LOGICA DE ORDINUL I

Limbaje de ordinul I

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
- conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;
- paranteze: (,);
- simbolul de egalitate $=$;
- cuantificatorul universal $\forall$;
- o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;
- o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;
- o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;
- o funcție aritate $\mathrm{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathrm{ari})$.
- τ se numește signatura lui $\mathcal{L}$ sau vocabularul lui $\mathcal{L}$ sau alfabetul lui $\mathcal{L}$ sau tipul de similaritate al lui $\mathcal{L}$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \ldots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m;

$\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m.

Definiția 1.1

Mulțimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ.

Definiția 1.2

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice i.

- Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i,j)-subexpresia lui θ;
- Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i,j)-subexpresia lui θ;
- Notăm cu $Var(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ.

Definiția 1.3

Mulțimea $Trm_{\mathcal{L}}$ a termenilor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- orice variabilă este element al lui Γ;
- orice simbol de constantă este element al lui Γ;
- dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$.

Notații:

- Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.
- $Var(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t.
- Scriem $t(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și $Var(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definiția 1.4

Un termen t se numește închis dacă $Var(t) = \emptyset$.

Propoziția 1.5 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- Γ conține variabilele și simbolurile de constante;
- dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Termeni

*Citire unică (*Unique readability*)*

Dacă t este un termen, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $t = x$, unde $x \in V$;
- $t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;
- $t = ft_1 \dots t_m$, unde $f \in \mathcal{F}_m$ $(m \geq 1)$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni.

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

Formule

Definiția 1.6

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- $(Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.

Definiția 1.7

Mulțimea $Form_{\mathcal{L}}$ a formulelor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- orice formulă atomică este element al lui Γ;
- Γ este închisă la $\neg$: dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\to$: dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\forall x$ (pentru orice variabilă x): dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ pentru orice variabilă x.

Formule

Notații

- Formule: $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
- $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ.

Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \ldots t_m$ în loc de $(Rt_1 \ldots t_m)$, $\forall x \varphi$ în loc de $(\forall x \varphi)$, etc..

Propoziția 1.8 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- Γ conține toate formulele atomice;
- Γ este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).

Atunci $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Formule

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = (s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- $\varphi = (Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- $\varphi = (\forall x\psi)$, unde x este variabilă și ψ este formulă.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și cuantificatorul existențial $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi \vee \psi & := & ((\neg\varphi) \to \psi) \\
\varphi \wedge \psi & := & \neg(\varphi \to (\neg\psi))) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & := & ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\
\exists x\varphi & := & (\neg\forall x(\neg\varphi)).
\end{array}
$$

Formule

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.
- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- Așadar, $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.

Notații

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- Scriem de multe ori $f(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $ft_1 \ldots t_m$ și $R(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \ldots t_m$.
- Pentru simboluri f de operații binare scriem $t_1 f t_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem $t_1 R t_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

Definiția 1.9

O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- A este o mulțime nevidă;
- $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;
- $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.

- A se numește universul structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$
- $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește denotația sau interpretarea lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \to y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \land \neg(y = z) \land \neg(z = x))$$

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} =<,\ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +,\ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot,\ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S,\ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}$-structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{^{-1}}\}$; $\dot{*}$ simbol binar, $\dot{^{-1}}$ simbol unar
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{^{-1}}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{^{-1}}, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$-structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$.
Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{^{-1}}^{\mathcal{G}} = ^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

SEMANTICA

Interpretare (evaluare)

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiția 1.10

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiția 1.11 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a *termenului t sub evaluarea e*:

- dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- dacă $t = ft_1 \ldots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0,1\}$$

a *formulei* φ *sub evaluarea* e.

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Negația și implicația

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$\rightarrow: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\,\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ sau $\psi^{\mathcal{A}}(e) = 1\big)$.

Notație

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \to A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 1.12

Fie φ o formulă. Spunem că:

- e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.
- e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

Corolarul 1.13

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ implică $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

$\vee, \wedge, \leftrightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 1.14

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

Relația de satisfacere

$$
\begin{aligned}
(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \quad & \iff \quad (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\
& \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 0 \\
& \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1.
\end{aligned}
$$

Corolarul 1.15

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \land \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \lor \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.16

Spunem că φ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui φ.

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.
Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.17

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 1.18

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.19

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \Dashv\vDash \psi$

Definiția 1.20

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \Dashv\vDash \psi$ ddacă $(\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi)$ ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Propoziția 1.21

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x\neg\varphi && (1)\\
\neg\forall x\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\models} \exists x\neg\varphi && (2)\\
\forall x(\varphi\wedge\psi) &\mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x\varphi\wedge\forall x\psi && (3)\\
\forall x\varphi\vee\forall x\psi &\models \forall x(\varphi\vee\psi) && (4)\\
\exists x(\varphi\wedge\psi) &\models \exists x\varphi\wedge\exists x\psi && (5)\\
\exists x(\varphi\vee\psi) &\mathrel{\text{⫤}\!\models} \exists x\varphi\vee\exists x\psi && (6)\\
\forall x(\varphi\to\psi) &\models \forall x\varphi\to\forall x\psi && (7)\\
\forall x(\varphi\to\psi) &\models \exists x\varphi\to\exists x\psi && (8)\\
\forall x\varphi &\models \exists x\varphi && (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\vDash \exists x \varphi && (10)\\ \forall x \varphi &\vDash \varphi && (11)\\ \forall x \forall y \varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y \forall x \varphi && (12)\\ \exists x \exists y \varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists y \exists x \varphi && (13)\\ \exists y \forall x \varphi &\vDash \forall x \exists y \varphi. && (14) \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.22

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \rightarrow t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \rightarrow s = u$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.23

Pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \ldots, m$,

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m \quad (15)$$

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m). \quad (16)$$

Dem.: Arătăm (15). Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \models ((t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \models (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned}(ft_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \ldots u_m)^{\mathcal{A}}(e)\end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \models (ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m)[e]$. $\square$

Fie φ formulă lui $\mathcal{L}$ și Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 1.24

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui Γ.

Definiția 1.25

Spunem că φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$(\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \Gamma \implies (\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Definiția 1.26

Spunem că Δ este consecință semantică a lui Γ dacă

$$\Gamma \vDash \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.$$

Notație: $\Gamma \vDash \Delta$

Propoziția 1.27

(i) $\vDash \psi \iff \emptyset \vDash \psi$;

(ii) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vDash \psi$, atunci $\Delta \vDash \psi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vDash \Delta$ și $\Delta \vDash \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.28

(i) $\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Dem.:

(i) $\Gamma \not\vDash \varphi \iff$ există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î. $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui Γ și $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \iff$ există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î. $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui Γ și $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

(ii) Similar.

(iii) Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model al lui Γ. Avem fie $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$, fie $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e]$. Rezultă că $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sau al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Concluzia rezultă. $\square$

Tautologii

Noțiunile de tautologie și consecință tautologică din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor $\neg, \rightarrow$.

Definiția 1.29

O $\mathcal{L}$-evaluare (de adevăr) este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ,

- $F(\neg\varphi) = 1 - F(\varphi)$;
- $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 1.30

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$-evaluare.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 1.31

Fie φ o formulă și Γ o mulțime de formule.

- φ este tautologie dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare F.
- φ este consecință tautologică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad F(\varphi) = 1.$$

Exemple de tautologii: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$, etc..

Propoziția 1.32

Fie φ o formulă și Γ o mulțime de formule.

(i) Dacă φ este tautologie, atunci φ este validă.

(ii) Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ, atunci $\Gamma \vDash \varphi$.

Dem.:

(i) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$-evaluare, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.

(ii) Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model al lui Γ. Atunci $\gamma^{\mathcal{A}}(e) = 1$, deci $V_{e,\mathcal{A}}(\gamma) = 1$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Deoarece φ este consecință tautologică a lui Γ, rezultă că $V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, deci $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. $\square$

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu e tautologie.

Definiția 1.33

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. (i,j)-subexpresia lui φ este o subexpresie a lui φ de forma $\forall x\psi$;
- spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ;
- x este variabilă legată (*bounded variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ;
- x este variabilă liberă (*free variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ.

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Variabile legate și libere

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$
\begin{array}{lcll}
FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\
FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi); & \\
FV(\varphi \to \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi); & \\
FV(\forall x\varphi) & = & FV(\varphi) \setminus \{x\}. &
\end{array}
$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propoziția 1.34

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Aplicăm inducția pe termeni. Avem următoarele cazuri:

- $t = v \in V$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = e_1(v) = e_2(v) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.
- $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2) = c^{\mathcal{A}}$.

Demonstrația Propoziției 1.34

- $t = ft_1 \dots t_m$, cu $f \in \mathcal{F}_m$, $m \geq 1$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni.

Deoarece $Var(t_i) \subseteq Var(t)$, rezultă că pentru orice $i = 1, \dots, m$, avem $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t_i)$.

