



# LOGICA DE ORDINUL I

Un limbaj  $\mathcal{L}$  de ordinul I este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă  $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  de variabile;
- ▶ conectorii  $\neg$  și  $\rightarrow$ ;
- ▶ paranteze:  $(, )$ ;
- ▶ simbolul de egalitate  $=$ ;
- ▶ cuantificatorul universal  $\forall$ ;
- ▶ o mulțime  $\mathcal{R}$  de **simboluri de relații**;
- ▶ o mulțime  $\mathcal{F}$  de **simboluri de funcții**;
- ▶ o mulțime  $\mathcal{C}$  de **simboluri de constante**;
- ▶ o funcție **aritate** ari :  $\mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$ .
- ▶  $\mathcal{L}$  este unic determinat de cvadruplul  $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$ .
- ▶  $\tau$  se numește **signatura** lui  $\mathcal{L}$  sau **vocabularul** lui  $\mathcal{L}$  sau **alfabetul** lui  $\mathcal{L}$  sau **tipul de similaritate** al lui  $\mathcal{L}$

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea  $Sim_{\mathcal{L}}$  a simbolurilor lui  $\mathcal{L}$  este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui  $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$  se numesc **simboluri non-logice**.
- Elementele lui  $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$  se numesc **simboluri logice**.
- Notăm variabilele cu  $x, y, z, v, \dots$ , simbolurile de relații cu  $P, Q, R, \dots$ , simbolurile de funcții cu  $f, g, h, \dots$  și simbolurile de constante cu  $c, d, e, \dots$
- Pentru orice  $m \in \mathbb{N}^*$  notăm:
  - $\mathcal{F}_m :=$  mulțimea simbolurilor de funcții de aritate  $m$ ;
  - $\mathcal{R}_m :=$  mulțimea simbolurilor de relații de aritate  $m$ .

### Definiția 1.1

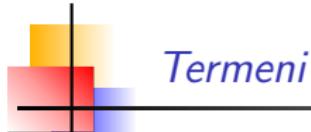
Mulțimea  $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$  a expresiilor lui  $\mathcal{L}$  este mulțimea tuturor sirurilor finite de simboluri ale lui  $\mathcal{L}$ .

- ▶ Expresia vidă se notează  $\lambda$ .
- ▶ Lungimea unei expresii  $\theta$  este numărul simbolurilor din  $\theta$ .

### Definiția 1.2

Fie  $\theta = \theta_0\theta_1\dots\theta_{k-1}$  o expresie a lui  $\mathcal{L}$ , unde  $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$  pentru orice  $i$ .

- ▶ Dacă  $0 \leq i \leq j \leq k - 1$ , atunci expresia  $\theta_i\dots\theta_j$  se numește **( $i, j$ )-subexpresia** lui  $\theta$ ;
- ▶ Spunem că o expresie  $\psi$  apare în  $\theta$  dacă există  $0 \leq i \leq j \leq k - 1$  a.î.  $\psi$  este  $(i, j)$ -subexpresia lui  $\theta$ ;
- ▶ Notăm cu  $\text{Var}(\theta)$  mulțimea variabilelor care apar în  $\theta$ .



### Definiția 1.3

Mulțimea  $\text{Trm}_{\mathcal{L}}$  a **termenilor** lui  $\mathcal{L}$  este intersecția tuturor mulțimilor de expresii  $\Gamma$  care satisfac următoarele proprietăți:

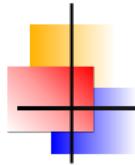
- ▶ orice variabilă este element al lui  $\Gamma$ ;
- ▶ orice simbol de constantă este element al lui  $\Gamma$ ;
- ▶ dacă  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$  și  $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$ , atunci  $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$ .

### Notări:

- ▶ Termeni:  $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$
- ▶  $\text{Var}(t)$  este mulțimea variabilelor care apar în termenul  $t$ .
- ▶ Scriem  $t(x_1, \dots, x_n)$  dacă  $x_1, \dots, x_n$  sunt variabile și  $\text{Var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ .

### Definiția 1.4

Un termen  $t$  se numește **închis** dacă  $\text{Var}(t) = \emptyset$ .



## Termeni

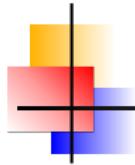
### *Propoziția 1.5 (Inducția pe termeni)*

Fie  $\Gamma$  o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- ▶  $\Gamma$  conține variabilele și simbolurile de constante;
- ▶ dacă  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$  și  $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$ , atunci  $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$ .

Atunci  $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$ .

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate  $\mathcal{P}$ : definim  $\Gamma$  ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac  $\mathcal{P}$  și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că  $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$ .



## Termeni

### Citire unică (Unique readability)

Dacă  $t$  este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶  $t = x$ , unde  $x \in V$ ;
- ▶  $t = c$ , unde  $c \in \mathcal{C}$ ;
- ▶  $t = ft_1 \dots t_m$ , unde  $f \in \mathcal{F}_m$  ( $m \geq 1$ ) și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni.

Mai mult, scrierea lui  $t$  sub una din aceste forme este unică.

### Definiția 1.6

Formulele atomice ale lui  $\mathcal{L}$  sunt expresiile de forma:

- ▶  $(s = t)$ , unde  $s, t$  sunt termeni;
- ▶  $(Rt_1 \dots t_m)$ , unde  $R \in \mathcal{R}_m$  și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni.

### Definiția 1.7

Mulțimea  $Form_{\mathcal{L}}$  a formulelor lui  $\mathcal{L}$  este intersecția tuturor mulțimilor de expresii  $\Gamma$  care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice formulă atomică este element al lui  $\Gamma$ ;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\neg$ : dacă  $\varphi \in \Gamma$ , atunci  $(\neg\varphi) \in \Gamma$ ;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\rightarrow$ : dacă  $\varphi, \psi \in \Gamma$ , atunci  $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ ;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\forall x$  (pentru orice variabilă  $x$ ): dacă  $\varphi \in \Gamma$ , atunci  $(\forall x\varphi) \in \Gamma$  pentru orice variabilă  $x$ .



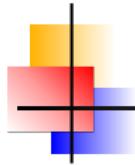
## Formule

### Notării

- ▶ Formule:  $\varphi, \psi, \chi, \dots$
- ▶  $\text{Var}(\varphi)$  este mulțimea variabilelor care apar în formula  $\varphi$ .

### Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem  $s = t$  în loc de  $(s = t)$ ,  $Rt_1 \dots t_m$  în loc de  $(Rt_1 \dots t_m)$ ,  $\forall x\varphi$  în loc de  $(\forall x\varphi)$ , etc..



### *Propoziția 1.8 (Inducția pe formule)*

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶  $\Gamma$  conține toate formulele atomice;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\neg, \rightarrow$  și  $\forall x$  (pentru orice variabilă  $x$ ).

Atunci  $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$ .

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate  $\mathcal{P}$ : definim  $\Gamma$  ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac  $\mathcal{P}$  și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că  $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$ .

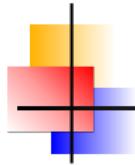


### Citire unică (Unique readability)

Dacă  $\varphi$  este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶  $\varphi = (s = t)$ , unde  $s, t$  sunt termeni;
- ▶  $\varphi = (Rt_1 \dots t_m)$ , unde  $R \in \mathcal{R}_m$  și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni;
- ▶  $\varphi = (\neg\psi)$ , unde  $\psi$  este formulă;
- ▶  $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ , unde  $\psi, \chi$  sunt formule;
- ▶  $\varphi = (\forall x\psi)$ , unde  $x$  este variabilă și  $\psi$  este formulă.

Mai mult, scrierea lui  $\varphi$  sub una din aceste forme este unică.



## Formule

### Conecțori derivați

Conecțorii  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\leftrightarrow$  și **cuantificatorul existențial**  $\exists$  sunt introdusi prin următoarele abrevieri:

$$\varphi \vee \psi := ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$$

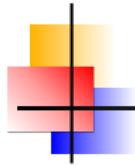
$$\varphi \leftrightarrow \psi := ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$

$$\exists x\varphi := (\neg\forall x(\neg\varphi)).$$



### Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem  $\neg\varphi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$ , dar scriem  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$ .
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - ▶  $\neg$  are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
  - ▶  $\wedge, \vee$  au precedență mai mare decât  $\rightarrow, \leftrightarrow$ .
- ▶ Prin urmare, formula  $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$  va fi scrisă  $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$ .
- ▶ Cuantificatorii  $\forall, \exists$  au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- ▶ Așadar,  $\forall x\varphi \rightarrow \psi$  este  $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$  și nu  $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ .



## Notății

De multe ori identificăm un limbaj  $\mathcal{L}$  cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ .

