$.

Avem inegalităţile:

$$(x \rightarrow y) \wedge (x' \rightarrow y') = (\neg x \vee y) \wedge (\neg x' \vee y') \leqslant$$

$$\leqslant (\neg x \vee y \vee y') \wedge (\neg x' \vee y \vee y') = (\neg x \wedge \neg x') \vee (y \vee y') =$$

$$= \neg (x \vee x') \vee (y \vee y') = (x \vee x') \rightarrow (y \vee y')$$

şi analog

$$(y \rightarrow x) \wedge (y' \rightarrow x') \leqslant (y \vee y') \rightarrow (x \vee x')$$

Din aceste două inegalităţi rezultă:

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge (x' \rightarrow y') \wedge (y' \rightarrow x')$$

$$\leqslant \left[(x \vee x') \rightarrow (y \vee y')\right] \wedge \left[(y \vee y') \rightarrow (x \vee x')\right]$$

adică

$$(x \leftrightarrow y) \wedge (x' \leftrightarrow y') \leqslant (x \vee x') \leftrightarrow (y \vee y').$$

Va rezulta $\left[(x \vee y) \leftrightarrow (x' \vee y')\right] \in F$, deci $x \vee x' \sim_F y \vee y'$.

Presupunem acum că $x \sim_F y$, deci $(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x) = (x \leftrightarrow y) \in F$, de unde rezultă

$$(\neg x \leftrightarrow \neg y) = (\neg\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg\neg y \vee \neg x) = (x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg x) =$$

$$= (x \leftrightarrow y) \in F.$$

Aşadar am arătat că $\neg x \sim_F \neg y$.

Fie $x \sim_F y$ şi $x' \sim_F y'$. Conform celor arătate, $\neg x \sim_F \neg y$ şi $\neg x' \sim_F \neg y'$, deci

$$(\neg x \vee \neg x') \sim_F (\neg y \vee \neg y')$$

$$\neg (x \wedge x') \sim_F \neg (y \wedge y')$$

Din aceasta se obţine $\neg\neg(x \wedge x') \sim_F \neg\neg(y \wedge y')$, adică $x \wedge x' \sim_F y \wedge y'$. Cu aceasta, am stabilit că $\sim_F$ este o congruenţă.

Reciproc, unei congruenţe $\sim$ îi asociem filtrul

$$\tilde{F} = \{x \in B \mid x \sim 1\}.$$

Intr-adevăr, $\tilde{F}$ este filtru:

$$x, y \in \tilde{F} \Rightarrow x \sim 1,\ y \sim 1 \Rightarrow x \wedge y \sim 1 \wedge 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \wedge y \sim 1 \Rightarrow x \wedge y \in \tilde{F}$$

$$x \leqslant y,\ x \in \tilde{F} \Rightarrow x \vee y = y,\ x \sim 1.$$

$$\Rightarrow y = x \vee y \sim 1 \vee y = 1 \quad \text{(pentru că } y \sim y\text{)}$$

$$\Rightarrow y \in \tilde{F}.$$

Observăm că $\tilde{F} \neq \emptyset$, deoarece $1 \sim 1 \Rightarrow 1 \in \tilde{F}$.

Dacă $\mathcal{F}_B$ este mulțimea filtrelor lui B și $\mathcal{C}_B$ este mulțimea congruențelor lui B, atunci considerăm aplicațiile :

$\Phi : \mathcal{F}_B \to \mathcal{C}_B$, $\Psi : \mathcal{C}_B \to \mathcal{F}_B$ definite astfel:

$\Phi(F) = \sim_F$, pentru orice $F \in \mathcal{F}_B$

$\Psi(\sim) = \tilde{F}$, pentru orice $\sim$ din $\mathcal{C}_B$.

Vom arăta că Φ, Ψ sînt inverse una celeilalte:

$$\Psi(\Phi(F)) = F$$

$$\Phi(\Psi(\sim)) = \sim$$

Intr-adevăr, avem relațiile:

$$\begin{aligned} \Psi(\Phi(F)) = \Psi(\sim_F) &= \{x \mid x \sim_F 1\} \\ &= \{x \mid (x \leftrightarrow 1) \in F\} \\ &= \{x \mid x \in F\} = F, \end{aligned}$$

deoarece $(x \leftrightarrow 1) = (\neg x \vee 1) \wedge (0 \vee x) = 1 \wedge x = x$

Pentru stabilirea celeilalte relații, observăm că $\Phi(\Psi(\sim)) = \sim_{\tilde{F}}$, deci

$$x \sim_{\tilde{F}} y \iff (x \leftrightarrow y) \in \tilde{F}$$

Dacă $(x \leftrightarrow y) \in \tilde{F}$, atunci $(x \to y) \in \tilde{F}$ și $(y \to x) \in \tilde{F}$. Conform proprietăților congruențelor avem:

$$\begin{aligned} (x \to y) \in \tilde{F} &\Rightarrow \neg x \vee y \sim 1 \\ &\Rightarrow (\neg x \vee y) \wedge x \sim 1 \wedge x \\ &\Rightarrow (\neg x \wedge x) \vee (x \wedge y) \sim x \\ &\Rightarrow x \wedge y \sim x \end{aligned}$$

și analog

$$(y \to x) \in \tilde{F} \Rightarrow x \wedge y \sim y$$

Din $x \wedge y \sim x$, $x \wedge y \sim y$, rezultă $x \sim y$. Așadar a rezultat

$$x \sim_{\tilde{F}} y \Rightarrow x \sim y$$

Reciproc,

$$x \sim y \Rightarrow (x \leftrightarrow y) \sim (y \leftrightarrow y) \Rightarrow (x \leftrightarrow y) \sim 1 \Rightarrow (x \leftrightarrow y) \in \tilde{F} \Rightarrow x \sim_{\tilde{F}} y,$$

deoarece $y \leftrightarrow y = (\neg y \vee y) = 1$.

Am arătat că

$$x \sim_{\tilde{F}} y \iff x \sim y,$$

adică $\Phi(\Psi(\sim)) = \sim$. Demonstrația este încheiată.

Fie F un filtru în algebra Boole B. Considerăm mulțimea cît $B/\sim_F$ înzestrată cu operațiile

$$\hat{x} \vee \hat{y} = \widehat{x \vee y}$$

$$\hat{x} \wedge \hat{y} = \widehat{x \wedge y}$$

$$\neg \hat{x} = \widehat{\neg x}$$

și cu elementul $\hat{0}$ și $\hat{1}$.

Conform proprietăților congruenței, aceste definiții nu depind de reprezentanți:

$$\left.\begin{aligned} x \sim_F x' \\ y \sim_F y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x \vee y) \sim_F (x' \vee y') \\ (x \wedge y) \sim_F (x' \wedge y') \end{cases}$$

$$x \sim_F x' \Rightarrow \neg x \sim_F \neg x'$$

PROPOZIȚIA 2. Mulțimea $B/_F = B/\sim_F$ înzestrată cu operațiile de mai sus este o algebră Boole.

Demonstrație: Direct din definiția operațiilor lui $B/_F$ și din proprietățile de algebră Boole ale lui B.

$B/_F$ se numește algebra Boole cît a lui B prin filtrul F.

Se poate arăta că surjecția canonică $p : B \to B/_F$ definită după cum știm: $x \mapsto \hat{x}$, este un morfism de algebre Boole.

PROPOZIȚIA 3. Fie $f : B \to B'$ un morfism de algebre Boole.

(a) $F_f = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$ este un filtru al lui B.

(b) f este injectivă $\Longleftrightarrow F_f = \{1\} \Longleftrightarrow \{x \mid f(x) = 0\} = \{0\}$.