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru a concluziona că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

$\square$

Propoziția 1.35

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$, $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 1.34 pentru a conclude că
$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$
Rezultă
$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

Demonstrația Propoziției 1.35

- $\varphi = Rt_1 \ldots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$, deci putem aplica Propoziția 1.34 pentru a conclude că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, m.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) \\ &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a conclude că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \quad \iff \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e_2].$$

Rezultă

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Demonstrația Propoziției 1.35

- $\varphi = \psi \to \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a conclude că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \chi[e_2].$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

Demonstrația Propoziției 1.35

- $\varphi = \forall x \psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1x \leftarrow a}(v) = e_{2x \leftarrow a}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1x \leftarrow a}, e_{2x \leftarrow a}$ pentru a conclude că

$$\text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \leftarrow a}].$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \quad &\iff \quad \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \leftarrow a}] \\ &\iff \quad \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \leftarrow a}] \\ &\iff \quad \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

□

Propoziția 1.36

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \exists x\varphi \tag{17}$$
$$\varphi \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \forall x\varphi \tag{18}$$
$$\forall x(\varphi \land \psi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \varphi \land \forall x\psi \tag{19}$$
$$\forall x(\varphi \lor \psi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \varphi \lor \forall x\psi \tag{20}$$
$$\exists x(\varphi \land \psi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \varphi \land \exists x\psi \tag{21}$$
$$\exists x(\varphi \lor \psi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \varphi \lor \exists x\psi \tag{22}$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \varphi \to \forall x\psi \tag{23}$$
$$\exists x(\varphi \to \psi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \varphi \to \exists x\psi \tag{24}$$
$$\forall x(\psi \to \varphi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \exists x\psi \to \varphi \tag{25}$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \;\vDash\!\!\!\Dashv\; \forall x\psi \to \varphi \tag{26}$$

Dem.: Exercițiu.

Notație

Fie $t(x_1, \ldots, x_n)$ un termen. Scriem uneori

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]$$

în loc de $t^{\mathcal{A}}(e)$, unde $e : V \to A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \ldots, e(x_n) = a_n$.

Notație

Fie $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ o formulă. Scriem uneori

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

în loc de $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$, unde $e : V \to A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \ldots, e(x_n) = a_n$.

Definiția 1.37

O formulă φ se numește enunț (*sentence*) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.
Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 1.38

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \Longleftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 1.35 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. $\square$

Definiția 1.39

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model al lui φ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Notație: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Lema 1.40

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ,

(i) $\Gamma \vDash \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.

(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.

(iii) Γ este satisfiabilă $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 1.41

O $\mathcal{L}$-teorie este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \vDash \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 1.42

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, teoria generată de Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \vDash \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Propoziția 1.43

(i) $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$.

(ii) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(iii) $Th(\Gamma)$ este o teorie.

(iv) $Th(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.:

(i) Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \vDash \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$.

(ii) "$\supseteq$" Conform (i) și Lemei 1.40.(ii).
"$\subseteq$" Conform definiției lui $Th(\Gamma)$.

(iii) Pentru orice enunț φ, avem că
$Th(\Gamma) \vDash \varphi \iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$
$\iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ (conform (ii)) $\iff \varphi \in Th(\Gamma)$.

(iv) Fie T o teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \vDash \varphi$. Deoarece T este teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$. $\square$

Propoziția 1.44

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ,

(i) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Th(\Gamma) \subseteq Th(\Delta)$.

(ii) Γ este teorie $\iff \Gamma = Th(\Gamma)$.

(iii) $Th(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi$ este enunț valid$\}$ este inclusă în orice teorie.

Dem.: Exercițiu ușor.

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește teorie axiomatică sau teorie prezentată axiomatic. Γ se numește mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Definiția 1.45

O teorie T este finit axiomatizabilă dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ.

Definiția 1.46

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\mathcal{K}$.

Definiția 1.47

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime finită de enunțuri Γ.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned}
(REFL) &:= \forall x (x \dot{\equiv} x) \\
(SIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\equiv} y \to y \dot{\equiv} x) \\
(TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\equiv} y \wedge y \dot{\equiv} z \to x \dot{\equiv} z)
\end{aligned}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este

$$T := Th((REFL), (SIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A.
- $\mathcal{K} = Mod(T)$, deci T axiomatizează $\mathcal{K}$.
- Spunem și că T axiomatizează clasa relațiilor de echivalență.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y \big(x \neq y \wedge x \dot{\equiv} y \wedge \forall z (z \dot{\equiv} x \rightarrow (z = x \vee z = y))\big),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

Exemple - Teoria grafurilor

Un graf este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V. Elementele lui V se numesc vârfuri, iar elementele lui E se numesc muchii.

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \to \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt grafurile.
- T axiomatizează clasa grafurilor.

Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{array}{rcl} (REFL) & := & \forall x (x \dot{\leq} x) \\ (ANTISIM) & := & \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y) \\ (TRANZ) & := & \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z) \end{array}$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg (x \dot{<} x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.

Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) \quad := \quad \forall x \forall y \big(x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y)\big).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.

Exemple

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 1.48

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemple

Notații

- Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.
- $\exists^{\leq n} := \neg\exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 1.49

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} \vDash \exists^{\leq n} & \iff & A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \vDash \exists^{=n} & \iff & A \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{array}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.50

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash T \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Generalizare a noțiunii de homomorfism de la algebră:

Definiția 1.51

Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$-structuri, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$ și $h : A \to B$ o funcție. Spunem că h este homomorfism și scriem $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dacă:

(i) pentru orice $m \geq 1$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice elemente $a_1, \ldots, a_m \in A$,

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) \iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m))$$

(ii) pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și orice elemente $a_1, \ldots, a_m \in A$,

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m))$$

(iii) pentru orice $c \in \mathcal{C}$, $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Definiția 1.52

Un homomorfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se numește izomorfism dacă h este bijectiv.
Notație: $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Definiția 1.53

$\mathcal{L}$-structurile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ se numesc izomorfe dacă există $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Exemplu

- $\mathcal{L} = (\dot{<}, \star, c)$, unde $\dot{<}$ este simbol de relație binară, $\star$ este simbol de operație binară și c este simbol de constantă.
- $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <, +, 0)$ și $\mathcal{B} = ((0, \infty), <, \cdot, 1)$.
- $h : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad h(x) = 2^x$ este izomorfism

Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$-structuri, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$ și $h : A \to B$.
Oricărei evaluări $e : V \to A$ a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ i se asociază o evaluare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{B}$: $h \circ e : V \to B, \quad (h \circ e)(v) = h(e(v))$.

Definiția 1.54

(i) Spunem că h respectă un termen t dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,
$$h(t^{\mathcal{A}}(e)) = t^{\mathcal{B}}(h \circ e).$$

(ii) Spunem că h respectă o formulă φ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e].$$

Propoziția 1.55

Orice homomorfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ respectă toți termenii.

Dem.: Exercițiu. Prin inducție după termeni.

Homomorfisme, izomorfisme

- Fie $t(x_1, \ldots, x_n)$ un termen. Atunci h respectă t $\iff$ pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in A$,
$$h(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$
- Fie $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ o formulă. Atunci h respectă φ $\iff$ pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in A$,
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{B} \vDash \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$

Exemplu

$\mathcal{L} = (\dot{<}, \star, c)$, $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <, +, 0)$, $\mathcal{B} = ((0, \infty), <, \cdot, 1)$,
$h : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\quad h(x) = 2^x$

$t(x, y) = x * (y * c)$, $\quad e : V \to A$, $e(x) = 3, e(y) = 7$.

- $t^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}[3, 7] = 3 + (7 + 0) = 10$
- $t^{\mathcal{B}}(h \circ e) = t^{\mathcal{B}}[h(3), h(7)] = t^{\mathcal{B}}[2^3, 2^7] = 2^3 \cdot (2^7 \cdot 1) = 2^{10}$
- $h(t^{\mathcal{A}}[3, 7]) = 2^{10} = t^{\mathcal{B}}[h(3), h(7)]$.

Propoziția 1.56

Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$-structuri. Orice izomorfism $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ respectă toate formulele.

Dem.: Trebuie să demonstrăm că pentru orice formulă φ,

pentru orice evaluare $e : V \to A$, $\quad \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Longleftrightarrow \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e]$.

Aplicăm inducția pe formule. Fie $e : V \to A$. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad &\Longleftrightarrow \quad t_1^{\mathcal{A}}(e) = t_2^{\mathcal{A}}(e) \Longleftrightarrow h(t_1^{\mathcal{A}}(e)) = h(t_2^{\mathcal{A}}(e)) \\
&\qquad \text{deoarece } h \text{ este injectivă} \\
&\Longleftrightarrow \quad t_1^{\mathcal{B}}(h \circ e) = t_2^{\mathcal{B}}(h \circ e) \\
&\qquad \text{deoarece } h \text{ respectă termenii} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e]
\end{aligned}$$

- $\varphi = Rt_1 \ldots t_m$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \varphi[e] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e) \ldots t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\
&\iff R^{\mathcal{B}}(h(t_1^{\mathcal{A}}(e)), \ldots, h(t_m^{\mathcal{A}}(e))) \\
&\qquad \text{deoarece } h \text{ este homomorfism} \\
&\iff R^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}(h \circ e), \ldots, t_m^{\mathcal{B}}(h \circ e)) \\
&\qquad \text{deoarece } h \text{ respectă termenii} \\
&\iff \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e].
\end{aligned}$$

- Pașii de inducție pentru $\neg$ și $\rightarrow$ sunt imediați.