- ▶ Scriem de multe ori  $f(t_1, \dots, t_m)$  în loc de  $ft_1 \dots t_m$  și  $R(t_1, \dots, t_m)$  în loc de  $Rt_1 \dots t_m$ .
- ▶ Pentru simboluri  $f$  de operații binare scriem  $t_1 ft_2$  în loc de  $ft_1 t_2$ .
- ▶ Analog pentru simboluri  $R$  de relații binare: scriem  $t_1 Rt_2$  în loc de  $Rt_1 t_2$ .

### *Definiția 1.9*

O **L-structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- ▶  $A$  este o mulțime nevidă;
- ▶  $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$  este o mulțime de operații pe  $A$ ; dacă  $f$  are aritatea  $m$ , atunci  $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$ ;
- ▶  $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$  este o mulțime de relații pe  $A$ ; dacă  $R$  are aritatea  $m$ , atunci  $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$ ;
- ▶  $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$ .
- ▶  $A$  se numește **universul** structurii  $\mathcal{A}$ . **Notatie:**  $A = |\mathcal{A}|$
- ▶  $f^{\mathcal{A}}$  (respectiv  $R^{\mathcal{A}}$ ,  $c^{\mathcal{A}}$ ) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui  $f$  (respectiv  $R$ ,  $c$ ) în  $\mathcal{A}$ .



## *Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$*

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- ▶  $\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide

*Exemple de formule:*

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$



## Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}), \text{ unde}$$

- ▶  $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}; \dot{<} \text{ este simbol de relație binară, adică are aritatea } 2;$
- ▶  $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}; \dot{+}, \dot{\times} \text{ sunt simboluri de operații binare și } \dot{S} \text{ este simbol de operație unar (adică are aritatea } 1\text{);}$
- ▶  $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}.$

Scriem  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$  sau  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0}).$

Exemplul natural de  $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, S(m) = m + 1$  este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <, \dot{+}^{\mathcal{N}} = +, \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot, \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de  $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:  $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1).$



## *Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar*

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \{R\}$ ;  $R$  simbol binar
- ▶  $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶  $\mathcal{L}$ -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate  $(A, \leq)$ , folosim simbolul  $\leq$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\leq}$ .
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate  $(A, <)$ , folosim simbolul  $<$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{<}$ .
- ▶ Dacă suntem interesați de grafuri  $G = (V, E)$ , folosim simbolul  $E$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{Graf}$ .
- ▶ Dacă suntem interesați de structuri  $(A, \in)$ , folosim simbolul  $\in$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\in}$ .



## Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \emptyset$ ;
- ▶  $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{-1}\}$ ;  $\dot{*}$  simbol binar,  $\dot{-1}$  simbol unar
- ▶  $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{-1}; \dot{e})$  sau  $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{-1}, \dot{e})$ .

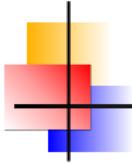
Exemple naturale de  $\mathcal{L}_{Gr}$ -structuri sunt grupurile:  $\mathcal{G} = (G, \cdot, \dot{-1}, e)$ .

Prin urmare,  $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$ ,  $\dot{-1}^{\mathcal{G}} = \dot{-1}$ ,  $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$ .

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul  $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \emptyset$ ;
- ▶  $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$ ;  $\dot{+}$  simbol binar,  $\dot{-}$  simbol unar;
- ▶  $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$ .



# SEMANTICA



## Interpretare (evaluare)

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I și  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură.

### Definiția 1.10

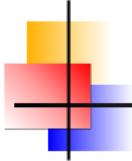
O **interpretare** sau **evaluare** a (variabilelor) lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$  este o funcție  $e : V \rightarrow A$ .

În continuare,  $e : V \rightarrow A$  este o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ .

### Definiția 1.11 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește **interpretarea**  $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$  a termenului  $t$  sub evaluarea  $e$ :

- ▶ dacă  $t = x \in V$ , atunci  $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$ ;
- ▶ dacă  $t = c \in \mathcal{C}$ , atunci  $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$ ;
- ▶ dacă  $t = ft_1 \dots t_m$ , atunci  $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$ .



## Interpretarea formulelor

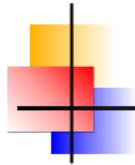
Prin inducție pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei  $\varphi$  sub evaluarea  $e$ .

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



## Interpretarea formulelor

### Negația și implicația

- ▶  $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e);$
- ▶  $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$ , unde,

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\rightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$

Prin urmare,

- ▶  $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0.$
- ▶  $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1).$



## Interpretarea formulelor

### Notăție

Pentru orice variabilă  $x \in V$  și orice  $a \in A$ , definim o nouă interpretarea  $e_{x \leftarrow a} : V \rightarrow A$  prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

### Interpretarea formulelor

$$(\forall x\varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



## Relația de satisfacere

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ .

### Definiția 1.12

Fie  $\varphi$  o formulă. Spunem că:

- ▶ **e satisfacă**  $\varphi$  în  $\mathcal{A}$  dacă  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$ . Notație:  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .
- ▶ **e nu satisfacă**  $\varphi$  în  $\mathcal{A}$  dacă  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ . Notație:  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ .

### Corolarul 1.13

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x$ ,

- (i)  $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ .
- (ii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$  implică  $\mathcal{A} \models \psi[e]$   
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$  sau  $\mathcal{A} \models \psi[e]$ .
- (iii)  $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \iff$  pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ .

**Dem.:** Exercițiu ușor.



## Relația de satisfacere

$\vee, \wedge, \leftrightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,

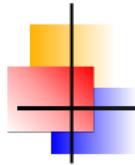
$p$	$q$	$p \vee q$	$p$	$q$	$p \wedge q$	$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fie  $\varphi, \psi$  formule și  $x$  o variabilă.

### Propoziția 1.14

- (i)  $(\varphi \vee \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \vee \psi^A(e)$ ;
- (ii)  $(\varphi \wedge \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \wedge \psi^A(e)$ ;
- (iii)  $(\varphi \leftrightarrow \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \leftrightarrow \psi^A(e)$ ;
- (iv)  $(\exists x\varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

**Dem.:** Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

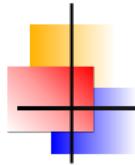


## Relația de satisfacere

$$\begin{aligned} (\exists x\varphi)^A(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^A(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^A(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^A(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1. \end{aligned}$$

### Corolarul 1.15

- (i)  $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (ii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iv)  $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$



Fie  $\varphi$  formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 1.16

Spunem că  $\varphi$  este **satisfiabilă** dacă există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și o evaluare  $e : V \rightarrow A$  a.î.

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că  $(\mathcal{A}, e)$  este un **model** al lui  $\varphi$ .

**Atenție!** Este posibil ca atât  $\varphi$  cât și  $\neg\varphi$  să fie satisfiabile.  
Exemplu:  $\varphi := x = y$  în  $\mathcal{L}_=$ .

Fie  $\varphi$  formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 1.17

Spunem că  $\varphi$  este **adevărată** într-o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  dacă pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că  $\mathcal{A}$  **satisfacă**  $\varphi$  sau că  $\mathcal{A}$  este un **model** al lui  $\varphi$ .

**Notăție:**  $\mathcal{A} \models \varphi$

### Definiția 1.18

Spunem că  $\varphi$  este formulă **universal adevărată** sau **(logic) validă** dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

**Notăție:**  $\models \varphi$

Fie  $\varphi, \psi$  formule ale lui  $\mathcal{L}$ .

## Definiția 1.19

$\varphi$  și  $\psi$  sunt **logic echivalente** dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notație:  $\varphi \mathbb{H} \psi$

## Definiția 1.20

$\psi$  este **consecință semantică** a lui  $\varphi$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție:  $\varphi \vDash \psi$

## Observație

- (i)  $\varphi \vDash \psi$  dacă  $\models \varphi \rightarrow \psi$ .
- (ii)  $\varphi \mathbb{H} \psi$  dacă ( $\psi \vDash \varphi$  și  $\varphi \vDash \psi$ ) dacă  $\models \psi \leftrightarrow \varphi$ .



## Echivalențe și consecințe logice

### Propoziția 1.21

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabile  $x, y$ ,

$$\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi \quad (1)$$

$$\neg \forall x \varphi \models \exists x \neg \varphi \quad (2)$$

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \quad (3)$$

$$\forall x \varphi \vee \forall x \psi \models \forall x (\varphi \vee \psi) \quad (4)$$

$$\exists x (\varphi \wedge \psi) \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi \quad (5)$$

$$\exists x (\varphi \vee \psi) \models \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad (6)$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi \quad (7)$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi \quad (8)$$

$$\forall x \varphi \models \exists x \varphi \quad (9)$$

$$\varphi \models \exists x\varphi \tag{10}$$

$$\forall x\varphi \models \varphi \tag{11}$$

$$\forall x\forall y\varphi \models \forall y\forall x\varphi \tag{12}$$

$$\exists x\exists y\varphi \models \exists y\exists x\varphi \tag{13}$$

$$\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi. \tag{14}$$

**Dem.:** Exercițiu.

### Propoziția 1.22

Pentru orice termeni  $s, t, u$ ,

- (i)  $\models t = t$ ;
- (ii)  $\models s = t \rightarrow t = s$ ;
- (iii)  $\models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u$ .