(c) f(B) este o subalgebră Boole a lui B' izomorfă cu $B/_{F_f}$

<u>Demonstrație</u>: (a) F_f are proprietățile filtrului:

$x, y \in F_f \Longrightarrow f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 1 \wedge 1 = 1 \Longrightarrow x \wedge y \in F_f$.

$x \leqslant y,\ x \in F_f \Longrightarrow 1 = f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow f(y) = 1 \Longrightarrow y \in F_f$.

$f(1) = 1 \Longrightarrow 1 \in F_f \Longrightarrow F_f \neq \emptyset$.

(b) Presupunem f injectivă. Implicațiile

$x \in F_f \Longrightarrow f(x) = 1 = f(1) \Longrightarrow x = 1$

ne dau incluziunea $F_f \subset \{1\}$. Cealaltă incluziune este evidentă.

Dacă $F_f = \{1\}$, atunci avem

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(y) &\Longrightarrow f(x \vee \neg y) = f(x) \vee \neg f(y) = 1 \\
&\Longrightarrow x \vee \neg y = 1 \\
&\Longrightarrow \neg x \wedge y = \neg(x \wedge \neg y) = 0 \\
&\Longrightarrow y \leqslant x
\end{aligned}
$$

Analog se arată că

$f(x) = f(y) \Longrightarrow x \leqslant y$,

deci $x = y$. Am demonstrat că f este injectivă. Cealaltă echivalență este evidentă.

(c) Considerăm aplicația $g: B/_{F_f} \longrightarrow f(B)$ definită astfel:

$g(\hat{x}) = f(x) \in f(B)$, pentru orice $\hat{x} \in B/_{F_f}$.

Definiția lui g nu depinde de reprezentanți:

$$
\begin{aligned}
x \sim y &\Longrightarrow (x \longleftrightarrow y) \in F_f \\
&\Longrightarrow (f(x) \longleftrightarrow f(y)) = f(x \longleftrightarrow y) = 1 \\
&\Longrightarrow f(x) = f(y)
\end{aligned}
$$

g este un morfism de algebre Boole:

$$g(\hat{x} \vee \hat{y}) = g(\widehat{x \vee y}) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = g(\hat{x}) \vee g(\hat{y})$$

Analog se arată că

$$g(\hat{x} \wedge \hat{y}) = g(\hat{x}) \wedge \hat{g}(y); \quad g(\neg \hat{x}) = \neg g(\hat{x}),$$

g este injectivă:

Conform (b), este suficient să arătăm că $F_g = \{\hat{1}\}$

$$
\begin{aligned}
x \in F_g &\Longrightarrow g(\hat{x}) = 1 \Longrightarrow f(x) = 1 \Longrightarrow x \in F_f \\
&\Longrightarrow (x \longleftrightarrow 1) = x \in F_f \Longrightarrow x \sim_{F_f} 1 \Longrightarrow \hat{x} = \hat{1}
\end{aligned}
$$

Am arătat că $F_g \subset \{\hat{1}\}$, deci $F_g = \{\hat{1}\}$,

g este în mod evident și surjectivă: pentru orice $y = f(x) \in f(B)$, avem elementul $\hat{x} \in B/_{F_f}$ pentru care

$$g(\hat{x}) = f(x) = y,$$

<u>Corolar</u>: Dacă $f: B \longrightarrow B'$ este un morfism surjectiv de algebre Boole, atunci B' este izomorfă cu $B/_{F_f}$.

§ 4. <u>TEOREMA DE REPREZENTARE A LUI STONE</u>

Scopul acestui paragraf este de-a demonstra că <u>orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole ale cărei elemente sînt părți ale unei mulțimi</u>. Acest rezultat ocupă un loc central în teoria algebrelor Boole și are importante aplicații în logică, calculul probabilităților (vezi [6]), în topologie etc. Instrumentul principal folosit în demonstrația acestei teoreme va fi conceptul de <u>ultrafiltru</u>.

Fie B o algebră Boole, fixată pentru întreg paragraful. Un filtru F al lui B este <u>propriu</u> dacă $F \neq B$.

<u>OBSERVAȚIE</u>. F este propriu $\Longleftrightarrow 0 \notin F$.

PROPOZIŢIA 1. Dacă $(F_i)_{i\in I}$ este o familie de filtre ale lui B, atunci $\bigcap_{i\in I} F_i$ este un filtru al lui B.

Demonstraţie:
$$x,y\in \bigcap_{i\in I} F_i \Rightarrow x,y\in F_i, \text{ pentru orice } i\in I$$
$$\Rightarrow x\wedge y\in F_i, \text{ pentru orice } i\in I$$
$$\Rightarrow x\wedge y\in \bigcap_{i\in I} F_i$$

Analog se stabileşte şi cealaltă proprietate din definiţia unui filtru.

Definiţia 1. Dacă X este o submulţime, atunci filtrul generat de X este intersecţia tuturor filtrelor ce includ pe X:
$$\{F \mid F \text{ filtru}, X\subset F\}$$

Filtrul generat de X va fi notat (X).

PROPOZIŢIA 2. Dacă $X \neq \emptyset$, atunci
$$(X) = \{y\in B \mid \text{există } x_1,\dots,x_n\in X, \text{ astfel încît } x_1\wedge\dots\wedge x_n\leq y\}$$

Demonstraţie: Dacă F_o este mulţimea din dreapta, va trebui să arătăm că

(i) F_o este filtru

(ii) $X\subset F_o$

(iii) Pentru orice filtru F al lui B, avem
$$X\subset F \Rightarrow F_o\subset F.$$

Dacă

$y_1, y_2\in F_o$, atunci există

$x_1,\dots,x_n\in X$ şi $z_1,\dots,z_n\in X$

astfel încît

$x_1\wedge\dots\wedge x_n \leq y_1$ şi $z_1\wedge\dots\wedge z_n\leq y_2$

Rezultă

$x_1\wedge\dots\wedge x_n\wedge z_1\wedge\dots\wedge z_n\leq y_1\wedge y_2$,

deci $y_1\wedge y_2\in F_o$. Analog se arată că:
$$y_1\leq y_2,\ y_1\in F_o \Rightarrow y_2\in F_o,$$
deci F_o este filtru.

Proprietatea (ii) este evidentă. Presupunem acum că F este un filtru astfel încît $X\subset F$, deci
$$y\in F_o \Rightarrow \text{există } x_1,\dots,x_n\in X,\ x_1\wedge\dots\wedge x_n\leq y$$
$$\Rightarrow \text{există } x_1\wedge\dots\wedge x_n\in F,\ x_1\wedge\dots\wedge x_n\leq y$$
$$\Rightarrow y\in F,$$
ceea ce arată că $F_o\subset F$. Propoziţia este demonstrată.

Fie $\mathscr{F}(B)$ mulţimea filtrelor proprii ale lui B. $\mathscr{F}(B)$ este o mulţime parţial ordonată în raport cu incluziunea $\subset$.

Definiţia 2: Un element maximal al mulţimii parţial ordonate $(\mathscr{F}(B),\subset)$ se numeşte ultrafiltru.

Cu alte cuvinte, un ultrafiltru este un filtru propriu F al lui B cu proprietatea că pentru orice filtru propriu F', avem
$$F\subset F' \Rightarrow F = F'.$$

PROPOZIŢIA 3. Pentru orice filtru propriu F există un ultrafiltru F_o astfel încît $F\subset F_o$.