- $\varphi = \forall x\psi$. Atunci

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{B} \vDash \psi[h \circ e_{x \leftarrow a}] \\
& \quad \text{conform ipotezei de inducție pentru } \psi \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{B} \vDash \psi[(h \circ e)_{x \leftarrow h(a)}] \\
& \quad \text{deoarece } h \circ e_{x \leftarrow a} = (h \circ e)_{x \leftarrow h(a)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } b \in B,\ \mathcal{B} \vDash \psi[(h \circ e)_{x \leftarrow b}] \\
& \quad \text{deoarece } h \text{ este surjectiv} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e].
\end{aligned}
$$

$\square$

Elementar echivalența

Definiția 1.57

Două $\mathcal{L}$-structuri $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ se numesc elementar echivalente (scriem $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) dacă pentru orice enunț φ,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi.$$

Propoziția 1.58

Pentru orice $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$, dacă $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Dem.: Fie $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ un izomorfism. Pentru orice enunț φ, avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \varphi \quad & \Longleftrightarrow \quad \text{pentru o (orice) evaluare } e : V \to A, \quad \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
& \Longleftrightarrow \quad \text{pentru o (orice) evaluare } e : V \to A, \quad \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e] \\
& \qquad\quad \text{conform Propoziției 1.56} \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

- $\mathcal{L}_= = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A)$, unde A este mulțime nevidă.

Fie $\mathcal{A} = (A), \mathcal{B} = (B)$ două $\mathcal{L}_=$-structuri.

- $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \iff h : A \to B$.
- $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff h : A \to B$ este bijecție.
- $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff |A| = |B|$.

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

Propoziția 1.59

Fie $\mathcal{A} = (A)$ o $\mathcal{L}_=$-structură finită și $n = |A|$. Atunci enunțul $\exists^{=n}$ caracterizează $\mathcal{A}$ până la izomorfism, i.e.: pentru orice $\mathcal{L}_=$-structură $\mathcal{B} = (B)$,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \exists^{=n}.$$

Dem.: $\mathcal{B} \vDash \exists^{=n} \iff |B| = n \iff \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. $\square$

Propoziția 1.60

Pentru orice $\mathcal{L}_=$-structuri finite $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Dem.: "$\Rightarrow$" Conform Propoziției 1.58.
"$\Leftarrow$" Presupunem că $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ și fie $n = |A|$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{=n}$, deci $\mathcal{B} \vDash \exists^{=n}$. Se aplică acum propoziția precedentă. $\square$

Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ un limbaj de ordinul întâi.

Definiția 1.61

Cardinalul lui $\mathcal{L}$ este prin definiție

$$\|\mathcal{L}\| := |\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}|.$$

- $\mathcal{L}$ este finit dacă $\|\mathcal{L}\|$ este finit.
- $\mathcal{L}$ este numărabil dacă $\|\mathcal{L}\| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- $\mathcal{L}$ este cel mult numărabil dacă $\mathcal{L}$ este finit sau numărabil.

Propoziția 1.62

$$|Form_{\mathcal{L}}| = \begin{cases} \aleph_0 & \text{dacă } \mathcal{L} \text{ este finit} \\ \|\mathcal{L}\| & \text{altfel.} \end{cases}$$

Definiția 1.63

O mulțime de enunțuri Γ se numește completă dacă pentru orice enunț ψ,

$$\Gamma \models \psi \text{ sau } \Gamma \models \neg\psi.$$

Observație: O $\mathcal{L}$-teorie T este completă $\iff$ pentru orice enunț φ, avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.

Testul lui Vaught 1.64

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj cel mult numărabil și T o $\mathcal{L}$-teorie satisfiabilă. Presupunem că

(i) T nu are modele finite;

(ii) orice două modele numărabile ale lui T sunt izomorfe.

Atunci T este completă.

Definiția 1.65

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, teoria lui $\mathcal{A}$ este:

$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \mathcal{A} \vDash \varphi\}.$$

Propoziția 1.66

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $Th(\mathcal{A})$ este o teorie completă satisfiabilă

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.67

Pentru orice $\mathcal{L}$-structuri $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.68

Fie T o teorie satisfiabilă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) T este completă.

(ii) Pentru orice model $\mathcal{A}$ al lui T, $Th(\mathcal{A}) = T$.

(iii) Orice două modele ale lui T sunt elementar echivalente.

Dem.: (i)$\Rightarrow$(ii) Fie $\mathcal{A}$ model al lui T.
"$\supseteq$" Evident.
"$\subseteq$" Pentru orice enunț $\varphi \in Th(\mathcal{A})$, dacă $\varphi \notin T$, atunci $\neg\varphi \in T$ (deoarece T este completă), deci $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$, ceea ce contrazice faptul că $\mathcal{A} \vDash \varphi$.
(ii)$\Rightarrow$(iii) Fie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modele ale lui T. Atunci $T = Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$. Aplicăm Propoziția 1.67 pentru a obține că $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.
(iii)$\Rightarrow$(i) Fie φ un enunț. Presupunem că $T \not\vDash \varphi$. Atunci există un model $\mathcal{A}$ al lui T a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \varphi$, deci $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$. Aplicând (iii), obținem că $\mathcal{B} \vDash \neg\varphi$ pentru orice model $\mathcal{B}$ al lui T. Așadar, $T \vDash \neg\varphi$. $\square$

$\mathcal{K}$ este o clasă nevidă de $\mathcal{L}$-structuri

Definiția 1.69

Teoria lui $\mathcal{K}$ este mulțimea $Th(\mathcal{K}) := \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{K}} Th(\mathcal{A})$.

Propoziția 1.70

(i) Fiecare $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ este model al lui $Th(\mathcal{K})$.

(ii) Dacă $\mathcal{K}$ are cel puțin două elemente $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ care nu sunt elementar echivalente, atunci $Th(\mathcal{K})$ nu este o teorie completă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziţia 1.71

Pentru orice $n \geq 1$ şi orice mulţime finită A cu n elemente,

$$Th(\exists^{=n}) = Th(\mathcal{A}), \quad \text{unde } \mathcal{A} = (A).$$

În particular, $Th(\exists^{=n})$ este o teorie completă.

Dem.: "$\subseteq$" Deoarece $\mathcal{A} \vDash \exists^{=n}$, avem că $\mathcal{A} \vDash Th(\exists^{=n})$. Prin urmare, $Th(\exists^{=n}) \subseteq Th(\mathcal{A})$.
"$\supseteq$" Fie $\varphi \in Th(\mathcal{A})$, i.e. $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Vrem să arătăm că $\varphi \in Th(\exists^{=n})$, i.e. $\exists^{=n} \vDash \varphi$. Fie $\mathcal{B} = (B)$ a.î. $\mathcal{B} \vDash \exists^{=n}$. Atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, conform Propoziţiei 1.59. Rezultă că $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, prin urmare $\mathcal{B} \vDash \varphi$.

$\square$

Propoziția 1.72

$Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$ este completă.

Dem.: Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Conform Propoziției 1.46, $\mathcal{A} = (A)$ este model a lui $T \iff A$ este mulțime infinită.

Prin urmare, T este satisfiabilă și nu are modele finite.

În plus, dacă $\mathcal{A} = (A), \mathcal{B} = (B)$ sunt două modele numărabile ale lui T, atunci $|A| = |B| = \aleph_0$, deci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Putem aplica Testul lui Vaught pentru a conclude că T este completă. $\square$

Corolarul 1.73

Pentru orice mulțime infinită A ,

$$Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}) = Th(\mathcal{A}), \quad \text{unde } \mathcal{A} = (A).$$

Dem.: Deoarece $Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$ este completă, putem aplica Propoziția 1.68.(ii). $\square$

Corolarul 1.74

Pentru orice mulțimi infinite A și B, $\mathcal{L}_=$-structurile $\mathcal{A} = (A)$, $\mathcal{B} = (B)$ sunt elementar echivalente.

Dem.: Aplicăm Propoziția 1.68.(iii). $\square$

Substituția

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.75

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$t_x(u)$:= expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u.

Propoziția 1.76

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după termenul t.

