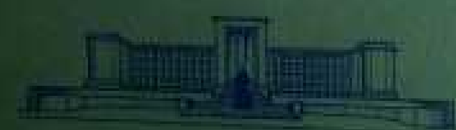
ACADEMIA MILITARĂ

Lector GEORGE GEORGESCU

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ



BUCUREȘTI — 1978

CAPITOLUL I

Elemente de teoria mulţimilor

In paragraful întîi al acestui capitol prezentăm cîteva noţiuni şi proprietăţi ale calculului propoziţional,absolut necesar pentru demonstrarea propoziţiilor de teoria mulţimilor referitoare la operaţiile finite cu mulţimi. Paragraful al doilea conţine definirea operaţiilor cu mulţimi (reuniune, intersecţie, complementară,etc.) şi proprietăţile lor principale.

Elemente foarte sumare ale calculului predicatelor sînt expuse în § 3, pentru a fi folosite în continuare în stabilirea proprietăţilor operaţiilor infinite cu mulţimi.

Relaţiile şi funcţiile sînt subiectul paragrafului 4, iar produsul cartezian infinit şi proprietatea sa de universalitate sînt prezentate în § 5.

Am considerat necesar să introducem un paragraf privind operaţiile cu cardinali, insistînd asupra mulţimilor numărabile. Ultimul paragraf se ocupă cu relaţiile de ordine şi preordine. Plasarea acestui paragraf în acest capitol este necesară pentru enunţarea axiomei lui Zorn, care este o axiomă a teoriei mulţimilor.

Nu am dezvoltat extensiv acest capitol, prezentînd numai un minim necesar pentru tratarea capitolelor următoare. O serie de proprietăţi au fost date sub formă de exerciţii. Precizăm că punctul de vedere adoptat este acela al „teoriei naive a mulţimilor".

§ 1. CALCULUL PROPOZIŢIONAL

In calculul propoziţional se studiază propoziţiile[1] din punctul de vedere al adevărului sau falsităţii lor, neluîndu-se în considerare conţinutul lor. Fără îndoială, legile logicii sînt expresii ale unor legi naturale obiective, încît neconsiderarea conţinutului este necesară pentru a surprinde relaţiile logice ale fenomenelor naturale în toată generalitatea lor.

Vom nota propoziţiile prin literele p, q, r,..... . Pentru orice propoziţie p, definim <u>valoarea ei logică</u> $v(p)$ prin:

$$v(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă propoziţia } p \text{ este adevărată} \\ 0, & \text{dacă propoziţia } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Deci, pentru noi, o propoziţie p este <u>perfect determinată</u> dacă îi cunoaştem valoarea logică $v(p)$.

Dacă p,q sînt două propoziţii oarecare, atunci <u>conjuncţia</u> lor $p \wedge q$ este propoziţia „p şi q", iar valoarea ei de adevăr este dată de

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p,\ q \text{ sînt simultan adevărate} \\ 0, & \text{dacă cel puţin una din propoziţiile } p,\ q \text{ este falsă} \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, $v(p \wedge q) = 1$ dacă şi numai dacă $v(p) = 1$ şi $v(q) = 1$.

<u>Disjuncţia</u> $p \vee q$ a propoziţiilor p,q este propoziţia „p sau q", iar valoarea ei logică este definită prin:

$$v(p \vee q) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } v(p) = 1 \text{ sau } v(q) = 1.$$

Negaţia $\neg p$ a unei propoziţii p are următoarea valoare de adevăr:

1). In acest capitol conceptul de „propoziţie" este cel uzual.

$$v(\neg p) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \text{ este adevărată} \\ 1, & \text{dacă } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Date două propoziţii p,q, <u>implicaţia</u> $p \Rightarrow q$ este propoziţia „p implică q" a cărei valoare de adevăr este

$$v(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v(p) = 1 \text{ şi } v(q) = 0 \\ 1, & \text{în rest.} \end{cases}$$

<u>Echivalenţa</u> $p \Leftrightarrow q$ a două propoziţii p,q este propoziţia „p echivalent cu q" a cărei valoare de adevăr este dată de

$$v(p \Leftrightarrow q) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } v(p) = v(q).$$

Aceste definiţii pot fi concentrate în următoarele <u>tabele de adevăr</u>.