Demonstraţie. Fie Σ mulţimea filtrelor proprii ale lui B ce includ pe F.
$$\Sigma = \{F' \mid F' \text{ filtru propriu şi } F\subset F'\}$$

Cum $F\subset F$, avem $F\in\Sigma$, deci $\Sigma\neq\emptyset$. Considerăm mulţimea parţial ordonată $(\Sigma,\subset)$. Vom arăta că $(\Sigma,\subset)$ este inductivă. Pentru aceasta, fie $(F_i)_{i\in I}$ o familie total ordonată de filtre din Σ:

pentru orice $i,j\in I$, $F_i\subset F_j$ sau $F_j\subset F_i$.

Demonstrăm că familia $(F_i)_{i\in I}$ admite un majorant. Fie $F' = \bigcup_{i\in I} F_i$. Atunci F' este filtru:

$x,y\in F' \Rightarrow \exists\, i,j\in I$, astfel încît $x\in F_i, y\in F_j$.

Presupunînd, de exemplu, $F_i\subset F_j$, rezultă $x,y\in F_j$, deci $x\wedge y\in F_j$. Se deduce că $x\wedge y\in\bigcup_{i\in I}F_i = F'$.

Analog se stabilește cealaltă proprietate din definiția filtrului. Observăm că $F\subset F'$, deci $F'\in\Sigma$. Însă

$F_i\subset F'$, pentru orice $i\in I$,

deci F' este un majorant al familiei total ordonate $(F_i)_{i\in I}$. Așadar $(\Sigma,\subset)$ este inductivă.

Aplicînd <u>axioma lui Zorn</u>, rezultă existența unui element maximal al lui $(\Sigma,\subset)$, adică a unui ultrafiltru $F_0\supset F$.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Este primul exemplu în care am folosit explicit axioma lui Zorn.

<u>Corolar</u>: Dacă $x\neq 0$, atunci există un ultrafiltru F_0 astfel încît $x\in F_0$.

<u>Demonstrație</u>: $F=\{y\in B \mid x\leq y\}$ este un filtru propriu al lui B.

<u>Definiția 3</u>. Un filtru propriu F al lui B se numește <u>prim</u> dacă:

$$x\vee y\in F \Rightarrow x\in F \text{ sau } y\in F.$$

Teorema următoare caracterizează ultrafiltrele algebrei Boole B.

<u>PROPOZIȚIA 4</u>. Fie F un filtru propriu al lui B. Sînt echivalente următoarele afirmații:

(i) F este ultrafiltru;

(ii) F este filtru prim;

(iii) Pentru orice $x\in B$, avem $x\in F$ sau $\neg x\in F$;

(iV) Algebra Boole cît $B/_F$ este izomorfă cu $L_2=\{0,1\}$.

<u>Demonstrație</u> <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Presupunem prin absurd că F nu este prim, deci există x, $y\in B$, astfel încît $x\vee y\in F$, dar $x\notin F$, $y\notin F$. Atunci

$$F\subsetneq (F\cup\{x\})\Rightarrow (F\cup\{x\}) = B\Rightarrow 0\in(F\cup\{x\})$$

și analog $0\in(F\cup\{y\})$.

Aplicînd propoziția 2, din $0\in(F\cup\{x\})$ se deduce existența unui element $a\in F$, astfel încît $a\wedge x\leq 0$, deci $a\wedge x = 0$. Analog, există $b\in F$, astfel încît $b\wedge y = 0$. Rezultă

$$0 = (a\wedge x)\vee(b\wedge y) = (a\vee b)\wedge(a\vee y)\wedge(x\vee b)\wedge(x\vee y)$$

Însă din relațiile

$a\in F$, ~~$b\in F$~~ $a\leq a\vee b$ $\Rightarrow a\vee b\in F$

$a\in F$, $a\leq a\vee y \Rightarrow a\vee y\in F$

$b\in F$, $b\leq x\vee b\Rightarrow x\vee b\in F$

$x\vee y\in F$

se obține

$$(a\vee b)\wedge(a\vee y)\wedge(x\vee b)\wedge(x\vee y)\in F,$$

deci $0\in F$, ceea ce contrazice faptul că F este propriu. Deci F este ~~propriu~~ prim.

(ii) ⇒ (iii) Din $x\vee\neg x = 1\in F$, rezultă $x\in F$ sau $\neg x\in F$.

(iii) ⇒ (iV) Aplicația $f: B\to L_2$, definită astfel:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in F\\ 0, & \text{dacă } x\notin F\end{cases}$$

este un morfism de algebre Boole. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} f(x\wedge y) = 1 &\Leftrightarrow x\wedge y\in F\\ &\Leftrightarrow x\in F \text{ și } y\in F \qquad (F \text{ este filtru})\\ &\Leftrightarrow f(x)=1 \text{ și } f(y)=1, \end{aligned}$$

deci $f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$, pentru orice $x,y\in B$.

De asemenea:

$$\begin{aligned} f(\neg x) = 1 &\iff \neg x \in F \\ &\iff x \notin F \qquad \text{(conform (iii)).} \\ &\iff f(x) = o \\ &\iff \neg f(x) = 1, \end{aligned}$$

de unde rezultă $f(\neg x) = \neg f(x)$, pentru orice $x, y \in B$.

Cum $1 \in F$, avem $f(1) = 1$. Din $o \notin F$, rezultă $f(o) = o$. Pentru orice $x, y \in B$, vom avea

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f(\neg(\neg x \wedge \neg y)) = \neg f(\neg x \wedge \neg y) = \neg(f(\neg x) \wedge f(\neg y)) = \\ &= \neg(\neg f(x) \wedge \neg f(y)) = f(x) \vee f(y) \end{aligned}$$

deci f este morfism de algebre Boole.

Cum $f(1) = 1$, $f(o) = o$, f este surjectiv. Aplicînd corolarul Propoziţiei 2,§3, rezultă că $B/_{F_f}$ este izomorfă cu L_2.

Dar

$$\begin{aligned} F_f &= \{x \in B \mid f(x) = 1\} \\ &= \{x \in B \mid x \in F\} = F, \end{aligned}$$

deci $B/_F$ şi L_2 sînt izomorfe.

<u>(iv) $\Longrightarrow$ (i)</u>. Fie $f: B/_F \longrightarrow L_2$ un izomorfism de algebre Boole. Presupunem prin absurd că F nu este propriu, deci $o \in F$. Cum $(o \longrightarrow 1) = o \in F$, rezultă $o \sim_F 1$, deci

$\hat{o} = \hat{1}$. Am avea $f(\hat{o}) = f(\hat{1})$, deci $o = 1$ în algebra Boole $\{o,1\}$ ceea ce este absurd. Deci F este propriu.

Presupunem că există un filtru propriu F', astfel încît $F \subsetneq F'$. Fie $x \in F' - F$.

Dacă $f(\hat{x}) = 1 = f(\hat{1})$, atunci $\hat{x} = \hat{1}$, deci

$$x = (x \longrightarrow 1) \in F,$$

ceea ce este o contradicţie. Aşadar $f(\hat{x}) = o = f(\hat{o})$, deci $\hat{x} = \hat{o}$. Rezultă

$$\neg x = (x \longrightarrow o) \in F \subset F'$$

Din $x \in F'$, $\neg x \in F'$ se obţine $o = x \wedge \neg x \in F'$, ceea ce ar fi în contradicţie cu faptul că F' este propriu. Deci F este ultrafiltru.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm teorema de reprezentare a lui Stone.

<u>PROPOZIŢIA 5 (Stone)</u>. Pentru orice algebră Boole B, există o mulţime nevidă X şi un morfism de algebre Boole injectiv $f: B \longrightarrow \mathscr{P}(X)$.