- $t = y \in V$. Atunci $y_x(u) = \begin{cases} y & \text{dacă } y \neq x \\ u & \text{dacă } y = x. \end{cases}$
- $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $c_x(u) = c$.
- $t = ft_1 \ldots t_m$ și, conform ipotezei de inducție, $(t_1)_x(u), \ldots, (t_m)_x(u)$ sunt termeni. Atunci $(ft_1 \ldots t_m)_x(u) = f(t_1)_x(u) \ldots (t_m)_x(u)$ este termen. $\square$

Substituția

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y\neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y\neg(y = y)$.
Avem

- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[a]$. Deci $\forall x\varphi$ este satisfiabilă.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 1.77

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y \psi$ nu conține apariții libere ale lui x.

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- u nu conține variabile;
- φ nu conține variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conține apariții libere ale lui x.

Substituția

Definiție alternativă

Noțiunea "x este liberă pentru u în φ" poate fi definită și prin inducție după formula φ astfel:

- dacă φ este formulă atomică, atunci x este liberă pentru u în φ;
- dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă x este liberă pentru u în ψ;
- dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă x este liberă pentru u atât în ψ cât și în χ;
- dacă $\varphi = \forall y\psi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă
  - x nu apare liberă în φ, sau
  - y nu apare în u și x este liberă pentru u în ψ.

Substituția

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiția 1.78

$$\varphi_x(u) \quad := \quad \text{expresia obținută din } \varphi \text{ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui } x \text{ cu } u.$$

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituție liberă.

Propoziția 1.79

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Dem.: Exercițiu.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$.

Lema 1.80

Fie x o variabilă, u un termen și $a = u^{\mathcal{A}}(e)$.

(i) Pentru orice termen t, $(t_x(u))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a})$.

(ii) Pentru orice formulă φ, dacă x este liberă pentru u în φ, atunci
$$\mathcal{A} \vDash \varphi_x(u)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}].$$

Ideea lemei este următoarea: a schimba evaluarea e pentru a atribui variabilei x valoarea $a \in A$ este același lucru cu a înlocui x cu un termen u a cărui interpretare sub e este a.

Propoziția 1.81

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x,

(i) pentru orice termen t,

$$\models u_1 = u_2 \to t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ,

$$\models u_1 = u_2 \to (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$. Presupunem că $\mathcal{A} \models (u_1 = u_2)[e]$, adică $u_1^{\mathcal{A}}(e) = u_2^{\mathcal{A}}(e) := a \in A$.

(i) Conform Lemei 1.80.(i),

$$(t_x(u_1))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = (t_x(u_2))^{\mathcal{A}}(e),$$

deci $\mathcal{A} \models (t_x(u_1) = t_x(u_2))[e]$.

(ii) Aplicând Lema 1.80.(ii), obținem

$$\mathcal{A} \models \varphi_x(u_1)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi_x(u_2)[e].$$

Deci, $\mathcal{A} \models (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2))[e]$. $\square$

Propoziția 1.82

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

(ii) $\vDash \forall x\varphi \to \varphi, \qquad \vDash \varphi \to \exists x\varphi.$

(iii) Pentru orice simbol de constantă c,

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \vDash \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

Dem.:

(i) Fie $\mathcal{A}$ și $e : V \to A$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \forall x\varphi[e] \quad &\iff \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \\ &\Longrightarrow \quad \text{pentru } a = u^{\mathcal{A}}(e),\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \\ &\iff \quad \mathcal{A} \vDash \varphi_x(u)[e] \quad \text{conform Lemei 1.80.(ii).} \end{aligned}$$

A doua aserțiune rezultă din prima aplicată la $\neg\varphi$.

Propoziția 1.83

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \models \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \to \varphi, \qquad \models \varphi \to \exists x\varphi.$

(iii) Pentru orice simbol de constantă c,

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \models \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

Dem.: (continuare)

(ii) Aplicăm (i) cu $u := x$.

(iii) Aplicăm (i) cu $u := c$. $\square$

Substituția

În general, dacă x si y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \nvDash (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 1.84

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\text{⊨}} \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\text{⊨}} \forall y\varphi_x(y).$$

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ și $e : V \to A$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \exists y\varphi_x(y)[e] \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi_x(y)[e_{y\leftarrow a}] \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{y\leftarrow a, x\leftarrow a}] \\
&\qquad\quad \text{conform Lemei 1.80.(ii), deoarece} \\
&\qquad\quad y^{\mathcal{A}}(e_{y\leftarrow a}) = e_{y\leftarrow a}(y) = a \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\qquad\quad \text{deoarece } y \notin FV(\varphi) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \exists x\varphi[e].
\end{aligned}$$

Analog pentru a doua aserțiune. $\square$

Folosim Propoziția 1.84 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 1.85

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \ldots, y_k$, varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ;
- dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;
- dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci φ' este $\psi' \to \chi'$;
- dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w \psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \ldots, y_k\} \\ \forall z \psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

  unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \ldots,$ care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \ldots, y_k$.

Definiția 1.86

φ' este variantă a lui φ dacă este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \ldots, y_k$.

Propoziția 1.87

(i) Pentru orice formulă φ, dacă φ' este o variantă a lui φ, atunci $\varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi'$;

(ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t, dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \ldots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ, atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.

Dem.: Exercițiu.

Definiția 1.88

O formulă care nu conține cuantificatori se numește liberă de cuantificatori ("quantifier-free").

Definiția 1.89

O formulă φ este în formă normală prenex dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește matricea lui φ și $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$ este prefixul lui φ.

Exemple de formule în formă normală prenex:

- Formulele universale: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \, \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori
- Formulele existențiale: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \, \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori

Forma normală prenex

Fie φ o formulă și $t_1, \ldots, t_n$ termeni care nu conțin variabile din φ. Notăm cu $\varphi_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n)$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui $x_1, \ldots, x_n$ cu $t_1, \ldots, t_n$ respectiv.

Notații: $\forall^c = \exists, \quad \exists^c = \forall$.

Teorema de formă normală prenex 1.90

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă

$\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0$ în formă normală prenex a.î. $\psi \mathrel{\text{⫤⊨}} \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^c x_1 \ldots Q_n^c x_n \neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $\varphi^* \mathrel{\text{⫤⊨}} \neg\psi^* \mathrel{\text{⫤⊨}} \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

Teorema de formă normală prenex 1.90

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \boxminus\!\!\!\!\dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: (continuare) • $\varphi = \psi \to \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

$$\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \ldots S_m z_m \chi_0$$

a.î. $\psi \boxminus\!\!\!\!\dashv \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \boxminus\!\!\!\!\dashv \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.
Notăm cu V_0 mulțimea tuturor variabilelor care apar în ψ^* sau χ^*.
Fie $\tilde{\psi}^*$ (resp. $\tilde{\chi}^*$) varianta V_0-liberă a lui ψ^* (resp. χ^*). Atunci

$$\tilde{\psi}^* = Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\chi}^* = S_1 w_1 \ldots S_m w_m \tilde{\chi}_0,$$

unde $y_1, \ldots, y_n, w_1, \ldots, w_m$ sunt variabile care nu apar în V_0,
$\tilde{\psi}_0 = {\psi_0}_{x_1,\ldots,x_n}(y_1, \ldots, y_n)$ și $\tilde{\chi}_0 = {\chi_0}_{z_1,\ldots,z_m}(w_1, \ldots, w_m)$.

Teorema de formă normală prenex 1.90

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \vDash\!\!\!\Dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: (continuare) Conform Propoziției 1.87, $\tilde{\psi^*} \vDash\!\!\!\Dashv \psi^*$ și $\tilde{\chi^*} \vDash\!\!\!\Dashv \chi^*$. De asemenea, $FV(\tilde{\psi^*}) = FV(\psi^*)$ și $FV(\tilde{\chi^*}) = FV(\chi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1 \ldots Q_n^c y_n S_1 w_1 \ldots S_m w_m (\tilde{\psi_0} \to \tilde{\chi_0}).$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\begin{aligned} \varphi^* & \vDash\!\!\!\Dashv \tilde{\psi^*} \to \tilde{\chi^*} \\ & \vDash\!\!\!\Dashv \psi^* \to \chi^* \\ & \vDash\!\!\!\Dashv \psi \to \chi = \varphi. \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă normală prenex a.î. $\psi \vDash\!\!\!\Dashv \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.

Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$. □

Definiția 1.91

Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}_\mathcal{L}, \mathcal{F}_\mathcal{L}, \mathcal{C}_\mathcal{L}; \mathsf{ari}_\mathcal{L})$ și $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}; \mathsf{ari}_{\mathcal{L}^+})$ două limbaje. Spunem că $\mathcal{L}^+$ este extensie a lui $\mathcal{L}$ sau că $\mathcal{L}$ este sublimbaj al lui $\mathcal{L}^+$ dacă

$$\mathcal{R}_\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{F}_\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{C}_\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}$$

și $\mathsf{ari}_\mathcal{L}$ este restricția lui $\mathsf{ari}_{\mathcal{L}^+}$ la simbolurile nelogice ale lui $\mathcal{L}$.
Notație: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$

Definiția 1.92

Spunem că $\mathcal{L}^+$ este o extensie prin constante a lui $\mathcal{L}$ dacă

$$\mathcal{R}_\mathcal{L} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{F}_\mathcal{L} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{C}_\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}.$$

Exemple

- $\mathcal{L}_= \subseteq \mathcal{L}$ pentru orice limbaj $\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}) \subseteq (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}) \subseteq \mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

Schimbarea limbajelor

Dacă $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, atunci orice termen (formulă) din $\mathcal{L}$ este termen (formulă) în $\mathcal{L}^+$.