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

conjuncţia $\wedge$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

disjuncţia $\vee$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

implicaţia $\Rightarrow$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

echivalenţa $\Leftrightarrow$

$v(p)$	$v(\neg p)$
1	0
0	1

negaţia

Următoarele propoziţii sînt adevărate, pentru orice propoziţii p, q, r:

1. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$; $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$;
2. $[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$; $[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$;
3. $(p \vee p) \Longleftrightarrow p$; $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$;
4. $[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$; $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$;
5. $[p \vee (p \wedge q)] \Longleftrightarrow p$; $[p \wedge (p \vee q)] \Longleftrightarrow p$;
6. $p \vee \neg p$; $\neg(p \wedge \neg p)$;
7. $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$; $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
8. $(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$; $(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$;
9. $\neg\neg p \Longleftrightarrow p$;
10. $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$
11. $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)]$
12. $\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$

Vom arăta, de exemplu, că prima propoziţie de la 7 este adevărată. Calculăm valoarea logică a propoziţiei $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, pentru orice valoare o sau 1 pe care o pot lua propoziţiile componente p,q. . Sistematizăm acest calcul prin următorul tabel:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \wedge q)$	$v(\neg(p \wedge q))$	$v(\neg p)$	$v(\neg q)$	$v(\neg p \vee \neg q)$	$v(\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

În toate cazurile am obţinut valoarea 1.

Demonstraţia se face în aceeaşi manieră pentru toate proprietăţile 1 - 12.

§ 2. MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

Pentru noi, conceptul de mulţime va avea semnificaţia uzuală de colecţie, grămadă etc. Vom nota mulţimile prin literele A, B, C, X, Y, Z etc. Obiectele din care este formată o mulţime se vor numi elemente. Elementele unei mulţimi vor fi notate a,b,c,x,y, z,etc.

Faptul că elementul x face parte din mulţimea A va fi notat $x \in A$ şi se va citi: „x aparţine mulţimii A ".

Vom extinde conceptul de mulţime prin considerarea mulţimii vide $\emptyset$, care este „mulţimea fără nici un element".

Mulţimea A este inclusă în mulţimea B, dacă orice element al lui A este şi element al lui B. Scriem aceasta prescurtat $A \subset B$. Definiţia incluziunii $A \subset B$ poate fi dată şi astfel:

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

Reuniunea a două mulţimi A şi B este mulţimea $A \cup B$ definită de

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B]$$

Un alt mod de-a scrie această definiţie este

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

În cele ce urmează vom omite parantezele, scriind astfel

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

<u>Intersecția</u> a două mulțimi A și B este mulțimea $A \cap B$ definită de

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Această definiție poate fi dată sub forma

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

<u>Diferența</u> a două mulțimi A și B este definită astfel

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

<u>OBSERVAȚIE</u>. Prin $x \notin B$ am notat propoziția $\neg(x \in B)$.

Dacă $A \subset B$ se spune că A este o <u>parte</u> (sau o <u>submulțime</u>) a lui B. Prin convenție, $\emptyset$ este submulțime a oricărei mulțimi. Pentru orice mulțime A, vom nota cu $\mathscr{P}(A)$ mulțimea tuturor părților lui A.

$$\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Fiind dată o mulțime A și o parte a sa B, definim „<u>complementara</u> $C_A(B)$ <u>a lui B în raport cu A</u>" prin

$$C_A(B) = A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

În teoria mulțimilor, concepută astfel, se pot ivi paradoxuri de următorul tip.

<u>Paradoxul lui Russell</u>: Presupunem că $A = \{x \mid x \notin x\}$ este o mulțime. Atunci pentru orice x, vom avea

$$x \in A \Longleftrightarrow x \notin x.$$

În particular, pentru $x = A$ vom avea

$$A \in A \Longleftrightarrow A \notin A,$$

ceea ce este evident contradictoriu.

Din cauza paradoxurilor, sîntem conduși la a considera colecții care nu sînt neapărat mulțimi, numite <u>clase</u>. Spre exemplu, vom vorbi de „clasa tuturor mulțimilor", care nu mai este o mulțime.