<u>Demonstraţie</u>. Vom nota cu X mulţimea ultrafiltrelor lui B şi cu $f: B \longrightarrow \mathscr{P}(X)$, funcţia definită astfel:

$$f(x) = \{F \in X \mid x \in F\}$$

Pentru orice $x, y \in B$, avem echivalenţele:

$$\begin{aligned} F \in f(x \vee y) &\iff x \vee y \in F \\ &\iff x \in F \text{ sau } y \in F \qquad \text{(F este prim)} \\ &\iff F \in f(x) \text{ sau } F \in f(y) \\ &\iff F \in f(x) \cup f(y) \\ F \in f(x \wedge y) &\iff x \wedge y \in F \\ &\iff x \in F \text{ şi } y \in F \qquad \text{(F este filtru)} \\ &\iff F \in f(x) \text{ şi } F \in f(y) \\ &\iff F \in f(x) \cap f(y) \\ F \in f(\neg x) &\iff \neg x \in F \\ &\iff x \notin F \qquad \text{(Propoziţia 3,(iii)} \\ &\iff F \notin f(x) \\ &\iff F \in \complement_X f(x) \end{aligned}$$

Am arătat deci că

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$$

$$f(\neg x) = \complement_X f(x)$$

Pentru a arăta că f este injectivă, vom proba că $F_f = \{1\}$ (vezi Propoziţia 3, (b), § 3). Presupunem $f(x) = X$, deci $f(\neg x) = \emptyset$.

Dacă $x \neq 1$, atunci $\neg x \neq o$. Aplicînd corolarul Propoziţiei 3 rezultă un ultrafiltru F astfel încît $\neg x \in F$, deci $F \in f(\neg x) = \emptyset$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar $x = 1$.

<u>OBSERVATIE</u>: Teorema lui Stone se poate enunţa şi astfel: <u>„Orice algebră Boole B este izomorfă cu o subalgebră Boole a unei algebre Boole de forma $\mathcal{P}(X)$".</u>

§ 5. <u>ALGEBRE BOOLE FINITE</u>

<u>Definiţia 1</u>. Fie B o algebră Boole. Un element $x \in B$ se numeşte <u>atom</u> dacă $x \neq o$ şi dacă pentru orice $y \in B$, avem implicaţia

$$o \leq y \leq x \Rightarrow y = o \text{ sau } y = x.$$

Algebra Boole B se numeşte <u>atomică</u> dacă pentru orice $x \in B$ diferit de o există un atom a, astfel încît $a \leq x$. B se numeşte <u>fără atomi</u> dacă nu are nici un atom.

<u>Exemplu</u>: Intr-o algebră Boole de forma $\mathcal{P}(X)$, orice parte de forma $\{x\}$, $x \in X$ este un atom.

Noţiunea de atom ne va fi necesară în caracterizarea algebrelor Boole finite.

<u>PROPOZITIA 1</u>. Orice algebră Boole finită este atomică.

<u>Demonstraţie</u>. Fie B o algebră Boole finită care nu este atomică, deci există $a_o \in B$, $a_o \neq o$ şi pentru care nu există nici un atom $\leq a_o$.

Construim prin inducţie un şir strict descrescător

$$a_o > a_1 > \dots > a_n > \dots > o.$$

Intr-adevăr, presupunînd că $a_o > a_1 > \dots > a_n$, atunci există a_{n+1}, cu proprietatea că $a_n > a_{n+1} > o$ (dacă nu ar exista nici un element a_{n+1} cu această proprietate, ar rezulta că a_n este un atom şi $a_n < a_o$, ceea ce contrazice ipoteza făcută). Dar existenţa şirului strict descrescător $a_o > a_1 > \dots > a_n > \dots o$ contrazice faptul că B este finită. Deci B este atomică.

<u>PROPOZITIA 2</u>. Dacă B este o algebră Boole finită cu n atomi $a_1, \dots, a_n$, atunci B este izomorfă cu $\mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_n\})$.

<u>Demonstraţie</u>: Fie $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Considerăm funcţia $f : B \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ definită de

$$f(x) = \{a \in A \mid a \leq x\}, \text{ pentru orice } x \in B.$$

Arătăm că

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y).$$

Incluziunea $f(x) \cup f(y) \subset f(x \vee y)$ este evidentă:

$$a \in f(x) \cup f(y) \Rightarrow a \leq x \text{ sau } a \leq y \Rightarrow a \leq x \vee y \Rightarrow a \in f(x \vee y)$$

Presupunînd prin absurd că incluziunea cealaltă nu are loc, va exista $a \in f(x \vee y)$ şi $a \notin f(x)$, $a \notin f(y)$. Atunci avem $a \not\leq x$, $a \not\leq y$, deci $a \wedge x < a$, $a \wedge y < a$

Cum a este atom, rezultă $a \wedge x = o$ şi $a \wedge y = o$, deci

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) = o$$

Din $a \in f(x \vee y)$ rezultă $a \leq x \vee y$, deci $a \wedge (x \vee y) = a$. Ar rezulta $a = o$, ceea ce contrazice faptul că a este atom. Deci şi incluziunea cealaltă este adevărată.

Vom stabili acum egalitatea $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$:

$$a \in f(x \wedge y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge y$$

$$\Leftrightarrow a \leq x \text{ şi } a \leq y \quad \text{(conform definiţiei infimului)}$$

$$\Leftrightarrow a \in f(x) \text{ şi } a \in f(y)$$

$$\Leftrightarrow a \in f(x) \cap f(y)$$

Avem şi relaţiile:

$f(o) = \emptyset$: deoarece nu există nici un atom a astfel încît $a \leqslant o$.

$f(1) = A$: deoarece $a \leqslant 1$, pentru orice $a \in A$.

Am demonstrat că f este morfism de algebre Boole.

Pentru a arăta că f este injectiv este suficient să arătăm că:

$$f(x) = X \Longrightarrow x = 1$$

sau, echivalent,

$$f(x) = \emptyset \Longrightarrow x = o$$

Presupunînd $x \neq o$, atunci, B fiind atomică, există $a \in A$ astfel încît $a \leqslant x$, deci $a \in f(x)$. Cu alte cuvinte, $x \neq o \Rightarrow f(x) \neq \emptyset$.

A rămas să arătăm surjectivitatea lui f. Fie $X \subset A$, deci X are forma

$$X = \left\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\right\}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

Notăm $x = a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_k}$. Vom arăta că $f(x) = X$.

Din $a_{i_1} \leqslant x, \ldots, a_{i_k} \leqslant x$ rezultă $a_{i_1} \in f(x), \ldots, a_{i_k} \in f(x)$, deci $X \subset f(x)$. Presupunînd $a \in f(x)$, avem $a \leqslant x$, deci

$$a = a \wedge x = a \wedge \left[a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_k}\right] = \left(a \wedge a_{i_1}\right) \vee \ldots \vee \left(a \wedge a_{i_k}\right)$$

Există un indice $j \in \left\{i_1, \ldots, i_k\right\}$, astfel încît $a \wedge a_j \neq 0$. Altfel, am avea

$$a \wedge a_{i_1} = \ldots = a \wedge a_{i_k} = o \Longrightarrow a = o \qquad \text{(absurd)}$$

Cum a, a_j sînt atomi, rezultă $a = a_j$. Intr-adevăr, dacă $a \neq a_j$ am avea $o < a \wedge a_j < a$, ceea ce contrazice faptul că a este atom. Aşadar $a = a_j \in X$, ceea ce stabileşte incluziunea $f(x) \subset X$.

In concluzie, f este un izomorfism.

<u>PROPOZITIA 3</u>. Pentru orice algebră Boole B, sînt echivalente afirmaţiile:

(i) B este atomică.