Definiția 1.93

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$-structură.
Spunem că $\mathcal{A}$ este $\mathcal{L}$-redusa lui $\mathcal{A}^+$ sau că $\mathcal{A}^+$ este $\mathcal{L}^+$-extensia lui $\mathcal{A}$ dacă

- $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$;
- pentru orice $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}^+}$;
- pentru orice $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}^+}$;
- pentru orice $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}^+}$.

Notație: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$

Exemplu

$(\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ are redusele $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, S, 0)$, $(\mathbb{N}, <)$.

Propoziția 1.94

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură, $A = |\mathcal{A}|$. Pentru orice $\mathcal{L}^+$-extensie $\mathcal{A}^+$ a lui $\mathcal{A}$ și pentru orice evaluare $e : V \to A$,

(i) $t^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}^+}(e)$ pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$;

(ii) pentru orice formulă φ a lui $\mathcal{L}$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A}^+ \vDash \varphi[e]$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.95

Pentru orice $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ și pentru orice formulă φ a lui $\mathcal{L}$, următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $e : V \to |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$;

(ii) pentru orice $\mathcal{L}^+$-structură $\mathcal{A}^+$ și orice $e : V \to |\mathcal{A}^+|$, $\mathcal{A}^+ \vDash \varphi[e]$.

Dem.: (i)⇒(ii) Fie $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$-structură și $e : V \to |\mathcal{A}^+|$. Considerăm $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{A} := \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$. Atunci $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$, deci, conform (i), $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Aplicăm acum Propoziția 1.94 pentru a conclude că $\mathcal{A}^+ \vDash \varphi[e]$.
(ii)⇒(i) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to |\mathcal{A}|$. Considerăm o $\mathcal{L}^+$-extensie arbitrară $\mathcal{A}^+$ a lui $\mathcal{A}$. Atunci $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$, deci, conform (ii), $\mathcal{A}^+ \vDash \varphi[e]$. Aplicăm acum Propoziția 1.94 pentru a conclude că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.

Corolarul 1.96

Pentru orice $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ și orice mulțime de enunțuri Γ a lui $\mathcal{L}$, $Th_{\mathcal{L}}(\Gamma) = Sen_{\mathcal{L}} \cap Th_{\mathcal{L}^+}(\Gamma)$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Corolarul 1.97

Pentru orice $\mathcal{L}^- \subseteq \mathcal{L}$ și orice $\mathcal{L}$-structuri $\mathcal{A}, \mathcal{B}$,

(i) $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^- \simeq \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}^-$.

(ii) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^- \equiv \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}^-$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 1.98

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $X \subseteq A$.

(i) $\mathcal{L}^X$ este extensia lui $\mathcal{L}$ obținută adăugând, pentru orice $a \in X$, un nou simbol de constantă $\dot{a}$.
Spunem că $\dot{a}$ este un nume pentru a.

(ii) $\mathcal{A}_X$ este $\mathcal{L}^X$-extensia lui $\mathcal{A}$ obținută definind pentru orice $a \in X$, $\dot{a}^{\mathcal{A}_X} = a$.

Observația 1.99

Pentru orice formulă φ a lui $\mathcal{L}$ cu $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in A$, fie $\varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ enunțul din $\mathcal{L}^A$ obținut din φ prin înlocuirea lui x_i cu $\dot{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{A}_A \vDash \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n).$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Lema constantelor 1.100

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj, $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ și c un simbol de constantă din $\mathcal{L}$ care nu apare în $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci

$$\Gamma \vDash \varphi_x(c) \iff \Gamma \vDash \forall x \varphi.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" este imediată, deoarece $\vDash \forall x \varphi \to \varphi_x(c)$.
"$\Rightarrow$" Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model al lui Γ, i.e. $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \gamma[e]$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$.
Vrem să demonstrăm că $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui $\forall x \varphi$, i.e. pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.
Fie $a \in A$ arbitrar. Fie $\mathcal{L}^-$ sublimbajul lui $\mathcal{L}$ obținut prin eliminarea simbolului c, $\mathcal{A}^- := \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^-$ și fie $\mathcal{A}_a$ $\mathcal{L}$-extensia lui $\mathcal{A}^-$ în care c este interpretat cu a (i.e. $c^{\mathcal{A}_a} = a$).
Deoarece $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form_{\mathcal{L}^-}$, rezultă din Propoziția 1.94 că pentru orice $\gamma \in \Gamma$,

$$\mathcal{A} \vDash \gamma[e] \iff \mathcal{A}^- \vDash \gamma[e] \iff \mathcal{A}_a \vDash \gamma[e].$$

Lema constantelor 1.100

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj, $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ și c un simbol de constantă din $\mathcal{L}$ care nu apare în $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci

$$\Gamma \vDash \varphi_x(c) \iff \Gamma \vDash \forall x \varphi.$$

Dem.: (continuare)
Așadar $(\mathcal{A}_a, e)$ este model al lui Γ și deoarece $\Gamma \vDash \varphi_x(c)$, avem că

$$\mathcal{A}_a \vDash \varphi_x(c)[e].$$

Deoarece $c^{\mathcal{A}_a} = a$, putem aplica Lema 1.80.(ii) pentru a obține că

$$\mathcal{A}_a \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}].$$

Aplicând din nou Propoziția 1.94, rezultă

$$\mathcal{A}_a \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A}^- \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}].$$

Am demonstrat astfel că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$, deci că $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui $\forall x \varphi$. $\square$

Propoziția 1.101

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj finit. Pentru orice $\mathcal{L}$-structură finită $\mathcal{A}$, există un enunț $\theta^{\mathcal{A}}$ care caracterizează $\mathcal{A}$ până la izomorfism, i.e.: pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \vDash \theta^{\mathcal{A}}.$$

Dem.: (Nu se cere la examen) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură finită cu n elemente $a_1, \ldots, a_n$. Considerăm enunțul

$$\theta^{\mathcal{A}} := \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \wedge \forall y \Bigg(\bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i \Bigg) \wedge \bigwedge_{s \in \mathcal{L}} \varphi_s \right),$$

unde formula $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)$, care descrie interpretarea simbolului s în $\mathcal{A}$, se definește astfel:

Elementar echiv. $\Rightarrow$ izomorfism - structuri finite, $\mathcal{L}$ finit

(i) dacă s este un simbol de constantă c și $c^{\mathcal{A}} = a_i$, atunci

$$\varphi_s := x_i = c.$$

(ii) dacă s este un simbol de relație R de aritate m, atunci

$$\varphi_s := \bigwedge_{(a_{i_1},\ldots,a_{i_m})\in R^{\mathcal{A}}} Rx_{i_1}\ldots x_{i_m} \wedge \bigwedge_{(a_{i_1},\ldots,a_{i_m})\notin R^{\mathcal{A}}} \neg Rx_{i_1}\ldots x_{i_m}.$$

(iii) dacă s este un simbol de operație f de aritate m, atunci

$$\varphi_s := \bigwedge_{f^{\mathcal{A}}(a_{i_1},\ldots,a_{i_m})=a_j} fx_{i_1}\ldots x_{i_m} = x_j.$$

Fie $\mathcal{B}$ o $\mathcal{L}$-structură. Atunci $\mathcal{B}$ satisface $\theta^{\mathcal{A}} \iff$ există $b_1,\ldots,b_n \in \mathcal{B}$ a.î.

(i) pentru orice $1 \le i < j \le n$, $b_i \neq b_j$ și pentru orice $b \in B$, $b \in \{b_1,\ldots,b_n\}$. Prin urmare, $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$.