<u>PROPOZIȚIA 1</u>: Pentru orice mulțimi A, B, C sînt verificate următoarele relații:

(1) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(4) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

(5) $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$;

(6) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(7) $A = B \Longleftrightarrow [A \subset B] \wedge [B \subset A]$;

(8) $A \subset A$;

(9) $[A \subset B] \wedge [B \subset C] \Longrightarrow A \subset C$;

(10) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$; $A - B \subset A$;

(11) $[A \subset B] \wedge [C \subset D] \Longrightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup D)] \wedge [(A \cap C) \subset (B \cap D)]$

(12) $[A \subset B] \Longleftrightarrow [A \cup B = B] \Longleftrightarrow [A \cap B = A]$;

(13) $A \cap B = A - (A - B)$;

(14) $A \cup (B - A) = A \cup B$;

(15) $A - (A \cap B) = A - B$

(16) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

<u>Demonstrație</u>: Vom stabili, de exemplu, prima din relațiile (3):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aplicînd propoziția 4, § 1, rezultă echivalențele:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Longleftrightarrow (x \in A) \vee [x \in B \cap C] \\ &\Longleftrightarrow (x \in A) \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)] \\ &\Longleftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)] \\ &\Longleftrightarrow [x \in A \cup B] \wedge [x \in A \cup C] \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

A rezultat: $x\in A\cup(B\cap C)\Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, ceea ce este acelaşi lucru cu egalitatea ce trebuie demonstrată.

In acelaşi mod se demonstrează toate relaţiile enumerate mai sus.

<u>PROPOZITIA 2</u>. Dacă B, C sînt submulţimi ale lui A, atunci avem relaţiile:

(17) $B\subset C\Longrightarrow C_A(C)\subset C_A(B)$;

(18) $C_A(B\cup C)=C_A(B)\cap C_B(C)$;

(19) $C_A(B\cap C)=C_A(B)\cup C_A(C)$; (relaţiile lui de Morgan)

(20) $C_A(A)=\emptyset$; $C_A(\emptyset)=A$.

Lăsăm demonstraţia acestor relaţii pe seama cititorului.

Dacă sînt date mulţimile $A_1,\dots,A_n$, atunci definim <u>intersecţia</u> şi <u>reuniunea</u> lor astfel:

$$A_1\cap\dots\cap A_n=\{x\mid(x\in A_1)\wedge(x\in A_2)\wedge\dots\wedge(x\in A_n)\}$$
$$A_1\cup\dots\cup A_n=\{x\in(x\in A_1)\vee(x\in A_2)\vee\dots\vee(x\in A_n)\}$$

se mai folosesc şi notaţiile:

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap\dots\cap A_n;\quad \bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup\dots\cup A_n.$$

Menţionăm următoarele proprietăţi:

(21) $\left[\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right]\cup B=\bigcap_{i=1}^{n}\left[A_i\cup B\right]$;

(22) $\left[\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right]\cap B=\bigcup_{i=1}^{n}\left[A_i\cap B\right]$;

(23) $C_A\left[\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right]=\bigcap_{i=1}^{n}C_A(A_i)$;

(24) $C_A\left[\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right]=\bigcup_{i=1}^{n}C_A(A_i)$.

Fie A, B două mulţimi oarecare. <u>Produsul cartezian</u> al mulţimilor A şi B este mulţimea A x B definită astfel:

$$A\times B=\{(x,y)\mid(x\in A)\wedge(y\in B)\}.$$

In general, produsul cartezian a n mulţimi $A_1,\dots,A_n$ este

$$A_1\times\dots\times A_n=\{(x_1,\dots,x_n)\mid(x_1\in A_1)\wedge(x_2\in A_2)\wedge\dots\wedge(x_n\in A_n)\}.$$

Se folosesc notaţiile:

$$\prod_{i=1}^{n}A_n=A_1\times\dots\times A_n,$$

$A^n=A_1\times\dots\times A_n$, dacă $A_1=A_2=\dots=A_n=A$.

Produsul cartezian are următoarele proprietăţi:

(25) $(A_1\cup A_2)\times B=(A_1\times B)\cup(A_2\times B)$;

(26) $(A_1\cap A_2)\times B=(A_1\times B)\cap(A_2\times B)$;

(27) $(A_1-A_2)\times B=(A_1\times B)-(A_2\times B)$;

(28) Dacă A_1, A_2, B_1, B_2 sînt nevide, atunci

$$\left[A_1\times B_1=A_2\times B_2\right]\Longrightarrow\left[A_1=A_2\right]\wedge\left[B_1=B_2\right];$$

(29) $A\times B=\emptyset$, dacă $A=\emptyset$ sau $B=\emptyset$.