(ii) Pentru orice $a \in B$, avem

$$a = \bigvee\left\{x \mid x \leqslant a,\ x \text{ atom al lui } B\right\}$$

<u>Demonstraţie</u> <u>(i) ⟹ (ii)</u>. Fie $a \in B$. Este evident că a este un majorant al familiei

$$X_a = \left\{x \mid x \leqslant a,\ \ x \text{ atom al lui } B\right\}.$$

Presupunem că b este un alt majorant al acestei familii. Dacă $a \nleqslant b$, atunci $a \wedge \neg b \neq o$, deci există un atom x cu $x \leqslant a \wedge \neg b$. Atunci $x \leqslant a$, deci $x \in X_a$, de unde rezultă că $x \leqslant b$. Am obţinut contradicţia $x \leqslant b \wedge \neg b = o$, deci $a \leqslant b$.

Am arătat că a este cel mai mic majorant al lui X_a .

<u>(ii) ⟹ (i)</u>. Evident.

<u>Corolar</u>. Dacă B este atomică şi are un număr finit de atomi, atunci B este finită.

<u>Demonstraţie</u>. Conform propoziţiei precedente, orice element $a \in B$ este supremumul mulţimii X_a a atomilor $\leqslant a$. Din ipoteză rezultă că X_a este totdeauna o submulţime a unei mulţimi finite, deci B este finită.

<u>Exerciţiu</u>. Fie A, B două algebre Boole finite. Atunci A, B sînt izomorfe dacă şi numai dacă card A = card B.

<u>Indicaţie</u>: Se aplică Propoziţia 2.

§ 6. <u>PRODUS DIRECT DE ALGEBRE BOOLE</u>

Dacă $(B_i)_{i \in I}$ este o familie de algebre Boole, atunci produsul cartezian $\prod_{i \in I} B_i$ poate fi înzestrat cu următoarele operaţii:

$$(x_i)_{i \in I} \vee (y_i)_{i \in I} = (x_i \vee y_i)_{i \in I}$$

$$(x_i)_{i \in I} \wedge (y_i)_{i \in I} = (x_i \wedge y_i)_{i \in I}$$

$$\neg (x_i)_{i \in I} = (\neg x_i)_{i \in I}.$$

Considerăm în $\prod_{i\in I} B_i$ elementele 0 şi 1 definite de:

$0 = (x_i)_{i\in I}$, cu $x_i = 0\in B_i$, pentru orice $i\in I$

$1 = (x_i)_{i\in I}$, cu $x_i = 1\in B_i$, pentru orice $i\in I$.

PROPOZIŢIA 1. $\prod_{i\in I} B_i$ este o algebră Boole faţă de operaţiile introduse mai sus.

Demonstraţie: Se verifică foarte simplu proprietăţile din definiţia algebrei Boole.

$\prod_{i\in I} B_i$ se numeşte produsul direct al familiei $(B_i)_{i\in I}$.

Observaţie: Proiecţiile canonice $\pi_i: \prod_{i\in I} B_i \to B_i$, $i\in I$ sînt morfisme de algebre Boole.

PROPOZIŢIA 2. Fie $(B_i)_{i\in I}$ o familie de algebre Boole. Atunci pentru orice algebră Boole A şi pentru orice familie de morfisme de algebre Boole $\{f_i: A \to B_i\}_{i\in I}$ există un unic morfism de algebre Boole $f: A \to \prod_{i\in I} B_i$ astfel încît următoarele diagrame sînt comutative. $f_i = \pi_i \circ f,\ i\in I$

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & B_i \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd} \quad (i\in I)$$

unică

Demonstraţie. Din Cap.I, § 5, Propoziţia 1 ştim că există o ~~aică~~ aplicaţie $f: A \to \prod_{i\in I} B_i$, definită

$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i$$

care face comutativă diagrama de mai sus.

Rămîne de arătat că f este morfism de algebre Boole. Vom proba numai că

$f(x\vee y) = f(x)\vee f(y)$, pentru orice $x,y\in A$.

Intr-adevăr, avem:

$$f(x\vee y) = \left(f_i(x\vee y)\right)_{i\in I} = \left(f_i(x)\vee f_i(y)\right)_{i\in I} =$$
$$= \left(f_i(x)\right)_{i\in I}\vee\left(f_i(y)\right)_{i\in I} = f(x)\vee f(y).$$

Rezultatul următor arată că Propoziţia 2 caracterizează produsul direct de algebre Boole.

PROPOZIŢIA 3. Fie $(B_i)_{i\in I}$ o familie oarecare de algebre Boole. Considerăm o algebră Boole B şi o familie de morfisme de algebre Boole $\left\{p_i: B \to B_i\right\}_{i\in I}$ cu următoarea proprietate:

(*) Pentru orice algebră Boole A şi pentru orice familie de morfisme de algebre Boole $\{f_i: A \to B_i\}_{i\in I}$ există un unic ~~aic~~ morfism de algebre Boole $f: A \to B$ astfel încît diagrama următoare este comutativă:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "p_i"] & & B_i \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

pentru orice $i\in I$.

In aceste condiţii, B este izomorfă cu $\prod_{i\in I} B_i$. $f_i = p_i \circ f$

Demonstraţie: Conform Propoziţiei 2, există un unic ~~aic~~ morfism de algebre Boole $f: B \to \prod_{i\in I} B_i$, astfel încît $\pi_i \circ f = p_i$, pentru orice $i\in I$, iar din (*) rezultă existenţa unui unic ~~aic~~ morfism de algebre Boole $g: \prod_{i\in I} B_i \to B$ astfel încît $p_i \circ g = \pi_i$ pentru orice $i\in I$:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[dr, shift right, "g"'] & & B_i \\ & B \arrow[ul, shift right, "f"'] \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

Vom arăta că f, g sînt inverse unul celuilalt. Observăm că următoarele diagrame sînt comutative:

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & B_i \\
& \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[ul, "f\circ g"] \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "p_i"] & & B_i \\
& B \arrow[ul, "g\circ f"] \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

(I) (II)

pentru orice $i\in I$. Intr-adevăr, avem relaţiile:

$$\pi_i \circ (f \circ g) = (\pi_i \circ f) \circ g = p_i \circ g = \pi_i \quad , \quad i \in I$$

$$p_i \circ (g \circ f) = (p_i \circ g) \circ f = \pi_i \circ f = p_i \quad , \quad i \in I$$

Insă avem şi următoarele diagrame comutative:

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & B_i \\
& \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[ul, "1_{\prod_{i\in I} B_i}"] \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "p_i"] & & B_i \\
& B \arrow[ul, "1_B"] \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

(I') (II')

pentru orice $i\in I$.

Conform unicităţii exprimate în Propoziţia 2, rezultă: $f\circ g = 1_{\prod_{i\in I} B_i}$ şi analog, din (*), rezultă $g\circ f = 1_B$. Deci B şi $\prod_{i\in I} B_i$ sînt izomorfe.

<u>OBSERVAŢIE</u>. Proprietatea (*), care după cum am văzut caracterizează produsul direct de algebre Boole poartă numele de <u>proprietatea de universalitate</u> a <u>produsului cartezian</u>.

Dacă $B_i = B$, pentru orice $i\in I$, atunci vom nota $B^I = \prod_{i\in I} B_i$.

Vom nota cu Hom (B,B') mulţimea morfismelor de algebre Boole $f: B \longrightarrow B'$.

<u>Lema 1</u>. Mulţimea ultrafiltrelor unei algebre Boole B se poate pune în corespondenţă bijectivă cu mulţimea Hom (B, L_2), unde L_2 este algebra Boole $\{0,1\}$.