(ii) pentru orice $s \in \mathcal{L}$, $\mathcal{B} \models \varphi_s[b_1,\ldots,b_n]$

$\iff \mathcal{B} = \{b_1,\ldots,b_n\}$ și funcția $h : A \to B$, $h(a_i) = b_i$ este izomomorfism de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$. $\square$

Elementar echiv. $\Rightarrow$ izomorfism - structuri finite, $\mathcal{L}$ finit

Propoziția 1.102

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj finit. Pentru orice $\mathcal{L}$-structuri finite $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ $\Longleftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Teorema 1.103

Pentru orice limbaj $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$-structură finită $\mathcal{A}$ și orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" evidentă, conform Propoziției 1.58.
"$\Rightarrow$" Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{A} \not\simeq \mathcal{B}$. Fie $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$ și $n = |A|$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{=n}$, deci $\mathcal{B} \vDash \exists^{=n}$, deoarece $\exists^{=n}$ este enunț și $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Deci, $\mathcal{B}$ este finită, cu n elemente.
Rezultă că numărul funcțiilor bijective $f : A \to B$ este finit.
Conform presupunerii, nicio bijecție $f : A \to B$ nu este izomorfism, deci nu e homorfism. Așadar, pentru orice f, există un simbol S_f al lui $\mathcal{L}$ a.î. f nu transportă interpretarea lui S_f de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$.
Fie $\mathcal{L}^-$ sublimbajul finit al lui $\mathcal{L}$ ale cărui simboluri ne-logice sunt exact aceste simboluri S_f. Notăm $\mathcal{A}^- = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^-$, $\mathcal{B}^- = \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}^-$. E clar că $\mathcal{A}^- \not\simeq \mathcal{B}^-$, deci că $\mathcal{A}^- \not\equiv \mathcal{B}^-$ (conform Propoziției 1.102) și că $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$ (conform Corolarului 1.97.(ii)). Contradicție. $\square$

Scufundări

Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ un limbaj de ordinul întâi, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$-structuri, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$.

Definiția 1.104

Un homomorfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se numește scufundare dacă h este injectiv.
Notație: $h : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{B}$.

Propoziția 1.105

O funcție $h : A \to B$ este scufundare $\iff$ $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ respectă toate formulele libere de cuantificatori.

Dem.: Exercițiu.

Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$-structuri a.î. $A \subseteq B$ și $\iota_{A,B} : A \to B$, $\iota(a) = a$ injecția canonică.

Definiția 1.106

Spunem că $\mathcal{A}$ este substructură a lui $\mathcal{B}$ sau că $\mathcal{B}$ este extensie a lui $\mathcal{A}$ dacă $\iota_{A,B}$ este scufundare.
Notație: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Prin urmare, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff$

(i) pentru orice $m \geq 1$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice elemente $a_1, \ldots, a_m \in A$,

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) \quad \iff \quad R^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m)$$

(ii) pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și orice elemente $a_1, \ldots, a_m \in A$,

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) = f^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m)$$

(iii) pentru orice $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

Exemplu

$\mathcal{L} = (R)$, unde R simbol de relație binară. Atunci $(\mathbb{N}, <)$ este substructură a lui $(\mathbb{Z}, <)$, dar nu este substructură a lui $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Substructuri

Fie $f : M^n \to M$ și $\emptyset \neq S \subseteq M$. Spunem că S este închisă la f dacă pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in S$, $f(a_1, \ldots, a_n) \in S$.

Propoziția 1.107

Fie $\mathcal{B}$ o $\mathcal{L}$-structură și $\emptyset \neq X \subseteq |\mathcal{B}|$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) X este domeniul unei substructuri (unice) a lui $\mathcal{B}$;

(ii) X este închisă la $f^{\mathcal{B}}$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ și $c^{\mathcal{B}} \in X$ pentru orice $c \in \mathcal{C}$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Corolarul 1.108

Dacă $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$, atunci orice submulțime nevidă a lui $|\mathcal{B}|$ este domeniul unei substructuri unice a lui $\mathcal{B}$.

Dacă o submulțime X a lui $|\mathcal{B}|$ nu satisface condiția (ii) din Propoziția 1.107, atunci X nu este domeniul unei substructuri a lui $\mathcal{B}$, dar există o submulțime a lui $|\mathcal{B}|$ care conține pe X și care este domeniul unei substructuri a lui $\mathcal{B}$.

Propoziția 1.109

Fie $\mathcal{B}$ o $\mathcal{L}$-structură și $X \subseteq |\mathcal{B}|$. Dacă $X \neq \emptyset$ sau $\mathcal{C} \neq \emptyset$, atunci există o substructură $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ a lui $\mathcal{B}$ cu următoarele proprietăți:

(i) $X \subseteq |\langle X \rangle_{\mathcal{B}}|$.

(ii) $\langle X \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$ pentru orice substructură $\mathcal{D}$ a lui $\mathcal{B}$ a.î. $X \subseteq |\mathcal{D}|$.

Dem.: Definim:

$$\begin{aligned} A_0 &= X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset \\ A_{n+1} &= A_n \cup \{f^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m) \mid m \geq 1, f \in \mathcal{F}_m, a_1, \ldots, a_m \in A_n\} \\ A &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

Propoziția 1.109

Fie $\mathcal{B}$ o $\mathcal{L}$-structură și $X \subseteq |\mathcal{B}|$. Dacă $X \neq \emptyset$ sau $\mathcal{C} \neq \emptyset$, atunci există o substructură $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ a lui $\mathcal{B}$ cu următoarele proprietăți:

(i) $X \subseteq |\langle X \rangle_{\mathcal{B}}|$.

(ii) $\langle X \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$ pentru orice substructură $\mathcal{D}$ a lui $\mathcal{B}$ a.î. $X \subseteq |\mathcal{D}|$.

Dem.: (continuare) Se verifică ușor că A este cea mai mică mulțime care conține $X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}\}$ și este închisă la toate funcțiile $f^{\mathcal{B}}$ pentru $f \in \mathcal{F}$. Atunci $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ este unica substructură a lui $\mathcal{B}$ cu domeniul A. $\square$

Definiția 1.110

$\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ se numește substructura lui $\mathcal{B}$ generată de X.

Observația 1.111

Dacă X este cel mult numărabilă și $\mathcal{L}$ este este cel mult numărabil, atunci și $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ este cel mult numărabilă.

Propoziția 1.112

Fie $\mathcal{B}$ o $\mathcal{L}$-structură. Dacă $\mathcal{L}$ are cel puțin un simbol de constantă, atunci

$$|\langle\emptyset\rangle_{\mathcal{B}}| = \{t^{\mathcal{B}} \mid t \text{ este termen închis al lui } \mathcal{L}\}.$$

Dem.: Exercițiu.

Exemple

- $\mathcal{L} = (\dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, S, 0)$. Atunci $|\langle\emptyset\rangle_{\mathcal{N}}| = \mathbb{N}$, deci $\langle\emptyset\rangle_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$.
- $\mathcal{L} = (\dot{0})$, $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0)$. Atunci $\langle\emptyset\rangle_{\mathcal{N}} = (\{0\}, 0)$.

Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$-structuri.

Propoziția 1.113

Presupunem că $A \subseteq B$. Atunci $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff$ pentru orice formulă liberă de cuantificatori φ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 1.114

Spunem că $\mathcal{A}$ este substructură elementară a lui $\mathcal{B}$ sau că $\mathcal{B}$ este extensie elementară a lui $\mathcal{A}$ dacă

(i) $A \subseteq B$;

(ii) pentru orice formulă φ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

Notație: $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Propoziția 1.115

Dacă $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemplu

Fie $\mathcal{L} = (\dot{\leq})$, $\mathcal{A} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ și $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, \leq)$. Atunci $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (de ce?), dar $\mathcal{A} \not\prec \mathcal{B}$.
Considerăm formula $\varphi = \forall y(x \dot{\leq} y)$. Atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[1], \text{ dar } \mathcal{B} \not\vDash \varphi[1].$$

i.e. 1 este cel mai mic element în $\mathcal{A}$, dar nu în $\mathcal{B}$.
Considerăm formula $\psi = \exists y(y \dot{\leq} x \wedge \neg(x = y))$. Atunci

$$\mathcal{B} \vDash \psi[1], \text{ dar } \mathcal{A} \not\vDash \psi[1].$$

i.e. 1 are un predecesor în $\mathcal{B}$, dar nu în $\mathcal{A}$.

Următorul rezultat este un instrument foarte util pentru a demonstra că o substructură este elementară.

Propoziția 1.116 (Criteriul lui Tarski)

Presupunem că $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și că pentru orice formulă φ, orice evaluare $e : V \to A$ și orice variabilă x,

$$\mathcal{B} \vDash \exists x \varphi[e] \iff \text{există } a \in A \ \text{ a.î. } \mathcal{B} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Atunci $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după formule că pentru orice formulă φ,

(*) pentru orice evaluare $e : V \to A$, $\quad \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{B} \vDash \varphi[e]$.

Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci (*) rezultă din faptul că $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și Propoziția 1.113.
- Pașii de inducție pentru $\neg$ și $\to$ sunt imediați.

Propoziția 1.116 (Criteriul lui Tarski)

Presupunem că $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și că pentru orice formulă φ, orice evaluare $e : V \to A$ și orice variabilă x,

$$\mathcal{B} \vDash \exists x\varphi[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{B} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}].$$

Atunci $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: (continuare) • $\varphi = \forall x\psi$. Atunci $\varphi \mathrel{\text{H}\!\vDash} \neg\exists x\neg\psi$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{B} \vDash \neg\exists x\neg\psi[e] \iff \mathcal{B} \not\vDash \exists x\neg\psi[e] \\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{B} \not\vDash \neg\psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ din ipoteză} \\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{B} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\ \text{din ipoteza de inducție} \\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e].
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Putem enunța acum unul din rezultatele centrale ale teoriei modelelor.

Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$-structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Corolarul 1.118

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$ și orice mulțime Γ de enunțuri, dacă Γ are un model, atunci Γ are un model cel mult numărabil.

Dem.: Exercițiu.

Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$-structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: Pentru orice formulă φ și variabilă y definim o constantă/funcție Skolem $F_{\varphi,y}$.

Dacă formula $\exists y\varphi$ este enunț, atunci $F_{\varphi,y}$ este un element al lui B definit astfel:

- Dacă $\mathcal{B} \models \exists y\varphi$, atunci mulțimea $S_1 := \{b \in B \mid \mathcal{B} \models \varphi[b]\}$ este nevidă. $F_{\varphi,y}$ este un element arbitrar al lui S_1.
- Dacă $\mathcal{B} \not\models \exists y\varphi$, atunci $F_{\varphi,y}$ este un element arbitrar al lui B.

Ca urmare, $\mathcal{B} \models \exists y\varphi \implies \mathcal{B} \models \varphi[F_{\varphi,y}]$.

Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$-structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: (continuare) Dacă $FV(\exists y\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $k \geq 1$, atunci definim $F_{\varphi,y} : B^k \to B$ astfel: pentru orice $b_1, \ldots, b_k \in B$,

- Dacă $\mathcal{B} \vDash \exists y\varphi[b_1, \ldots, b_k]$, atunci mulțimea $S_2 := \{b \in B \mid \mathcal{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_k, b]\}$ este nevidă. $F_{\varphi,y}(b_1, \ldots, b_k)$ este un element arbitrar al lui S_2.
- Dacă $\mathcal{B} \not\vDash \exists y\varphi[b_1, \ldots, b_k]$, atunci $F_{\varphi,y}(b_1, \ldots, b_k)$ este un element arbitrar al lui B.

Ca urmare,

$$\mathcal{B} \vDash \exists y\varphi[b_1, \ldots, b_k] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_k, F_{\varphi,y}(b_1, \ldots, b_k)].$$

Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$-structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: (continuare) Extindem construcția lui $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ (a se vedea Propoziția 1.109) închizând-o și la constantele și funcțiile Skolem. Așadar, fie A cea mai mică submulțime a lui B care:

- conține $X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}\} \cup \{F_{\varphi,y} \mid \exists y \varphi \text{ enunț}\}$;
- este închisă la $f^{\mathcal{B}}$ pentru orice $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$;
- este închisă la funcțiile Skolem $F_{\varphi,y}$, când $\exists y \varphi$ nu este enunț.

Obținem că A este domeniul unei substructuri unice $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{B}$. Deoarece $\mathcal{L}$ este cel mult numărabil, A este cel mult numărabilă. Aplicând Criteriul lui Tarski 1.116, rezultă imediat că $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. $\square$

Forma normală Skolem

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi in formă normală prenex, prin introducere de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante Skolem.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Forma normală Skolem

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
Dacă φ este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.
Altfel, φ are una din formele:

- $\varphi = \exists x\, \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x\, \psi$ $(k \geq 1)$. Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi_x(fx_1 \ldots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ.
Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{Sk}.

φ^{Sk} este o formă normală Skolem a lui φ.

Exemple

- Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x\, \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z\, R(x, y, z)$. Atunci
$$\varphi^1 = \forall y \forall z\, (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z\, R(c, y, z),$$
unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z\, P(c, y, z)$.
- Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z\, P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y\, (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y\, P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y\, P(y, f(y))$.

Forma normală Skolem

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f. Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v \, (R(y,z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}
\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v \, (R(y,z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\
&= \forall y \forall u \exists v \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = v), \\
&\quad \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\
\varphi^2 &= \forall y \forall u \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y,u)) \\
&= \forall y \forall u \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = h(y,u)), \\
&\quad \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}
\end{aligned}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = h(y,u)).$$

Propoziția 1.118

(i) $\models \varphi^{Sk} \to \varphi$, deci $\varphi^{Sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

(ii) În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

Dem.:

(i) Se aplică faptul că $\models \varphi_x(t) \to \exists x\varphi$, $\models \varphi$ implică $\models \forall x\varphi$ și $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ pentru a conclude că $\models \varphi^1 \to \varphi$, $\models \varphi^2 \to \varphi^1$, etc..

(ii) Fie $\mathcal{L} = (R)$, unde R este simbol de relație binară și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$. Atunci $\varphi^{Sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = (f, R)$. Fie $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$-structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \models \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n a.î. $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \not\models \varphi^{Sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. $\square$

Extensii Skolem

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Definiția 1.119

Pentru orice variabilă y și orice formulă ψ a.î. $\exists y\psi$ este enunț, fie $c_{y,\psi}$ un nou simbol de constantă.
$c_{y,\psi}$ se numește simbol de constantă Skolem asociat perechii (y, ψ).

Pentru orice variabilă y și orice formulă ψ a.î. $FV(\exists y\psi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 1)$, fie $f_{y,\psi}$ un nou simbol de funcție de aritate n.
$f_{y,\psi}$ se numește simbol de funcție Skolem asociat perechii (y, ψ).

Notație

Notăm cu $\mathcal{L}^+$ extensia lui $\mathcal{L}$ obținută adăugând toate aceste simboluri de constante și funcții Skolem. $\mathcal{L}^+$ se numește extensie Skolem primitivă a lui $\mathcal{L}$.

Extensii Skolem

Orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ se extinde la o $\mathcal{L}^+$-structură $\mathcal{A}^+$ astfel: Fie y o variabilă și ψ o formulă.

- Dacă $\exists y\psi$ este un enunț, atunci $c_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}$ se definește astfel:
  - $c_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}$ este un element $b \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[b]$, dacă un astfel de b există.
  - $c_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}$ este un element arbitrar al lui A, altfel.

  Prin urmare,
$$\mathcal{A}^+ \vDash \exists y\psi \to \psi_y(c_{y,\psi}).$$
- Dacă $FV(\exists y\psi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 1)$, atunci $f_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+} : A^n \to A$ se definește astfel: pentru orice $b_1, \ldots, b_n \in A$,
  - $f_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}(b_1, \ldots, b_n)$ este un element $b \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n, b]$, dacă un astfel de b există.
  - $f_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}(b_1, \ldots, b_n)$ este un element arbitrar al lui A, altfel.

  Prin urmare,
$$\mathcal{A}^+ \vDash \exists y\psi \to \psi_y(f_{y,\psi}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Extensii Skolem

Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ un limbaj de ordinul întâi.

Definiția 1.120

Un limbaj $\mathcal{L}' = (\mathcal{R}, \mathcal{F}', \mathcal{C}')$ de ordinul întâi se numește extensie Skolem a lui $\mathcal{L}$ dacă există un șir de limbaje $\mathcal{L}_n = (\mathcal{R}, \mathcal{F}_n, \mathcal{C}_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ a.î. $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_{n+1}$ este o extensie Skolem primitivă a lui $\mathcal{L}_n$ și $\mathcal{F}' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i$, $\mathcal{C}' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_i$.

Definiția 1.121

Fie $\mathcal{L}'$ o extensie Skolem a lui $\mathcal{L}$. Mulțimea Skolem $\mathcal{S}k_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}$ a lui $\mathcal{L}'$ peste $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor formulelor

$$\begin{aligned} \mathcal{S}k_{\mathcal{L}',\mathcal{L}} \quad = \quad & \{\exists y\psi \to \psi_y(c_{y,\psi}) \mid \exists y\psi \text{ este enunț}\} \bigcup \\ & \{\exists y\psi \to \psi_y(f_{y,\psi}(x_1, \ldots, x_n)) \mid FV(\exists y\psi) = \{x_1, \ldots, x_n\}\}. \end{aligned}$$

Propoziția 1.122

- Orice limbaj $\mathcal{L}$ are o extensie Skolem.
- Dacă $\mathcal{L}'$ este o extensie Skolem a lui $\mathcal{L}$, atunci orice $\mathcal{L}$-structură poate fi extinsă la un model al mulțimii Skolem $\mathcal{S}k_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}$ a lui $\mathcal{L}'$ peste $\mathcal{L}$.

Definiția 1.123

Fie φ un enunț al lui $\mathcal{L}$. O formă normală Skolem a lui φ este un enunț φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}$ definită astfel: φ^{Sk} este o formă normală Skolem a lui φ^*, unde φ^* este un enunț în formă normală prenex a.î. $\varphi \mathrel{\text{H}} \varphi^*$ (care există conform Teoremei 1.98).

