FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Exerciţii[1]

(1) Fie T o mulţime şi $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ şi $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.

(2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ şi $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relaţie binară pe A. Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R? Care dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ poate fi relaţia subiacentă unei funcţii de la A la A?

(3) Daţi exemplu de familie de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$, indexată, pe rând, după:

(i) $\mathbb{N}^*$;

(ii) $\mathbb{Z}$;

(iii) $\{2, 3, 4\}$.

Determinaţi reuniunea şi intersecţia fiecărei familii date ca exemplu.

(4) Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de submulţimi ale unei mulţimi X, arătaţi următoarele (**legile lui De Morgan**):

(i) $C_X \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} C_X A_i$;

(ii) $C_X \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} C_X A_i$.

Definiţia 1. *O familie de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ se numeşte* **disjunctă** *dacă pentru orice $i, j \in I$ cu $i \neq j$ avem $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

(5) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A'_i := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A'_i \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ şi că $(A'_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi.

(6) Daţi exemple, pe rând, de relaţii care:

(i) sunt reflexive şi tranzitive, dar nu sunt simetrice;

[1] Exerciţii redactate şi rezolvate de: Andrei Sipoş, Alexandra Otiman, Natalia Moangă

(ii) sunt reflexive şi simetrice, dar nu sunt tranzitive;

(iii) sunt simetrice şi tranzitive, dar nu sunt reflexive.

(7) Fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie descrisă în fiecare situaţie de mai jos. Verificaţi, pe rând, dacă R este relaţie de ordine parţială, strictă sau totală sau relaţie de echivalenţă.

(i) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $a \mid b$.

(ii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ şi $(a, b)R(c, d)$ dacă şi numai dacă $a \leq b$ sau $b \leq d$.

(iii) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $b = a$ sau $b = a + 1$.

(iv) A este mulţimea tuturor cuvintelor în limba engleză şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă a nu este mai lung ca b.

(8) Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$. Atunci:

(i) Dacă minimul lui S există, atunci acesta este unic.

(ii) Orice minim (maxim) al lui S este element minimal (maximal).

(9) Fie $D(n) = \{d \in \mathbf{N} | \ \ d|n\}$ şi $P(n) = \{d \in \mathbf{N} | \ \ d|n, \ d \neq 1, \ d \neq n\}$.
Demonstraţi că $(P(n), |)$ şi $(D(n), |)$ sunt mulţimi parţial ordonate. Enumeraţi elementele minimale, elementele maximale, minimul şi maximul (dacă există) pentru următoarele mulţimi: $P(12)$, $P(32)$, $P(72)$, $D(72)$.

(10) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.

(11) Să se arate că mulţimea $Form$, a formulelor logicii propoziţionale, este numărabilă.

(12) Să se arate că pentru orice formulă φ, numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ.

(13) Să se dea o definiţie recursivă a mulţimii variabilelor unei formule.

(14) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)) = 1$.

(15) Să se arate că pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ şi pentru orice formule φ, ψ avem:

(i) $f_e(\varphi \vee \psi) = f_e(\varphi) \vee f_e(\psi)$;

(ii) $f_e(\varphi \wedge \psi) = f_e(\varphi) \wedge f_e(\psi)$;

(iii) $f_e(\varphi \leftrightarrow \psi) = f_e(\varphi) \leftrightarrow f_e(\psi)$.

(16) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

(i) $v_0 \rightarrow v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

(17) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ,

(i) φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

(18) Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\psi \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

(19) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

(20) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$;

(vi) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \to (\psi \leftrightarrow \varphi))$.

(21) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

(22) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

(23) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

(24) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(iv) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

(25) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

(26) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \land v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \lor \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

(27) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

(28) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

(29) Să se determine mulţimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

(i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;

(ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;

(iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

(30) Derivaţi prin rezoluţie clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulţimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

(31) Să se deriveze prin rezoluţie clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \rightarrow v_2) \wedge (v_0 \rightarrow v_1)$$

(32) Să se arate, folosind rezoluţia, că formula:

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \rightarrow v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \rightarrow v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \rightarrow v_3)$$

este nesatisfiabilă.

(33) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$