§ 3. <u>CALCULUL PREDICATELOR</u>

In calculul propoziţional nu ne-am interesat de structura propoziţiilor, care au fost considerate ca nişte întregi, preocupîndu-ne numai de valoarea lor logică.

Considerînd propoziţia „Socrate este muritor", observăm în alcătuirea lui un individ, „Socrate" şi o proprietate „muritor". Propoziţiile „Platon este muritor" şi „Aristotel este muritor" au aceeaşi formă şi diferă doar individul despre care se afirmă că este muritor.

Toate aceste propoziţii au forma „x este muritor". In general, vom considera expresii de forma „x are proprietatea P", pe care le vom nota P(x).

Aceste expresii le vom numi predicate (Hilbert şi Bernays, Grundlagen der Mathematik, vol.I, 1934) sau funcţii propoziţionale (Russel şi Whitehead, Principia Mathematica, vol.I, 1910).

In Principia Mathematica, acest concept este definit astfel: „printr-o funcţie propoziţională înţelegem ceva care conţine o variabilă x şi exprimă o propoziţie de îndată ce lui x i se atribuie o valoare".

Cu alte cuvinte, un predicat P(x) devine o propoziţie P(a) dacă se atribuie lui x o valoare determinată a. Propoziţia P(a) poate fi adevărată sau falsă.

Vom presupune că x ia valori într-o mulţime A de indivizi, astfel încît pentru orice $a \in A$, P(a) este o propoziţie cu sens.

Pentru exemplificare, să luăm predicatul „x este muritor". Propoziţia „Socrate este muritor" are sens , pe cînd „numărul 7 este muritor" este fără sens.

Toate aceste consideraţii au fost luate din „Logica polivalentă", de A. Dumitriu (pag.74 - 75).

Fie P(x) un predicat oarecare. Din predicatul P(x) putem forma următoarele propoziţii:

$(\exists x)\, P(x)$: există x care are proprietatea P.

$(\forall x)\, P(x)$: pentru orice x are loc proprietatea P.

$\forall$ se numeşte cuantificator universal, iar $\exists$ cuantificator existenţial.

Vom spune că propoziţia $(\exists x)\, P(x)$ este adevărată în mulţimea A, dacă există $a \in A$, astfel încît P(a) este o propoziţie adevărată.

Propoziţia $(\forall x)\, P(x)$ este adevărată în mulţimea A dacă pentru orice $a \in A$, propoziţia P(a) este adevărată.

In mod analog, pot fi considerate predicate $P(x_1, \ldots, x_n)$ care depind de n variabile. Aceste predicate se numesc predicate n-are; $x_1, \ldots, x_n$ se vor numi variabile.

Dacă P(x,y) este un predicat binar, atunci $(\forall x)\, P(x,y)$ şi $(\exists x)\, P(x,y)$ sînt predicate unare în variabila y. Vom spune că în aceste predicate variabila x este legată, iar variabila y este liberă.

Aceste definiţii se pot generaliza pentru predicate în oricîte variabile. In scrierea predicatelor orice variabilă liberă trebuie notată diferit de orice variabilă legată.

De exemplu, nu putem avea $(\exists x)(\forall x)\, P(x,y)$, însă scrierea $(\exists y)(\forall y)\, P(x,y)$ este corectă.

Dacă P, Q sînt predicate, atunci

$$P,\ P \vee Q,\ P \wedge Q,\ P \Longrightarrow Q,\ P \Longleftrightarrow Q\ ,$$

sînt de asemenea predicate.

Un predicat în care toate variabilele sînt legate se va numi predicat constant sau enunţ.

Pentru orice predicate P(x), Q(x) şi pentru orice mulţime A, în A sînt adevărate următoarele enunţuri:

(a) $\neg(\forall x)\, P(x) \Longleftrightarrow (\exists x) \neg P(x)$

(b) $\neg(\exists x)\, P(x) \Longleftrightarrow (\forall x) \neg P(x)$

(c) $(\forall x)\, P(x) \Longrightarrow (\exists x)\, P(x)$

(d) $[(\forall x)(P(x) \Longrightarrow Q(x))] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Longrightarrow (\forall x)Q(x)]$

(e) $[(\exists x)\, P(x) \Longrightarrow (\exists x)Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)(P(x) \Longrightarrow Q(x))]$

(f) $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)] \Longleftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)]$

(g) $\exists x\, [P(x) \vee Q(x)] \Longleftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)]$