<u>Demonstraţie</u>: Fiecărui ultrafiltru F al lui B îi asociem morfismul de algebre Boole $f_F: B \longrightarrow L_2$.

$$f_F(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x\in F \\ 0, & \text{dacă } x\notin F \end{cases}$$

Reciproc, fiecărui morfism de algebre Boole $f: B \longrightarrow L_2$ i se asociază

$$M_f = f^{-1}(\{1\}) = \{x\in B \mid f(x) = 1\}.$$

Se poate arăta că M_f este un ultrafiltru al lui B. Funcţiile

$$f \longmapsto M_f, \quad F \longmapsto f_F$$

sînt inverse una celeilalte.

Lăsăm cititorului ca exerciţiu detalierea acestei propoziţii.

Fie acum B o algebră Boole oarecare. Conform proprietăţii de de universalitate a produsului direct rezultă un morfism de algebre Boole

$$\Phi : B \longrightarrow L_2^{\mathrm{Hom}(B,L_2)}$$

care face comutative diagramele

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & & L_2^{\mathrm{Hom}(B,L_2)} \arrow[dl, "\pi_f"] \\
& L_2 &
\end{tikzcd}
$$

pentru orice $f\in \mathrm{Hom}\,(B,L_2)$.

PROPOZIŢIA 3 : Φ este injectiv.

Demonstraţie: Vom arăta că: $\Phi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Dacă $\Phi(x) = o$, atunci $f(x) = \pi_f(\Phi(x)) = \pi_f(o) = o$, pentru orice $f \in Hom(B, L_2)$.

Presupunem prin absurd că $x \neq o$, deci există un ultrafiltru F al lui B, astfel încît $x \in F$. Atunci, conform demonstraţiei Lemei 1, avem un morfism $f_F: B \longrightarrow L_2$ astfel încît:

$$f_F(x) = 1 \quad (\text{deoarece } x \in F).$$

Contradicţia este evidentă.

PROPOZIŢIA 4. Pentru orice mulţime X, L_2^X este o algebră Boole izomorfă cu $\mathscr{P}(X)$.

Demonstraţie: In demonstraţia Propoziţiei 4, § 6, Cap.1 am arătat că funcţia

$$\Phi : \mathscr{P}(X) \longrightarrow L_2^X$$

$$\Phi(B) = \chi_B : X \longrightarrow L_2, \text{ pentru orice } B \in \mathscr{P}(X)$$

este o bijecţie. Relaţiile următoare:

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A \vee \chi_B$$

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$$

$$\chi_{C_X}(B) = 1 - \chi_X(B)$$

arată că Φ este un morfism de algebre Boole. Deci Φ este izomorfism.

OBSERVAŢIE. Conform Propoziţiei 4, $L_2^{Hom(B,L_2)}$ şi $\mathscr{P}(Hom(B,L_2))$ sînt izomorfe, deci Propoziţia 3 de mai sus poate fi considerată ca o exprimare echivalentă a teoremei de reprezentare a lui Stone.

Demonstraţia Propoziţiei 3 nu este esenţial diferită de cea a teoremei lui Stone, în ambele demonstraţii intervenind „cam în

acelaşi mod" proprietăţile ultrafiltrelor.

§ 7. ALGEBRE BOOLE NUMARABILE

Fie A o algebră Boole oarecare şi $a \in A$. Vom nota

$$A\restriction a = \{x \in A \mid x \leq a\}.$$

Atunci $A\restriction a$ este algebră Boole faţă de operaţiile:

$$x \vee' y = x \vee y$$

$$x \wedge' y = x \wedge y$$

$$\neg' x = a \wedge \neg x$$

$$o' = o$$

$$1' = a$$

PROPOZIŢIA 1. Pentru orice $a \in A$, A este izomorfă cu produsul direct

$$(A\restriction a) \times (A\restriction \neg a)$$

Demonstraţie: Considerăm funcţia $f: A \longrightarrow (A\restriction a) \times (A\restriction \neg a)$ definită astfel:

$$f(x) = (x \wedge a, x \wedge \neg a)$$

f este un morfism de algebre Boole:

$$f(x \vee y) = ((x\vee y)\wedge a, (x \vee y)\wedge \neg a))$$
$$= ((x\wedge a)\vee(y \wedge a), (x \wedge \neg a)\vee(y\wedge\neg a))$$
$$= (x\wedge a, x\wedge\neg a)\vee(x\wedge a, y\wedge\neg a)$$
$$= f(x)\vee f(y)$$

$$f(x\wedge y) = ((x\wedge y)\wedge a, (x\wedge y)\wedge\neg a)$$
$$= ((x\wedge a)\wedge(y\wedge a),(x\wedge\neg a)\vee(y\wedge\neg a))$$
$$= (x\wedge a, x\wedge\neg a)\wedge(y\wedge a, y\wedge\neg a)$$
$$= f(x)\vee f(y)$$

$$f(\neg x) = (\neg x\wedge a, \neg x\wedge\neg a) = \neg f(x).$$

$f: B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ injectiv astfel încît pentru orice familie $(x_n)_{n\in N}$ de elemente ale lui B să avem:

$$f\Big(\bigvee_{n\in N} x_n\Big) = \bigcup_{n\in N} f(x_n)$$

$$f\Big(\bigwedge_{n\in N} x_n\Big) = \bigcap_{n\in N} f(x_n)$$

Demonstrația acestei teoreme se face în maniera demonstrației teoremei de reprezentare a lui Stone.

EXERCIȚII LA CAPITOLUL II

1. Fie $(P,\leqslant)$ o mulțime parțial ordonată. Definim relația binară $<$ prin:

$$x<y \Longleftrightarrow x\leqslant y \text{ și } x\neq y.$$

Să se arate că $<$ satisface proprietățile următoare:

(i) Pentru orice $x\in P$, nu este adevărată relația $x<x$.

(ii) $x<y,\ y<z \Longrightarrow x<z$, pentru orice $x, y, z\in P$.

Reciproc, dacă P este o mulțime înzestrată cu o operație binară $<$ ce verifică (i) și (ii), atunci relația $\leqslant$ definită prin

$$x\leqslant y \Longleftrightarrow x<y \text{ sau } x=y$$

este o relație de ordine pe mulțimea P.

2. Intr-o mulțime parțial ordonată $(P,\leqslant)$ avem:

$$x_1\leqslant x_2\leqslant \dots \leqslant x_n\leqslant x_1 \Longrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n.$$

3. Arătați că pe o mulțime cu două elemente există exact trei relații de ordine parțială.

4. Fie $G(n)$ numărul relațiilor de ordine parțială ce se pot defini pe o mulțime cu n elemente. Arătați că $G(3)=19$ și $G(4)=219$. Cercetați dacă $G(n)$ este impar pentru orice $n\in N$.

5. Orice produs cartezian de mulțimi total ordonate este o mulțime total ordonată.

6. Orice mulțime finită poate fi înzestrată cu o relație de ordine totală.

7. O semilatice este o mulțime A înzestrată cu o operație binară cu proprietățile următoare:

$x\circ x = x$, pentru orice $x\in A$.
$x\circ y = y\circ x$, pentru orice $x, y\in A$
$x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z$, pentru orice $x, y\in A$.

Dacă notăm

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x \circ y = x,$$

atunci $(A, \leqslant)$ este o mulţime parţial ordonată astfel încît pentru orice $x, y \in A$,

$$x \circ y = x \wedge y.$$

8. Să se formuleze şi să se demonstreze reciproca problemei 7.

9. In orice latice L avem inegalitatea:

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge d) \leqslant (a \vee b) \wedge (c \vee d)$$

Inegalitatea reciprocă este adevărată?