**Dem.:** Exercițiu ușor.



### Propoziția 1.23

Pentru orice  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$ ,  $R \in \mathcal{R}_m$  și orice termeni  $t_i, u_i, i = 1, \dots, m$ ,

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m \quad (15)$$

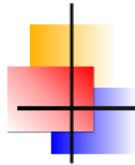
$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m). \quad (16)$$

**Dem.:** Arătăm (15). Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  o evaluare a.î.  $\mathcal{A} \models ((t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m))[e]$ . Atunci  $\mathcal{A} \models (t_i = u_i)[e]$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, m\}$ , deci  $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \dots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar,  $\mathcal{A} \models (ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m)[e]$ .

□



Fie  $\varphi$  formulă lui  $\mathcal{L}$  și  $\Gamma, \Delta$  mulțimi de formule.

### Definiția 1.24

Spunem că  $\Gamma$  este **satisfiabilă** dacă există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și o evaluare  $e : V \rightarrow A$  a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că  $(\mathcal{A}, e)$  este un **model** al lui  $\Gamma$ .

### Definiția 1.25

Spunem că  $\varphi$  este **consecință semantică** a lui  $\Gamma$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$(\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \Gamma \implies (\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \varphi.$$

**Notătie:**  $\Gamma \vDash \varphi$



### Definiția 1.26

Spunem că  $\Delta$  este **consecință semantică** a lui  $\Gamma$  dacă

$$\Gamma \models \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.$$

Notație:  $\Gamma \models \Delta$

### Propoziția 1.27

- (i)  $\models \psi \iff \emptyset \models \psi;$
- (ii) Dacă  $\Gamma \subseteq \Delta$  și  $\Gamma \models \psi$ , atunci  $\Delta \models \psi$ .
- (iii) Dacă  $\Gamma \models \Delta$  și  $\Delta \models \psi$ , atunci  $\Gamma \models \psi$ .

**Dem.:** Exercițiu ușor.

### Propoziția 1.28

- (i)  $\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este nesatisfiabilă.
- (ii)  $\Gamma \models \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$  este nesatisfiabilă.
- (iii) Dacă  $\Gamma$  este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  și  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este satisfiabilă.

**Dem.:**

- (i)  $\Gamma \not\models \varphi \iff$  există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și o evaluare  $e : V \rightarrow A$  a.î.  $(\mathcal{A}, e)$  este model al lui  $\Gamma$  și  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e] \iff$  există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și o evaluare  $e : V \rightarrow A$  a.î.  $(\mathcal{A}, e)$  este model al lui  $\Gamma$  și  $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este satisfiabilă.
- (ii) Similar.
- (iii) Fie  $(\mathcal{A}, e)$  un model al lui  $\Gamma$ . Avem fie  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ , fie  $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$ . Rezultă că  $(\mathcal{A}, e)$  este model al lui  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  sau al lui  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ . Concluzia rezultă. □

Noțiunile de **tautologie** și **consecință tautologică** din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor  $\neg, \rightarrow$ .

### Definiția 1.29

O  **$\mathcal{L}$ -evaluare (de adevăr)** este o funcție  $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$  cu următoarele proprietăți: pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

- ▶  $F(\neg\varphi) = 1 - F(\varphi)$ ;
- ▶  $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$ .

### Propoziția 1.30

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ , funcția

$$V_{e, \mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o  $\mathcal{L}$ -evaluare.

**Dem.:** Exercițiu ușor.



## Tautologii

### Definiția 1.31

Fie  $\varphi$  o formulă și  $\Gamma$  o mulțime de formule.

- ▶  $\varphi$  este **tautologie** dacă  $F(\varphi) = 1$  pentru orice  $\mathcal{L}$ -evaluare  $F$ .
- ▶  $\varphi$  este **consecință tautologică** a lui  $\Gamma$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr  $F$ ,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad F(\varphi) = 1.$$

Exemple de tautologii:  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ , etc..



### Propoziția 1.32

Fie  $\varphi$  o formulă și  $\Gamma$  o mulțime de formule.

- (i) Dacă  $\varphi$  este tautologie, atunci  $\varphi$  este validă.
- (ii) Dacă  $\varphi$  este consecință tautologică a lui  $\Gamma$ , atunci  $\Gamma \models \varphi$ .

**Dem.:**

- (i) Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  o evaluare. Deoarece  $\varphi$  este tautologie și  $V_{e,\mathcal{A}}$  este  $\mathcal{L}$ -evaluare, rezultă că  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ , adică  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .
- (ii) Fie  $(\mathcal{A}, e)$  un model al lui  $\Gamma$ . Atunci  $\gamma^{\mathcal{A}}(e) = 1$ , deci  $V_{e,\mathcal{A}}(\gamma) = 1$  pentru orice  $\gamma \in \Gamma$ . Deoarece  $\varphi$  este consecință tautologică a lui  $\Gamma$ , rezultă că  $V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ , deci  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$ , adică  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ . □

### Exemplu

$x = x$  este validă, dar nu e tautologie.

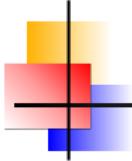
### Definiția 1.33

Fie  $\varphi = \varphi_0\varphi_1\dots\varphi_{n-1}$  o formulă a lui  $\mathcal{L}$  și  $x$  o variabilă.

- ▶ spunem că variabila  $x$  **apare legată pe poziția  $k$**  în  $\varphi$  dacă  $x = \varphi_k$  și există  $0 \leq i \leq k \leq j \leq n - 1$  a.î.  $(i, j)$ -subexpresia lui  $\varphi$  este o subexpresie a lui  $\varphi$  de forma  $\forall x\psi$ ;
- ▶ spunem că  $x$  **apare liberă pe poziția  $k$**  în  $\varphi$  dacă  $x = \varphi_k$ , dar  $x$  nu apare legată pe poziția  $k$  în  $\varphi$ ;
- ▶  $x$  este **variabilă legată** (*bounded variable*) a lui  $\varphi$  dacă există un  $k$  a.î.  $x$  apare legată pe poziția  $k$  în  $\varphi$ ;
- ▶  $x$  este **variabilă liberă** (*free variable*) a lui  $\varphi$  dacă există un  $k$  a.î.  $x$  apare liberă pe poziția  $k$  în  $\varphi$ .

### Exemplu

Fie  $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$ . Variabile libere:  $x, y, z$ . Variabile legate:  $x$ .



## Variabile legate și libere

**Notăție:**  $FV(\varphi) :=$  mulțimea variabilelor libere ale lui  $\varphi$ .

### Definiție alternativă

Mulțimea  $FV(\varphi)$  a variabilelor libere ale unei formule  $\varphi$  poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$FV(\varphi) = \text{Var}(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;}$$

$$FV(\neg\varphi) = FV(\varphi);$$

$$FV(\varphi \rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi);$$

$$FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}.$$

**Notăție:**  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  dacă  $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ .

### Propoziția 1.34

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice interpretări  $e_1, e_2 : V \rightarrow A$ ,  
pentru orice termen  $t$ ,

dacă  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice variabilă  $v \in \text{Var}(t)$ , atunci  
 $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$ .

**Dem.:** Aplicăm inducția pe termeni. Avem următoarele cazuri:

- $t = v \in V$ . Atunci  $t^{\mathcal{A}}(e_1) = e_1(v) = e_2(v) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$ .
- $t = c \in \mathcal{C}$ . Atunci  $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2) = c^{\mathcal{A}}$ .



## Demonstrația Propoziției 1.34

- $t = ft_1 \dots t_m$ , cu  $f \in \mathcal{F}_m$ ,  $m \geq 1$  și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni.  
Deoarece  $\text{Var}(t_i) \subseteq \text{Var}(t)$ , rezultă că pentru orice  $i = 1, \dots, m$ , avem  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice variabilă  $v \in \text{Var}(t_i)$ .  
Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru a concluziona că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$



### Propoziția 1.35

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ , orice interpretări  $e_1, e_2 : V \rightarrow A$ , pentru orice formulă  $\varphi$ ,

dacă  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice variabilă  $v \in FV(\varphi)$ , atunci  
 $\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$ .

**Dem.:** Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$ .

Atunci  $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$ ,  $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$ , deci putem aplica Propoziția 1.34 pentru a conchide că

$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$



## Demonstrația Propoziției 1.35

- $\varphi = R t_1 \dots t_m$ .

Atunci  $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$  pentru orice  $i = 1, \dots, m$ , deci putem aplica Propoziția 1.34 pentru a conduce că

$$t_i^A(e_1) = t_i^A(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff R^A(t_1^A(e_1), \dots, t_m^A(e_1)) \\ &\iff R^A(t_1^A(e_2), \dots, t_m^A(e_2)) \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

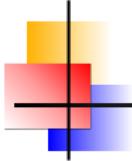
- $\varphi = \neg\psi$ .