Definiția 1.124

Fie T o $\mathcal{L}$-teorie, $\mathcal{L}'$ o extensie a lui $\mathcal{L}$ și T' o $\mathcal{L}'$-teorie. Spunem că

(i) T' este extensie a lui T dacă $T \subseteq T'$.

(ii) T' este extensie conservativă a lui T dacă T' este extensie a lui T și $T = T' \cap Sen_{\mathcal{L}}$.

Teorema de formă normală Skolem 1.125

Fie $\mathcal{L}'$ o extensie Skolem a lui $\mathcal{L}$ și φ un enunț în formă normală prenex.

(i) $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$.

(ii) Dacă $\mathcal{A}'$ este un model al mulțimii Skolem $\mathcal{S}k_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}$ a lui $\mathcal{L}'$ peste $\mathcal{L}$, atunci $\mathcal{A}' \models \varphi \rightarrow \varphi^{Sk}$.

(iii) Fie T o $\mathcal{L}$-teorie și T^{Sk} $\mathcal{L}'$-teoria generată de $\{\varphi^{Sk} \mid \varphi \in T\}$.

- *(a)* Dacă $\mathcal{A}$ este model al lui T și $\mathcal{A}'$ este o extensie a lui $\mathcal{A}$ la un model al mulțimii Skolem $\mathcal{S}k_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}$, atunci $\mathcal{A}'$ este model al lui T^{Sk}.
- *(b)* Dacă $\mathcal{A}'$ este model al lui T^{Sk}, atunci $\mathcal{A}' \restriction \mathcal{L}$ este model al lui T.
- *(c)* T^{Sk} este extensie conservativă a lui T.

(iv) φ este satisfiabilă ddacă φ^{Sk} este satisfiabilă.

Dem.: (i) a fost deja demonstrat. (ii) se demonstrează similar.

Forma normală Skolem

(iii).(a) Fie $\varphi \in T$. Aplicăm (ii) pentru a conclude că $\mathcal{A}' \vDash \varphi \to \varphi^{sk}$. Deoarece $\mathcal{A}' \vDash \varphi$, rezultă că $\mathcal{A}' \vDash \varphi^{sk}$.

(iii).(b) Se aplică (i).

(iii).(c) Fie $\varphi \in T$ și $\mathcal{A}'$ un model al lui T^{Sk}. Conform (iii).(b), $\mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L}$ este model al lui T, deci $\mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L} \vDash \varphi$. Obținem că $\mathcal{A}' \vDash \varphi$. Așadar, $T^{Sk} \vDash \varphi$, prin urmare $\varphi \in T^{Sk}$, deoarece T^{Sk} este teorie. Am demonstrat că $T \subseteq T^{Sk} \cap Sen_{\mathcal{L}}$.
Fie acum $\varphi \in T^{Sk} \cap Sen_{\mathcal{L}}$ și $\mathcal{A}$ un model al lui T. Aplicând Propoziția 1.122, obținem o extensie $\mathcal{A}'$ a lui $\mathcal{A}$ care este model al mulțimii Skolem $\mathcal{S}k_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}$ a lui $\mathcal{L}'$ peste $\mathcal{L}$. Conform (iii).(a), $\mathcal{A}'$ este model al lui T^{Sk}, deci $\mathcal{A}' \vDash \varphi$. Rezultă că $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Așadar, $T \vDash \varphi$, prin urmare $\varphi \in T$.

(iv) "$\Leftarrow$" Se aplică (i).
"$\Rightarrow$" Fie $\mathcal{A}$ un model al lui φ. Aplicând Propoziția 1.122, obținem o extensie $\mathcal{A}'$ a lui $\mathcal{A}$ care este model al mulțimii Skolem $\mathcal{S}k_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}$ a lui $\mathcal{L}'$ peste $\mathcal{L}$. Aplicând (iii).(a) cu T fiind teoria generată de $\{\varphi\}$, rezultă că $\mathcal{A}' \models \varphi^{Sk}$. $\square$

Teorema de compacitate 1.126

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 1.127

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*) pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură finită a.î. $|A| \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$ și $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obținut o contradicție. $\square$

Corolarul 1.128

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 1.129

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite.
Conform Propoziției 1.50, pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff A \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$.
Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \text{ este finită } \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 1.127 $\square$.

Corolarul 1.130

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 1.131

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$, deci $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model $\mathcal{B}$.
Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un model infinit al lui Γ. $\square$

Propoziția 1.132

Dacă un enunț φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 1.131, rezultă că Γ are un model infinit $\mathcal{A}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$

Propoziția 1.133

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci

(i) Γ are un model infinit.

(ii) Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.

(iii) Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Exercițiu.

Modele non-standard ale aritmeticii

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, $\dot{S}$ este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție $\mathcal{L}$-termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 1.134

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ se numește non-standard dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește element non-standard.

Teorema 1.135

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \ldots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Fie $n_0 > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Considerăm $\mathcal{L}^+$-extensia $\mathcal{N}^+$ a lui $\mathcal{N}$ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \models \Gamma_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui $\mathcal{A}$. $\square$

Definiția 1.136

Fie A o mulțime nevidă. O relație de bună ordonare pe A este o relație de ordine totală $<$ pe A cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui A are minim.
Spunem că $(A, <)$ este mulțime bine ordonată.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.

Propoziția 1.137

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{\dot{<}}$.

Dem.: Fie $\mathcal{K}$ clasa $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurilor $\mathcal{A} = (A, <)$ a.î. $(A, <)$ este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{K}$ este axiomatizabilă, deci că există Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$.

Fie $\mathcal{L}$ extensia lui $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă c_n, $n \in \mathbb{N}$. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\begin{aligned}\Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n = 0, \ldots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Fie $(A, <)$ o mulțime infinită bine ordonată. Definim
$a_{M+1} := \min A$, $a_M := \min A \setminus \{a_{M+1}\}$, ...,
$a_0 := \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \ldots, a_1\}$. Atunci $a_{M+1} < a_M < \ldots < a_0$.
Fie $\mathcal{A}^+$ extensia lui $\mathcal{A} = (A, <)$ la $\mathcal{L}$ obținută astfel:

$$c_0^{\mathcal{A}^+} = a_0, \ldots, c_{M+1}^{\mathcal{A}^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{\mathcal{A}^+} \text{ arbitrar pentru } n > M+1.$$

Atunci $\mathcal{A}^+ \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model $\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ (deci $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$).
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \Gamma$, rezultă că $(B, <)$ este bine ordonată.
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ rezultă că $b_{n+1} < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, submulțimea nevidă

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Am obținut o contradicție. □

Teoria Ramsey

Teoria Ramsey este o ramură a combinatoricii, a cărei temă principală este:

"Complete disorder is impossible." (T.S. Motzkin)

O structură mare, oricât de haotică ar fi, conține substructuri cu regularități.

Problemă tipică

O anumită structură este partiționată într-un număr finit de clase. Ce tip de substructură rămâne intactă în cel puțin una din clase?

- Rezultatele din teoria Ramsey sunt foarte puternice, deoarece ele sunt generale, se obțin presupunând ipoteze foarte slabe.
- Graham, Rothschild, Sperner, Ramsey Theory, 1990.

Se dau o mulțime X și o colecție $\mathcal{G}$ de submulțimi bune ale lui X. Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$.

Definiția 1.138

O r-colorare a lui X este o funcție $c : X \to \{1, 2, \ldots, r\}$. Pentru $x \in X$, $c(x)$ este culoarea lui x. O submulțime $A \subseteq X$ se numește monocromatică dacă toate elementele din A au aceeași culoare.

Definiția 1.139

O familie de mulțimi $C_1, \ldots, C_r$ se numește partiție a lui X dacă $X = \cup_{i=1}^{r} C_i$ și $C_i \cap C_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- Pentru orice partiție $X = \cup_{i=1}^{r} C_i$ a lui X, există $i \in \{1, \ldots, r\}$ și $G \in \mathcal{G}$ a.î. $G \subseteq C_i$.
- Pentru orice r-colorare a lui X există o mulțime $G \in \mathcal{G}$ monocromatică.

Teorema Schur (1916)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Atunci există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î.

$$\{x, y, x + y\} \subseteq C_i \quad \text{pentru } x, y \in \mathbb{N}.$$

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \{x, y, x + y \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Versiunea cu colorări: Pentru orice r-colorare a lui $\mathbb{N}$ există $x, y \in \mathbb{N}$ a.î. mulțimea $\{x, y, x + y\}$ este monocromatică.

Teorema van der Waerden (1927)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î. C_i conține progresii aritmetice de lungime k.

- rezultat central în teoria Ramsey
- una din cele trei perle în teoria numerelor Khintchin (1948)
- demonstrație combinatorială prin inducție dublă după r și k.

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \text{ mulțimea progresiilor aritmetice de lungime } k.$$

Versiunea cu colorări: Orice colorare finită a lui $\mathbb{N}$ conține progresii aritmetice monocromatice de lungime finită arbitrară.