1o. Să se determine numărul laticilor neizomorfe cu 2,3 şi 4 elemente.

11. Fie Φ o mulţime de funcţii $f: I \longrightarrow I$. Arătaţi că mulţimea

$$\left\{X \in \mathcal{P}(I) \mid f(X) \subset X, \text{ pentru orice } f \in \Phi\right\}$$

este o latice completă (există orice supremum şi infimum).

12. O submulţime S a unui spaţiu vectorial V peste un corp K este convexă dacă

$$x, y \in S,\ \lambda, \mu \geqslant 0,\ \lambda + \mu = 1 \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in S.$$

Să se arate că submulţimile convexe ale lui V formează o latice completă.

13. Arătaţi că, pentru orice submulţime S a unei latici L, mulţimea majoranţilor lui S formează o latice completă.

14. Mulţimea N a numerelor naturale este o latice completă faţă de relaţia de ordine definită de divizibilitate.

15. Mulţimea idealelor inelului Z a întregilor poate fi înzestrată ca o structură de latice completă. Această latice este izomorfă cu latice de la exerciţiul 14.

16. Orice mulţime total ordonată este o latice distributivă.

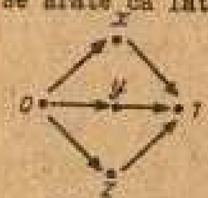
17. In orice latice distributivă L avem:

$$c \wedge x = c \wedge y,\ c \vee x = c \vee y \Longrightarrow x = y.$$

18. O latice L se numeşte <u>modulară</u> dacă pentru orice $x, y, z \in L$, avem:

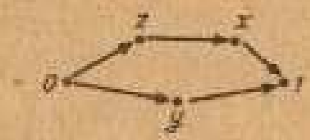
$$x \leqslant z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

Să se arate că laticea reprezentată prin graful următor



este modulară, dar nu este distributibă.

19. Să se arate că laticea de mai jos nu este modulară:



2o. Fie G un grup abelian aditiv şi S(G) mulţimea subgrupurilor lui G. S(G) este o mulţime parţial ordonată faţă de incluziune. S(G) este o latice modulară pentru operaţiile:

$$M \vee N = M + N = \left\{x + y \mid x \in M,\ y \in N\right\}$$

$$M \wedge N = M \cap N.$$

21. Să se arate că o latice L este modulară dacă şi numai dacă pentru orice $x, y, z \in L$, avem

$$x \not\leqslant z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) \not\leqslant (x \vee y) \wedge z.$$

22. Fie L o latice distributivă şi a, b două elemente ce nu aparţin lui L. Notînd $L^* = L \cup \{a, b\}$ şi punînd prin definiţie $a < x < b$ pentru orice $x \in L$, să se arate că L^* este o latice distributivă cu element prim şi element ultim.

23. Să se găsească o latice ce nu este completă.

24. Să se găsească o latice distributivă fără prim şi ultim element.

25. Să se găsească o latice distributivă cu element prim şi element ultim care nu este algebră Boole.

26. Fie L o latice distributivă cu 0 şi 1. Să se arate că mulţimea

$$C(L) = \{x \in L \mid \text{există } y \in L, \text{ astfel încît } x \vee y = 1,\ x \wedge y = o\}$$

este o algebră Boole.

27. Fie L, L' două latici distributive cu o şi 1. Notăm $i_L : C(L) \to L$, $i_{L'} : C(L') \to L'$ aplicaţiile date de incluziunile $C(L) \subset L$, $C(L') \subset L$. Dacă $f : L \to L'$ este un morfism de latici distributive cu o şi 1 ($f(o) = o$ şi $f(1) = 1$), atunci $f_{C(L)} : C(L) \to C(L')$ este un morfism de algebre Boole, astfel încît următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & L' \\
C(L) \arrow[u, "i_L"] \arrow[r, "f_{C(L)}"'] & C(L') \arrow[u, "i_{L'}"']
\end{tikzcd}$$

28. Să se arate că produsul cartezian a două latici distributive cu o şi 1 este o latice distributivă cu o şi 1.

29. Fie L, L' două latici distributive cu o şi 1. Să se arate că algebra Boole $C(L \times L')$ este izomorfă cu produsul direct de algebre Boole $C(L) \times C(L')$.

3o. Fie $f : L \to L'$ un morfism de latici distributive cu element prim şi cu element ultim. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(a) f este injectiv.

(b) $\mathrm{Ker}\,(f) = \{x \in L \mid f(x) = o\}$ este sublaticea $\{o\}$ a lui L.

31. Fie A o mulţime înzestrată cu o operaţie binară $\vee$ şi cu o operaţie unară $\neg$. Definim $a \wedge b = (a' \vee b')'$ şi presupunem că

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = a$$

Să se arate că A este o algebră Boole.

32. Fie A o mulţime înzestrată cu o operaţie unară $| : A \to A$ (simbolul lui Sheffer). Notăm $\neg a = a \mid a$ şi presupunem că sînt verificate proprietăţile:

(I) $(b \mid a) \mid (\neg b \mid a) = a$

(II) $a \mid (b \mid c) = \neg\left[(\neg c \mid a) \mid (\neg b \mid a)\right]$

Să se arate că A este o algebră Boole pentru operaţiile:

(III) $a \vee b = (a \mid b) \mid (a \mid b)$

(IV) $a \wedge b = (a \mid a) \mid (b \mid b)$

şi pentru negaţia $\neg$ introdusă mai sus.

Reciproc, dacă într-o algebră Boole B definim $a \mid b = \neg a \wedge \neg b$, atunci în B sînt verificate relaţiile (I) - (IV).

33. În orice algebră Boole avem relaţia

$$x + y = (x \wedge y) + (x \vee y).$$

34. Arătaţi că într-un inel comutativ A de caracteristică 2, mulţimea $\{x \mid x^2 = x\}$ formează un inel Boole care este subinel al lui A.

<u>Notă</u>. A are caracteristica 2, dacă $x + x = o$, pentru orice $x \in A$.

35. Fie B' o submulţime nevidă a unei algebre Boole B. Sînt echivalente afirmaţiile:

(i) B' este subalgebră Boole a lui B.

(ii) B' este închisă la operațiile $\vee$ și $\neg$.

(iii) B' este închisă la operațiile $\wedge$ și $\neg$.

36. Orice intersecție de subalgebre Boole este o subalgebră Boole.

37. Dacă X este o submulțime a unei algebre Boole B, atunci intersecția tuturor subalgebrelor Boole ale lui B ce includ pe X este o subalgebră Boole (numită <u>subalgebra Boole generată de X</u>) care este formată din o,1 și din toate elementele lui A de forma

$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

unde m, $n_i \in N$ și pentru orice $i \leq m$, $j \leq n_i$, avem $y_{ij} \in X$ sau $\neg y_{ij} \in X$.

38. Să se găsească toate subalgebrele Boole ale următoarelor algebre Boole:

$$\mathscr{P}(\{x,y\})\ ;\ \mathscr{P}(\{x,y,z\})\ ;\ \mathscr{P}(\{x,y,z,w\}).$$

39. Dacă $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$, să se determine mulțimea subalgebrelor Boole ale lui $\mathscr{P}(X)$ care sînt neizomorfe. Să se verifice pentru cazul problemei 38.

4o. Fie B' o subalgebră Boole a lui B. Dacă F este un filtru al lui B, atunci $F \cap B'$ este un filtru al lui B'.