Deoarece  $FV(\psi) = FV(\varphi)$ , putem aplica ipoteza de inducție pentru a conduce că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2].$$

Rezultă

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$



## Demonstrația Propoziției 1.35

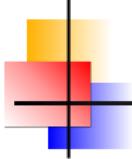
- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ .

Deoarece  $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$ , putem aplica ipoteza de inducție pentru a concura că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \chi[e_2].$$

Rezultă

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].\end{aligned}$$



## Demonstrația Propoziției 1.35

- $\varphi = \forall x\psi$  și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice  $a \in A$ ,

$$e_{1x \leftarrow a}(v) = e_{2x \leftarrow a}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările  $e_{1x \leftarrow a}, e_{2x \leftarrow a}$  pentru a conchide că

$$\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_{2x \leftarrow a}].$$

Rezultă

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1x \leftarrow a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{2x \leftarrow a}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].\end{aligned}$$



### Propoziția 1.36

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x \notin FV(\varphi)$ ,

$$\varphi \vdash \exists x\varphi \tag{17}$$

$$\varphi \vdash \forall x\varphi \tag{18}$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \wedge \forall x\psi \tag{19}$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi \vee \forall x\psi \tag{20}$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \wedge \exists x\psi \tag{21}$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi \vee \exists x\psi \tag{22}$$

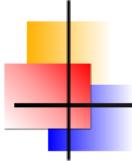
$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi \rightarrow \forall x\psi \tag{23}$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi \rightarrow \exists x\psi \tag{24}$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \vdash \exists x\psi \rightarrow \varphi \tag{25}$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \vdash \forall x\psi \rightarrow \varphi \tag{26}$$

**Dem.:** Exercițiu.



## Interpretarea formulelor

### Notăție

Fie  $t(x_1, \dots, x_n)$  un termen. Scriem uneori

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$$

în loc de  $t^{\mathcal{A}}(e)$ , unde  $e : V \rightarrow A$  este o (orice) interpretare a.i.  
 $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$ .

### Notăție

Fie  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  o formulă. Scriem uneori

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

în loc de  $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ , unde  $e : V \rightarrow A$  este o (orice) interpretare a.i.  
 $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$ .

### Definiția 1.37

O formulă  $\varphi$  se numește **enunț** (*sentence*) dacă  $FV(\varphi) = \emptyset$ , adică  $\varphi$  nu are variabile libere.

**Notăție:**  $Sent_{\mathcal{L}} :=$  mulțimea enunțurilor lui  $\mathcal{L}$ .

### Propoziția 1.38

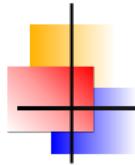
Fie  $\varphi$  un enunț. Pentru orice interpretări  $e_1, e_2 : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

**Dem.:** Este o consecință imediată a Propoziției 1.35 și a faptului că  $FV(\varphi) = \emptyset$ . □

### Definiția 1.39

O  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  este un **model** al lui  $\varphi$  dacă  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  pentru o (orice) evaluare  $e : V \rightarrow A$ . **Notăție:**  $\mathcal{A} \models \varphi$



## Mulțimi de enunțuri

**Notătie:** Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Gamma$ , notăm

$Mod(\Gamma)$ := clasa modelelor lui  $\Gamma$ .

Notăm  $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  în loc de  $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$ .

### Lema 1.40

Pentru orice mulțimi de enunțuri  $\Gamma, \Delta$  și orice enunț  $\psi$ ,

- (i)  $\Gamma \models \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$ .
- (ii)  $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$ .
- (iii)  $\Gamma$  este satisfiabilă  $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$ .

**Dem.:** Exercițiu ușor.

### Definiția 1.41

O  **$\mathcal{L}$ -teorie** este o mulțime  $T$  de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}$  care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

### Definiția 1.42

Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Gamma$ , **teoria generată de  $\Gamma$**  este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

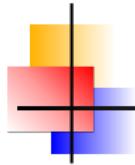
## Propoziția 1.43

- (i)  $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$ .
- (ii)  $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$ .
- (iii)  $Th(\Gamma)$  este o teorie.
- (iv)  $Th(\Gamma)$  este cea mai mică teorie  $T$  a.î.  $\Gamma \subseteq T$ .

**Dem.:**

- (i) Pentru orice  $\varphi \in \Gamma$ , avem că  $\Gamma \models \varphi$ , deci  $\varphi \in Th(\Gamma)$ .
- (ii) " $\supseteq$ " Conform (i) și Lemei 1.40.(ii).  
" $\subseteq$ " Conform definiției lui  $Th(\Gamma)$ .
- (iii) Pentru orice enunț  $\varphi$ , avem că
 
$$\begin{aligned} Th(\Gamma) \models \varphi &\iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi) \\ &\iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \text{ (conform (ii))} \iff \varphi \in Th(\Gamma). \end{aligned}$$
- (iv) Fie  $T$  o teorie care conține  $\Gamma$  și  $\varphi \in Th(\Gamma)$ . Din  $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$  și  $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$  rezultă că  $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$ , deci  $T \models \varphi$ . Deoarece  $T$  este teorie, obținem că  $\varphi \in T$ . Așadar,  $Th(\Gamma) \subseteq T$ .





### Propoziția 1.44

Pentru orice mulțimi de enunțuri  $\Gamma, \Delta$ ,

- (i)  $\Gamma \subseteq \Delta \implies Th(\Gamma) \subseteq Th(\Delta)$ .
- (ii)  $\Gamma$  este teorie  $\iff \Gamma = Th(\Gamma)$ .
- (iii)  $Th(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț valid}\}$  este inclusă în orice teorie.

**Dem.:** Exercițiu ușor.

- ▶ O teorie prezentată ca  $Th(\Gamma)$  se numește **teorie axiomatică** sau teorie prezentată **axiomatic**.  $\Gamma$  se numește mulțime de **axiome** pentru  $Th(\Gamma)$ .
- ▶ Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

### Definiția 1.45

O teorie  $T$  este **finit axiomatizabilă** dacă  $T = Th(\Gamma)$  pentru o mulțime de enunțuri finită  $\Gamma$ .

### Definiția 1.46

O clasă  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{L}$ -structuri este **axiomatizabilă** dacă  $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$  pentru o mulțime de enunțuri  $\Gamma$ . Spunem și că  $\Gamma$  **axiomatizează**  $\mathcal{K}$ .

### Definiția 1.47

O clasă  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{L}$ -structuri este **finit axiomatizabilă** dacă  $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$  pentru o mulțime **finită** de enunțuri  $\Gamma$ .



## Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- ▶  $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- ▶  $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, \equiv)$ , unde  $\equiv$  este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(REFL) \quad := \quad \forall x(x \dot{\equiv} x)$$

$$(SIM) \quad := \quad \forall x \forall y(x \dot{\equiv} y \rightarrow y \dot{\equiv} x)$$

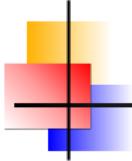
$$(TRANZ) \quad := \quad \forall x \forall y \forall z(x \dot{\equiv} y \wedge y \dot{\equiv} z \rightarrow x \dot{\equiv} z)$$

### Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este

$$T := Th((REFL), (SIM), (TRANZ)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ Fie  $\mathcal{K}$  clasa structurilor  $(A, \equiv)$ , unde  $\equiv$  este relație de echivalență pe  $A$ .
- ▶  $\mathcal{K} = Mod(T)$ , deci  $T$  axiomatizează  $\mathcal{K}$ .
- ▶ Spunem și că  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de echivalență.



## *Exemple - Teoria relațiilor de echivalență*

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (x \neq y \wedge x \dot{=} y \wedge \forall z (z \dot{=} x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.



## Exemple - Teoria grafurilor

Un **graf** este o pereche  $G = (V, E)$  de mulțimi a.î.  $E$  este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui  $V$ . Elementele lui  $V$  se numesc **vârfuri**, iar elementele lui  $E$  se numesc **muchii**.

- ▶  $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- ▶  $\mathcal{L}_{Graf}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, E)$ , unde  $E$  este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(IREFL) := \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

### Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt grafurile.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa grafurilor.



## Exemple - Teoria ordinii parțiale

- ▶  $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- ▶  $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, \leq)$ , unde  $\leq$  este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(REFL) := \forall x(x \dot{\leq} x)$$

$$(ANTISIM) := \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y)$$

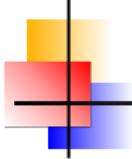
$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)$$

### Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile parțial ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.



## Exemple - Teoria ordinii stricte

- ▶  $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- ▶  $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, <)$ , unde  $<$  este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

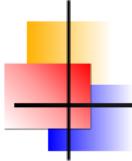
$$\begin{aligned}(IREFL) \quad &:= \quad \forall x \neg(x \dot{<} x) \\(TRANZ) \quad &:= \quad \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z)\end{aligned}$$

### Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.



## Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

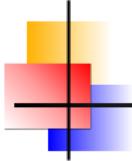
$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x)$$

### Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.



## Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) \quad := \quad \forall x \forall y (x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y)).$$

### Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.



## Exemple

Pentru orice  $n \geq 2$ , notăm următorul enunț cu  $\exists^{\geq n}$ :

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

### Propoziția 1.48

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

**Dem.: Exercițiu ușor.**



## Exemple

### Notării

- ▶ Pentru uniformitate, notăm  $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$ .
- ▶  $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- ▶  $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

### Propoziția 1.49

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} &\iff A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \models \exists^{=n} &\iff A \text{ are exact } n \text{ elemente.}\end{aligned}$$

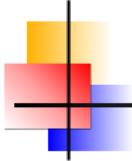
**Dem.**: Exercițiu ușor.

### Propoziția 1.50

Fie  $T := \text{Th}(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$ . Atunci pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \models T \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

**Dem.**: Exercițiu ușor.



## Homomorfisme, izomorfisme

Generalizare a noțiunii de homomorfism de la algebră:

### Definiția 1.51

Fie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  două  $\mathcal{L}$ -structuri,  $A = |\mathcal{A}|$ ,  $B = |\mathcal{B}|$  și  $h : A \rightarrow B$  o funcție. Spunem că  $h$  este **homomorfism** și scriem  $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  dacă:

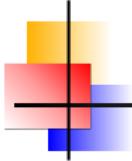
(i) pentru orice  $m \geq 1$ ,  $R \in \mathcal{R}_m$  și orice elemente  $a_1, \dots, a_m \in A$ ,

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) \iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m))$$

(ii) pentru orice  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$  și orice elemente  $a_1, \dots, a_m \in A$ ,

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m))$$

(iii) pentru orice  $c \in \mathcal{C}$ ,  $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ .



## *Homomorfisme, izomorfisme*

### *Definiția 1.52*

Un homomorfism  $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  se numește **izomorfism** dacă  $h$  este bijectiv.

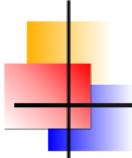
**Notăție:**  $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ .

### *Definiția 1.53*

$\mathcal{L}$ -structurile  $\mathcal{A}$  și  $\mathcal{B}$  se numesc **izomorfe** dacă există  $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ .

### *Exemplu*

- ▶  $\mathcal{L} = (\dot{<}, \star, c)$ , unde  $\dot{<}$  este simbol de relație binară,  $\star$  este simbol de operație binară și  $c$  este simbol de constantă.
- ▶  $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <, +, 0)$  și  $\mathcal{B} = ((0, \infty), <, \cdot, 1)$ .
- ▶  $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $h(x) = 2^x$  este izomorfism



## Homomorfisme, izomorfisme

Fie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  două  $\mathcal{L}$ -structuri,  $A = |\mathcal{A}|$ ,  $B = |\mathcal{B}|$  și  $h : A \rightarrow B$ .

Oricărei evaluări  $e : V \rightarrow A$  a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$  i se asociază o evaluare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{B}$ :  $h \circ e : V \rightarrow B$ ,  $(h \circ e)(v) = h(e(v))$ .

### Definiția 1.54

- (i) Spunem că  $h$  respectă un termen  $t$  dacă pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$h(t^{\mathcal{A}}(e)) = t^{\mathcal{B}}(h \circ e).$$

- (ii) Spunem că  $h$  respectă o formulă  $\varphi$  dacă pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e].$$

### Propoziția 1.55

Orice homomorfism  $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  respectă toți termenii.

**Dem.:** Exercițiu. Prin inducție după termeni.



## Homomorfisme, izomorfisme

- ▶ Fie  $t(x_1, \dots, x_n)$  un termen. Atunci  $h$  respectă  $t \iff$  pentru orice  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,

$$h(t^A[a_1, \dots, a_n]) = t^B[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

- ▶ Fie  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  o formulă. Atunci  $h$  respectă  $\varphi \iff$  pentru orice  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

### Exemplu

$\mathcal{L} = (\dot{<}, \star, c)$ ,  $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <, +, 0)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, \infty), <, \cdot, 1)$ ,

$h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $h(x) = 2^x$

$t(x, y) = x * (y * c)$ ,  $e : V \rightarrow A$ ,  $e(x) = 3$ ,  $e(y) = 7$ .

- ▶  $t^A(e) = t^A[3, 7] = 3 + (7 + 0) = 10$
- ▶  $t^B(h \circ e) = t^B[h(3), h(7)] = t^B[2^3, 2^7] = 2^3 \cdot (2^7 \cdot 1) = 2^{10}$
- ▶  $h(t^A[3, 7]) = 2^{10} = t^B[h(3), h(7)].$

### Propoziția 1.56

Fie  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  două  $\mathcal{L}$ -structuri. Orice izomorfism  $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  respectă toate formulele.

**Dem.:** Trebuie să demonstrăm că pentru orice formulă  $\varphi$ ,

pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e]$ .

Aplicăm inducția pe formule. Fie  $e : V \rightarrow A$ . Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$ . Atunci

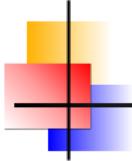
$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff t_1^A(e) = t_2^A(e) \iff h(t_1^A(e)) = h(t_2^A(e))$$

deoarece  $h$  este injectivă

$$\iff t_1^{\mathcal{B}}(h \circ e) = t_2^{\mathcal{B}}(h \circ e)$$

deoarece  $h$  respectă termenii

$$\iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e]$$



## Homomorfisme, izomorfisme

- $\varphi = R t_1 \dots t_m$ . Atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \vDash \varphi[e] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e) \dots t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\&\iff R^{\mathcal{B}}(h(t_1^{\mathcal{A}}(e)), \dots, h(t_m^{\mathcal{A}}(e))) \\&\quad \text{deoarece } h \text{ este homomorfism} \\&\iff R^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}(h \circ e), \dots, t_m^{\mathcal{B}}(h \circ e)) \\&\quad \text{deoarece } h \text{ respectă termenii} \\&\iff \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e].\end{aligned}$$

- Pașii de inducție pentru  $\neg$  și  $\rightarrow$  sunt imediați.



## *Homomorfisme, izomorfisme*

- $\varphi = \forall x\psi$ . Atunci

$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff$  pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]$   
 $\iff$  pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{B} \models \psi[h \circ e_{x \leftarrow a}]$   
conform ipotezei de inducție pentru  $\psi$   
 $\iff$  pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{B} \models \psi[(h \circ e)_{x \leftarrow h(a)}]$   
deoarece  $h \circ e_{x \leftarrow a} = (h \circ e)_{x \leftarrow h(a)}$   
 $\iff$  pentru orice  $b \in B$ ,  $\mathcal{B} \models \psi[(h \circ e)_{x \leftarrow b}]$   
deoarece  $h$  este surjectiv  
 $\iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e]$ .



### Definiția 1.57

Două  $\mathcal{L}$ -structuri  $\mathcal{A}$  și  $\mathcal{B}$  se numesc **elementar echivalente** (scriem  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ) dacă pentru orice enunț  $\varphi$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

### Propoziția 1.58

Pentru orice  $\mathcal{A}$  și  $\mathcal{B}$ , dacă  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ , atunci  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

**Dem.:** Fie  $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  un izomorfism. Pentru orice enunț  $\varphi$ , avem

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi &\iff \text{pentru o (orice) evaluare } e : V \rightarrow A, \quad \mathcal{A} \models \varphi[e] \\ &\iff \text{pentru o (orice) evaluare } e : V \rightarrow A, \quad \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e] \\ &\quad \text{conform Propoziției 1.56} \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi.\end{aligned}$$




## Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

- ▶  $\mathcal{L}_\equiv = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$
- ▶  $\mathcal{L}_\equiv$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A)$ , unde  $A$  este multime nevidă.

Fie  $\mathcal{A} = (A), \mathcal{B} = (B)$  două  $\mathcal{L}_\equiv$ -structuri.

- ▶  $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \iff h : A \rightarrow B.$
- ▶  $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff h : A \rightarrow B$  este bijecție.
- ▶  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff |A| = |B|.$



## Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

### Propoziția 1.59

Fie  $\mathcal{A} = (A)$  o  $\mathcal{L}_=$ -structură finită și  $n = |A|$ . Atunci enunțul  $\exists^{=n}$  caracterizează  $\mathcal{A}$  până la izomorfism, i.e.: pentru orice  $\mathcal{L}_=$ -structură  $\mathcal{B} = (B)$ ,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \models \exists^{=n}.$$

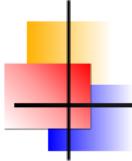
**Dem.:**  $\mathcal{B} \models \exists^{=n} \iff |B| = n \iff \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ . □

### Propoziția 1.60

Pentru orice  $\mathcal{L}_=$ -structuri finite  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

**Dem.:** " $\Rightarrow$ " Conform Propoziției 1.58.

" $\Leftarrow$ " Presupunem că  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$  și fie  $n = |A|$ . Atunci  $\mathcal{A} \models \exists^{=n}$ , deci  $\mathcal{B} \models \exists^{=n}$ . Se aplică acum propoziția precedentă. □



## Cardinalul unui limbaj

Fie  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$  un limbaj de ordinul întâi.

### Definiția 1.61

**Cardinalul** lui  $\mathcal{L}$  este prin definiție

$$\|\mathcal{L}\| := |\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}|.$$

- ▶  $\mathcal{L}$  este **finit** dacă  $\|\mathcal{L}\|$  este finit.
- ▶  $\mathcal{L}$  este **numărabil** dacă  $\|\mathcal{L}\| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ .
- ▶  $\mathcal{L}$  este **cel mult numărabil** dacă  $\mathcal{L}$  este finit sau numărabil.

### Propoziția 1.62

$$|Form_{\mathcal{L}}| = \begin{cases} \aleph_0 & \text{dacă } \mathcal{L} \text{ este finit} \\ \|\mathcal{L}\| & \text{altfel.} \end{cases}$$

### Definiția 1.63

O mulțime de enunțuri  $\Gamma$  se numește **completă** dacă pentru orice enunț  $\psi$ ,

$$\Gamma \models \psi \text{ sau } \Gamma \models \neg\psi.$$

**Observație:** O  $\mathcal{L}$ -teorie  $T$  este completă  $\iff$  pentru orice enunț  $\varphi$ , avem că  $\varphi \in T$  sau  $\neg\varphi \in T$ .

### Testul lui Vaught 1.64

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj cel mult numărabil și  $T$  o  $\mathcal{L}$ -teorie satisfiabilă. Presupunem că

- (i)  $T$  nu are modele finite;
- (ii) orice două modele numărabile ale lui  $T$  sunt izomorfe.

Atunci  $T$  este completă.



## *Teorii complete*

### *Definiția 1.65*

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ , **teoria** lui  $\mathcal{A}$  este:

$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

### *Propoziția 1.66*

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,  $Th(\mathcal{A})$  este o teorie completă satisfiabilă

**Dem.**: Exercițiu ușor.

### *Propoziția 1.67*

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structuri  $\mathcal{A}$  și  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$ .

**Dem.**: Exercițiu ușor.

### Propoziția 1.68

Fie  $T$  o teorie satisfiabilă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $T$  este completă.
- (ii) Pentru orice model  $\mathcal{A}$  al lui  $T$ ,  $Th(\mathcal{A}) = T$ .
- (iii) Orice două modele ale lui  $T$  sunt elementar echivalente.

**Dem.:** (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie  $\mathcal{A}$  model al lui  $T$ .

" $\supseteq$ " Evident.

" $\subseteq$ " Pentru orice enunț  $\varphi \in Th(\mathcal{A})$ , dacă  $\varphi \notin T$ , atunci  $\neg\varphi \in T$  (deoarece  $T$  este completă), deci  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ , ceea ce contrazice faptul că  $\mathcal{A} \models \varphi$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Fie  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  modele ale lui  $T$ . Atunci  $T = Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$ . Aplicăm Propoziția 1.67 pentru a obține că  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

(iii) $\Rightarrow$ (i) Fie  $\varphi$  un enunț. Presupunem că  $T \not\models \varphi$ . Atunci există un model  $\mathcal{A}$  al lui  $T$  a.î.  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , deci  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ . Aplicând (iii), obținem că  $\mathcal{B} \models \neg\varphi$  pentru orice model  $\mathcal{B}$  al lui  $T$ . Așadar,  $T \models \neg\varphi$ . □

$\mathcal{K}$  este o clasă nevidă de  $\mathcal{L}$ -structuri

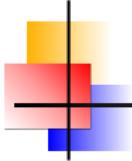
### Definiția 1.69

**Teoria** lui  $\mathcal{K}$  este mulțimea  $Th(\mathcal{K}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{K}} Th(\mathcal{A})$ .

### Propoziția 1.70

- (i) Fiecare  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$  este model al lui  $Th(\mathcal{K})$ .
- (ii) Dacă  $\mathcal{K}$  are cel puțin două elemente  $\mathcal{A}$  și  $\mathcal{B}$  care nu sunt elementar echivalente, atunci  $Th(\mathcal{K})$  nu este o teorie completă.

**Dem.:** Exercițiu.



## Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

### Propoziția 1.71

Pentru orice  $n \geq 1$  și orice mulțime finită  $A$  cu  $n$  elemente,

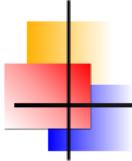
$$Th(\exists^{=n}) = Th(\mathcal{A}), \quad \text{unde } \mathcal{A} = (A).$$

În particular,  $Th(\exists^{=n})$  este o teorie completă.

**Dem.:** " $\subseteq$ " Deoarece  $\mathcal{A} \models \exists^{=n}$ , avem că  $\mathcal{A} \models Th(\exists^{=n})$ . Prin urmare,  $Th(\exists^{=n}) \subseteq Th(\mathcal{A})$ .

" $\supseteq$ " Fie  $\varphi \in Th(\mathcal{A})$ , i.e.  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Vrem să arătăm că  $\varphi \in Th(\exists^{=n})$ , i.e.  $\exists^{=n} \models \varphi$ . Fie  $\mathcal{B} = (B)$  a.î.  $\mathcal{B} \models \exists^{=n}$ . Atunci  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ , conform Propoziției 1.59. Rezultă că  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , prin urmare  $\mathcal{B} \models \varphi$ .





## *Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$*

### *Propoziția 1.72*

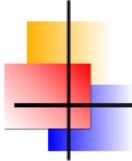
$Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$  este completă.

**Dem.:** Fie  $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$ . Conform Propoziției 1.46,  $\mathcal{A} = (A)$  este model a lui  $T \iff A$  este mulțime infinită.

Prin urmare,  $T$  este satisfiabilă și nu are modele finite.

În plus, dacă  $\mathcal{A} = (A), \mathcal{B} = (B)$  sunt două modele numărabile ale lui  $T$ , atunci  $|A| = |B| = \aleph_0$ , deci  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ .

Putem aplica Testul lui Vaught pentru a concura că  $T$  este completă. □



## *Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$*

### *Corolarul 1.73*

Pentru orice mulțime infinită  $A$ ,

$$Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}) = Th(\mathcal{A}), \quad \text{unde } \mathcal{A} = (A).$$

**Dem.**: Deoarece  $Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$  este completă, putem aplica Propoziția 1.68.(ii). □

### *Corolarul 1.74*

Pentru orice mulțimi infinite  $A$  și  $B$ ,  $\mathcal{L}_=$ -structurile  $\mathcal{A} = (A)$ ,  $\mathcal{B} = (B)$  sunt elementar echivalente.

**Dem.**: Aplicăm Propoziția 1.68.(iii). □

Fie  $x$  o variabilă a lui  $\mathcal{L}$  și  $u$  termen al lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 1.75

Pentru orice termen  $t$  al lui  $\mathcal{L}$ , definim

$t_x(u) :=$  expresia obținută din  $t$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui  $x$  cu  $u$ .

### Propoziția 1.76

Pentru orice termen  $t$  al lui  $\mathcal{L}$ ,  $t_x(u)$  este termen al lui  $\mathcal{L}$ .

**Dem.:** Demonstrăm prin inducție după termenul  $t$ .

- ▶  $t = y \in V$ . Atunci  $y_x(u) = \begin{cases} y & \text{dacă } y \neq x \\ u & \text{dacă } y = x. \end{cases}$
- ▶  $t = c \in \mathcal{C}$ . Atunci  $c_x(u) = c$ .
- ▶  $t = ft_1 \dots t_m$  și, conform ipotezei de inducție,  
 $(t_1)_x(u), \dots, (t_m)_x(u)$  sunt termeni. Atunci  
 $(ft_1 \dots t_m)_x(u) = f(t_1)_x(u) \dots (t_m)_x(u)$  este termen.



- ▶ Vrem să definim analog  $\varphi_x(u)$  ca fiind expresia obținută din  $\varphi$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui  $x$  cu  $u$ .
- ▶ De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie  $\varphi := \exists y \neg(x = y)$  și  $u := y$ . Atunci  $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$ . Avem

- ▶ Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  cu  $|A| \geq 2$  și pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[a]$ . Deci  $\forall x\varphi$  este satisfiabilă.
- ▶  $\varphi_x(u)$  nu este satisfiabilă.

Fie  $x$  o variabilă,  $u$  un termen și  $\varphi$  o formulă.

### Definiția 1.77

Spunem că  $x$  este **liberă pentru  $u$**  în  $\varphi$  sau că  $u$  este **substituibil pentru  $x$**  în  $\varphi$  dacă pentru orice variabilă  $y$  care apare în  $u$ , nici o subformulă a lui  $\varphi$  de forma  $\forall y \psi$  nu conține apariții libere ale lui  $x$ .