41. Dacă B' este subalgebră Boole a lui B și B_1' este subalgebră Boole a lui B_1, atunci $B' \times B_1'$ este subalgebră Boole a lui $B \times B_1$.

42. Fie B, B' două algebre Boole și f: B' $\longrightarrow$ B' o aplicație oarecare. Sînt echivalente afirmațiile următoare:

(1) f este morfism de algebre Boole.

(2) $f(\neg x) = \neg f(x)$ și $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, pentru orice $x,y \in B$.

(3) $f(\neg x) = \neg f(x)$ și $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$, pentru orice $x,y \in B$.

(4) $f(o) = o, f(1) = 1$, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ pentru orice $x, y \in B$ și $f(x) \wedge f(y) = o$ atunci cînd $x \wedge y = o$.

43. Fie B o algebră Boole și $x \in B$. Să se arate că mulțimea

$$F_x = \{y \mid y \geqslant x\}$$

este un filtru al lui B. Să se determine $B/_{F_x}$.

44. Fie F un filtru propriu al unei algebre Boole B. Să se arate că intersecția tuturor ultrafiltrelor lui B ce includ pe F este egală cu F. Să se deducă de aici că intersecția tuturor ultrafiltrelor lui B este $\{1\}$.

45. Fie $B/_F$ algebra Boole cît a lui B prin filtrul F și p: B $\longrightarrow$ $B/_F$ morfismul surjectiv canonic: $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x \in B$.

(i) Dacă Γ este un filtru (ultrafiltru) al lui $B/_F$ să se arate că $p^{-1}(\Gamma)$ este un ultrafiltru al lui B ce include pe F.

(ii) Dacă F' este filtru (ultrafiltru) al lui B și $F \subset F'$, atunci p(F') este un filtru (ultrafiltru) al lui $B/_F$.

(iii) Funcțiile $\Gamma \longmapsto p^{-1}(\Gamma)$, $F' \longmapsto p(F')$ determină o corespondență bijectivă între mulțimea filtrelor (ultrafiltrelor) lui $B/_F$ și mulțimea filtrelor (ultrafiltrelor) lui B ce includ pe F.

(iV) Dacă F,F' sînt filtre ale lui B astfel încît $F \subset F'$, atunci algebrele Boole $B/_{F'}$ și $(B/_F)/p(F')$ sînt izomorfe.

46. Să se determine mulțimea ultrafiltrelor următoarelor algebre Boole:

$$L_2 = \{o,1\},\ L_2 \times L_2,\ L_2 \times L_2 \times L_2.$$

47. In algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ notăm, pentru orice $x \in X$,

$$U_x = \{ U \subset X \mid x \in U \}$$

Să se arate că U_x este un ultrafiltru al lui $\mathcal{P}(X)$, numit <u>ultrafiltrul principal</u> asociat lui x.

48. Intr-o algebră Boole finită, orice ultrafiltru este principal.

49. Să se determine mulţimea ultrafiltrelor unei algebre Boole cu 2^n elemente.

50. Mulţimea evenimentelor asociate unei experienţe aleatoare este o algebră Boole.

51. Fie $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ un cîmp de probabilitate. Să se arate că

$$\{ A \in \mathcal{K} \mid P(A) = 1 \}$$

este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{K}$.

52. O submulţime nevidă I a unei algebre Boole se numeşte <u>ideal</u> boolean dacă

$$x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$$

$$x \in I,\ y \leqslant x \Rightarrow y \in I$$

Să se arate că orice intersecţie de ideale booleene este un ideal. Dacă $X \subset B$ atunci intersecţia tuturor idealelor booleene lui B ce includ pe X este

$$\bar{X} = \{ y \in B \mid \text{există } x_1, \ldots, x_n \in X,\ y \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_n \}$$

<u>Notă</u>. $\bar{X}$ se numeşte idealul boolean generat de X.

53. Fie B o algebră Boole şi G(B) inelul Boole asociat. Atunci o submulţime I a lui B este ideal boolean dacă şi numai dacă este ideal al inelului G(B).

54. Un ideal boolean I al lui B se numeşte <u>propriu</u>, dacă $1 \notin I$. Un ideal boolean se numeşte <u>maximal</u> dacă este un element maximal al mulţimii idealelor proprii ale lui B ordonată de incluziune. Pentru orice ideal boolean propriu I, sînt echivalente afirmaţiile:

(a) I este un ideal boolean maximal.

(b) I este un ideal maximal al inelului Boole G(B).

55. Dacă F este un filtru al algebrei Boole B, atunci

$$F^{+} = \{ \neg x \mid x \in F \}$$

este un ideal boolean. Dacă I este un ideal boolean al lui B, atunci

$$I_{+} = \{ \neg x \mid x \in I \}$$

este un filtru al lui B. Funcţiile $F \longmapsto F^{+}$, $I \longmapsto I_{+}$ sînt inverse una celeilalte şi realizează o corespondenţă bijectivă între mulţimea idealelor booleene şi mulţimea filtrelor unei algebre Boole.

56. In condiţiile exerciţiului precedent, avem echivalenţele:

F filtru propriu $\Longleftrightarrow F^{+}$ ideal boolean propriu;

F ultrafiltru $\Longleftrightarrow F^{+}$ ideal boolean maximal

I ideal boolean maximal $\Longleftrightarrow I_{+}$ ultrafiltru.

57. Dacă I este un ideal boolean al lui B, atunci relaţia binară $\sim_I$:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x + y \in I$$

este o congruenţă a lui B. Să se arate că mulţimea idealelor booleene ale lui B este în corespondenţă bijectivă cu mulţimea congruenţelor sale.

58. In condiţiile exerciţiului precedent, să se arate că $B/\sim_I$ este o algebră Boole izomorfă cu $B/_{I_+}$.

<u>Notă</u>. Algebra Boole $B/\sim_I$ se notează $B/_I$ şi se numeşte <u>algebra Boole cît a lui B prin idealul boolean I</u>.

59. Dacă F este un filtru al algebrei Boole B, atunci $B/_F$ şi $B/_{F^+}$ sînt izomorfe.

60. Să se caracterizeze idealele proprii maximale ale unei algebre Boole.

CAPITOLUL 3

Sistemul formal al calculului propoziţional

Scopul acestui capitol este de-a descrie în detaliu sistemul formal al calculului propoziţional. Acest sistem formal este cel mai simplu sistem formal şi pe el se bazează toate celelalte sisteme formale (care sînt fundamentate de o logică bivalentă).

Paragraful 1 se ocupă cu prezentarea sintaxei acestui sistem formal: simboluri primitive, enunţuri, teoreme formale,etc,iar în paragraful 2 sînt prezentate o serie de teoreme formale ale sistemului. Paragraful 3 studiază semantica sistemului formal al calculului propoziţional, conţinînd cel mai important rezultat al capitolului: teorema de completitudine a lui Gödel.

Proprietăţile conectorilor auxiliari $\vee, \wedge$ $\longleftrightarrow$ sînt date în § 4. Paragraful 5 va preciza un adevăr intrat în folclorul ştiinţei: algebrele Boole sînt reflectarea algebrică a calculului propoziţional.

§ 1. PREZENTAREA SISTEMULUI FORMAL AL CALCULULUI PROPOZIŢIONAL

Alfabetul sistemului formal al calculului propoziţional, adică lista de simboluri primitive ce o vom utiliza, cuprinde următoarele elemente:

1). O mulţime infinită V de variabile propoziţionale, notate u, v, w,...(eventual cu indici sau cu accente).

2). Simbolurile logice (conectori):

$\neg$: numit simbolul de negaţie (va fi citit: non)

$\rightarrow$: numit simbolul de implicaţie (va fi citit:implică)