### Observație

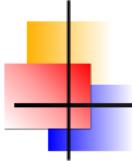
$x$  este liberă pentru  $u$  în  $\varphi$  în oricare din următoarele situații:

- ▶  $u$  nu conține variabile;
- ▶  $\varphi$  nu conține variabile care apar în  $u$ ;
- ▶ nici o variabilă din  $u$  nu apare legată în  $\varphi$ ;
- ▶  $x$  nu apare în  $\varphi$ ;
- ▶  $\varphi$  nu conține apariții libere ale lui  $x$ .

### Definiție alternativă

Noțiunea "x este liberă pentru u în  $\varphi$ " poate fi definită și prin inducție după formula  $\varphi$  astfel:

- ▶ dacă  $\varphi$  este formulă atomică, atunci x este liberă pentru u în  $\varphi$ ;
- ▶ dacă  $\varphi = \neg\psi$ , atunci x este liberă pentru u în  $\varphi$  dacă x este liberă pentru u în  $\psi$ ;
- ▶ dacă  $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ , atunci x este liberă pentru u în  $\varphi$  dacă x este liberă pentru u atât în  $\psi$  cât și în  $\chi$ ;
- ▶ dacă  $\varphi = \forall y\psi$ , atunci x este liberă pentru u în  $\varphi$  dacă
  - ▶ x nu apare liberă în  $\varphi$ , sau
  - ▶ y nu apare în u și x este liberă pentru u în  $\psi$ .



## *Substituția*

Fie  $x$  o variabilă,  $u$  termen și  $\varphi$  o formulă a.î.  $x$  este liberă pentru  $u$  în  $\varphi$ .

### *Definiția 1.78*

$\varphi_x(u)$  := expresia obținută din  $\varphi$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui  $x$  cu  $u$ .

Spunem că  $\varphi_x(u)$  este o **substituție liberă**.

### *Propoziția 1.79*

$\varphi_x(u)$  este formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

**Dem.: Exercițiu.**

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$ .

### Lema 1.80

Fie  $x$  o variabilă,  $u$  un termen și  $a = u^{\mathcal{A}}(e)$ .

- (i) Pentru orice termen  $t$ ,  $(t_x(u))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$ .
- (ii) Pentru orice formulă  $\varphi$ , dacă  $x$  este liberă pentru  $u$  în  $\varphi$ , atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi_x(u)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Ideea lemei este următoarea: să schimba evaluarea  $e$  pentru a atribui variabilei  $x$  valoarea  $a \in A$  este același lucru cu să înlocui  $x$  cu un termen  $u$  a cărui interpretare sub  $e$  este  $a$ .

## Propoziția 1.81

Pentru orice termeni  $u_1$  și  $u_2$  și orice variabilă  $x$ ,

(i) pentru orice termen  $t$ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă  $\varphi$  a.î.  $x$  este liberă pentru  $u_1$  și  $u_2$  în  $\varphi$ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

**Dem.**: Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$ . Presupunem că  $\mathcal{A} \models (u_1 = u_2)[e]$ , adică  $u_1^{\mathcal{A}}(e) = u_2^{\mathcal{A}}(e) := a \in A$ .

(i) Conform Lemei 1.80.(i),

$$(t_x(u_1))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = (t_x(u_2))^{\mathcal{A}}(e),$$

deci  $\mathcal{A} \models (t_x(u_1) = t_x(u_2))[e]$ .

(ii) Aplicând Lema 1.80.(ii), obținem

$$\mathcal{A} \models \varphi_x(u_1)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi_x(u_2)[e].$$

Deci,  $\mathcal{A} \models (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2))[e]$ . □

### Propoziția 1.82

Fie  $\varphi$  o formulă și  $x$  o variabilă.

(i) Pentru orice termen  $u$  substituibil pentru  $x$  în  $\varphi$ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii)  $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi$ ,  $\models \varphi \rightarrow \exists x\varphi$ .

(iii) Pentru orice simbol de constantă  $c$ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$

**Dem.:**

(i) Fie  $\mathcal{A}$  și  $e : V \rightarrow A$ . Atunci

$$\mathcal{A} \models \forall x\varphi[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$$

$$\implies \text{pentru } a = u^{\mathcal{A}}(e), \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$$

$$\iff \mathcal{A} \models \varphi_x(u)[e] \text{ conform Lemei 1.80.(ii).}$$

A doua aserțiune rezultă din prima aplicată la  $\neg\varphi$ .



## Substituția

### Propoziția 1.83

Fie  $\varphi$  o formulă și  $x$  o variabilă.

(i) Pentru orice termen  $u$  substituibil pentru  $x$  în  $\varphi$ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii)  $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi, \quad \models \varphi \rightarrow \exists x\varphi.$

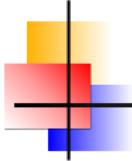
(iii) Pentru orice simbol de constantă  $c$ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$

**Dem.:** (continuare)

(ii) Aplicăm (i) cu  $u := x$ .

(iii) Aplicăm (i) cu  $u := c$ . □



## Substituția

În general, dacă  $x$  și  $y$  sunt variabile,  $\varphi$  și  $\varphi_x(y)$  nu sunt logic echivalente: fie  $\mathcal{L}_{ar}$ ,  $\mathcal{N}$  și  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$  a.î.  
 $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$ . Atunci

$$\mathcal{N} \models (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\models (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

## Propoziția 1.84

Pentru orice formulă  $\varphi$ , variabile distincte  $x$  și  $y$  a.î.  $y \notin FV(\varphi)$  și  $y$  este substituibil pentru  $x$  în  $\varphi$ ,

$$\exists x\varphi \vdash \exists y\varphi_x(y) \text{ și } \forall x\varphi \vdash \forall y\varphi_x(y).$$

**Dem.:** Fie  $\mathcal{A}$  și  $e : V \rightarrow A$ . Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \exists y\varphi_x(y)[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi_x(y)[e_{y \leftarrow a}] \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{y \leftarrow a, x \leftarrow a}] \\ &\quad \text{conform Lemei 1.80.(ii), deoarece} \\ &\quad y^{\mathcal{A}}(e_{y \leftarrow a}) = e_{y \leftarrow a}(y) = a \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \\ &\quad \text{deoarece } y \notin FV(\varphi) \\ &\iff \mathcal{A} \models \exists x\varphi[e]. \end{aligned}$$

Analog pentru a doua aserțiune.



Folosim Propoziția 1.84 astfel: dacă  $\varphi_x(u)$  nu este substituție liberă (i.e.  $x$  nu este liberă pentru  $u$  în  $\varphi$ ), atunci înlocuim  $\varphi$  cu o formulă  $\varphi'$  logic echivalentă a.i.  $\varphi'_x(u)$  este substituție liberă.

### Definiția 1.85

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice variabile  $y_1, \dots, y_k$ , **varianta  $y_1, \dots, y_k$ -liberă**  $\varphi'$  a lui  $\varphi$  este definită recursiv astfel:

- ▶ dacă  $\varphi$  este formulă atomică, atunci  $\varphi'$  este  $\varphi$ ;
- ▶ dacă  $\varphi = \neg\psi$ , atunci  $\varphi'$  este  $\neg\psi'$ ;
- ▶ dacă  $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ , atunci  $\varphi'$  este  $\psi' \rightarrow \chi'$ ;
- ▶ dacă  $\varphi = \forall z\psi$ , atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \dots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde  $w$  este prima variabilă din sirul  $v_0, v_1, \dots$ , care nu apare în  $\psi'$  și nu este printre  $y_1, \dots, y_k$ .

### Definiția 1.86

$\varphi'$  este **variantă** a lui  $\varphi$  dacă este varianta  $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui  $\varphi$  pentru anumite variabile  $y_1, \dots, y_k$ .

### Propoziția 1.87

- (i) Pentru orice formulă  $\varphi$ , dacă  $\varphi'$  este o variantă a lui  $\varphi$ , atunci  $\varphi \vdash \varphi'$ ;
- (ii) Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice termen  $t$ , dacă variabilele lui  $t$  se află printre  $y_1, \dots, y_k$  și  $\varphi'$  este varianta  $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui  $\varphi$ , atunci  $\varphi'_x(t)$  este o substituție liberă.

**Dem.: Exercițiu.**

### Definiția 1.88

O formulă care nu conține cuantificatori se numește **liberă de cuantificatori** ("quantifier-free").

### Definiția 1.89

O formulă  $\varphi$  este în **formă normală prenex** dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \psi,$$

unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  sunt variabile și  $\psi$  este formulă liberă de cuantificatori. Formula  $\psi$  se numește **matricea** lui  $\varphi$  și  $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$  este **prefixul** lui  $\varphi$ .

*Exemple de formule în formă normală prenex:*

- ▶ Formulele **universale**:  $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi$ , unde  $\psi$  este liberă de cuantificatori
- ▶ Formulele **existențiale**:  $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi$ , unde  $\psi$  este liberă de cuantificatori



## Forma normală prenex

Fie  $\varphi$  o formulă și  $t_1, \dots, t_n$  termeni care nu conțin variabile din  $\varphi$ .

Notăm cu  $\varphi_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$  formula obținută din  $\varphi$  substituind toate aparițiile libere ale lui  $x_1, \dots, x_n$  cu  $t_1, \dots, t_n$  respectiv.

**Notății:**  $\forall^c = \exists$ ,  $\exists^c = \forall$ .

### Teorema de formă normală prenex 1.90

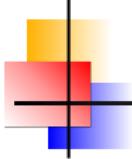
Pentru orice formulă  $\varphi$  există o formulă  $\varphi^*$  în formă normală prenex a.î.  $\varphi \vdash \varphi^*$  și  $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$ .

**Dem.:** Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi$  este formulă atomică. Atunci  $\varphi^* := \varphi$ .
- $\varphi = \neg\psi$  și, conform ipotezei de inducție, există o formulă  $\psi^* = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi_0$  în formă normală prenex a.î.  $\psi \vdash \psi^*$  și  $FV(\psi) = FV(\psi^*)$ . Definim

$$\varphi^* := Q_1^c x_1 \dots Q_n^c x_n \neg\psi_0.$$

Atunci  $\varphi^*$  este în formă normală prenex,  $\varphi^* \vdash \neg\psi^* \vdash \neg\psi = \varphi$  și  $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$ .



## Forma normală prenex

### Teorema de formă normală prenex 1.90

Pentru orice formulă  $\varphi$  există o formulă  $\varphi^*$  în formă normală prenex a.î.  $\varphi \vdash \varphi^*$  și  $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$ .

**Dem.:** (continuare) •  $\varphi = \psi \rightarrow \chi$  și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

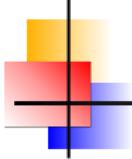
$$\psi^* = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \dots S_m z_m \chi_0$$

a.î.  $\psi \vdash \psi^*$ ,  $FV(\psi) = FV(\psi^*)$ ,  $\chi \vdash \chi^*$  și  $FV(\chi) = FV(\chi^*)$ .

Notăm cu  $V_0$  mulțimea tuturor variabilelor care apar în  $\psi^*$  sau  $\chi^*$ .  
Fie  $\tilde{\psi}^*$  (resp.  $\tilde{\chi}^*$ ) varianta  $V_0$ -liberă a lui  $\psi^*$  (resp.  $\chi^*$ ). Atunci

$$\tilde{\psi}^* = Q_1 y_1 \dots Q_n y_n \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\chi}^* = S_1 w_1 \dots S_m w_m \tilde{\chi}_0,$$

unde  $y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_m$  sunt variabile care nu apar în  $V_0$ ,  
 $\tilde{\psi}_0 = \psi_{0x_1, \dots, x_n}(y_1, \dots, y_n)$  și  $\tilde{\chi}_0 = \chi_{0z_1, \dots, z_m}(w_1, \dots, w_m)$ .



## Forma normală prenex

### Teorema de formă normală prenex 1.90

Pentru orice formulă  $\varphi$  există o formulă  $\varphi^*$  în formă normală prenex a.î.  $\varphi \vdash \varphi^*$  și  $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$ .

**Dem.:** (continuare) Conform Propoziției 1.87,  $\tilde{\psi}^* \vdash \psi^*$  și  $\tilde{\chi}^* \vdash \chi^*$ . De asemenea,  $FV(\tilde{\psi}^*) = FV(\psi^*)$  și  $FV(\tilde{\chi}^*) = FV(\chi^*)$ . Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1 \dots Q_n^c y_n S_1 w_1 \dots S_m w_m (\tilde{\psi}_0 \rightarrow \tilde{\chi}_0).$$

Atunci  $\varphi^*$  este în formă normală prenex,  $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$  și

$$\begin{aligned}\varphi^* &\vdash \tilde{\psi}^* \rightarrow \tilde{\chi}^* \\ &\vdash \psi^* \rightarrow \chi^* \\ &\vdash \psi \rightarrow \chi = \varphi.\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$  și, conform ipotezei de inducție, există o formulă  $\psi^*$  în formă normală prenex a.î.  $\psi \vdash \psi^*$  și  $FV(\psi) = FV(\psi^*)$ .

Definim  $\varphi^* := \forall x \psi^*$ .



### Definiția 1.91

Fie  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \text{ari}_{\mathcal{L}})$  și  $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}; \text{ari}_{\mathcal{L}^+})$  două limbaje. Spunem că  $\mathcal{L}^+$  este **extensie** a lui  $\mathcal{L}$  sau că  $\mathcal{L}$  este **sublimbaj** al lui  $\mathcal{L}^+$  dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}$$

și  $\text{ari}_{\mathcal{L}}$  este restricția lui  $\text{ari}_{\mathcal{L}^+}$  la simbolurile nelogice ale lui  $\mathcal{L}$ .

**Notăție:**  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$

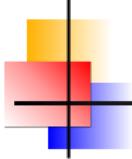
### Definiția 1.92

Spunem că  $\mathcal{L}^+$  este o **extensie prin constante** a lui  $\mathcal{L}$  dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}.$$

### Exemple

- $\mathcal{L}_- \subseteq \mathcal{L}$  pentru orice limbaj  $\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_{\dot{\cdot}} = (\dot{<}) \subseteq (\dot{<} ; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}) \subseteq \mathcal{L}_{ar} = (\dot{<} , \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$



## Schimbarea limbajelor

Dacă  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ , atunci orice termen (formulă) din  $\mathcal{L}$  este termen (formulă) în  $\mathcal{L}^+$ .

### Definiția 1.93

Fie  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ ,  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $\mathcal{A}^+$  o  $\mathcal{L}^+$ -structură.

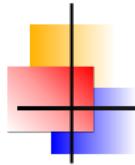
Spunem că  $\mathcal{A}$  este  $\mathcal{L}$ -redusa lui  $\mathcal{A}^+$  sau că  $\mathcal{A}^+$  este  $\mathcal{L}^+$ -extensia lui  $\mathcal{A}$  dacă

- ▶  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$ ;
- ▶ pentru orice  $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ ,  $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}^+}$ ;
- ▶ pentru orice  $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ ,  $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}^+}$ ;
- ▶ pentru orice  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ,  $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}^+}$ .

Notație:  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$

### Exemplu

$(\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$  are redusele  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{N}, S, 0)$ ,  $(\mathbb{N}, <)$ .



## Schimbarea limbajelor

### Propoziția 1.94

Fie  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ ,  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură,  $A = |\mathcal{A}|$ . Pentru orice  $\mathcal{L}^+$ -extensie  $\mathcal{A}^+$  a lui  $\mathcal{A}$  și pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

- (i)  $t^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}^+}(e)$  pentru orice termen  $t$  al lui  $\mathcal{L}$ ;
- (ii) pentru orice formulă  $\varphi$  a lui  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A}^+ \models \varphi[e]$ .

**Dem.: Exercițiu.**



### Propoziția 1.95

Pentru orice  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$  și pentru orice formulă  $\varphi$  a lui  $\mathcal{L}$ , următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice  $e : V \rightarrow |\mathcal{A}|$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ ;
- (ii) pentru orice  $\mathcal{L}^+$ -structură  $\mathcal{A}^+$  și orice  $e : V \rightarrow |\mathcal{A}^+|$ ,  
 $\mathcal{A}^+ \models \varphi[e]$ .

**Dem.:** (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie  $\mathcal{A}^+$  o  $\mathcal{L}^+$ -structură și  $e : V \rightarrow |\mathcal{A}^+|$ .

Considerăm  $\mathcal{L}$ -structura  $\mathcal{A} := \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$ . Atunci  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$ , deci, conform (i),  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ . Aplicăm acum Propoziția 1.94 pentru a conculde că  $\mathcal{A}^+ \models \varphi[e]$ .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow |\mathcal{A}|$ . Considerăm o  $\mathcal{L}^+$ -extensie arbitrară  $\mathcal{A}^+$  a lui  $\mathcal{A}$ . Atunci  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$ , deci, conform (ii),  $\mathcal{A}^+ \models \varphi[e]$ . Aplicăm acum Propoziția 1.94 pentru a conculde că  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .



## *Schimbarea limbajelor*

### *Corolarul 1.96*

Pentru orice  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$  și orice multime de enunțuri  $\Gamma$  a lui  $\mathcal{L}$ ,  
 $Th_{\mathcal{L}}(\Gamma) = Sen_{\mathcal{L}} \cap Th_{\mathcal{L}^+}(\Gamma)$ .

**Dem.**: Exercițiu ușor.

### *Corolarul 1.97*

Pentru orice  $\mathcal{L}^- \subseteq \mathcal{L}$  și orice  $\mathcal{L}$ -structuri  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,

- (i)  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \restriction \mathcal{L}^- \simeq \mathcal{B} \restriction \mathcal{L}^-$ .
- (ii)  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \restriction \mathcal{L}^- \equiv \mathcal{B} \restriction \mathcal{L}^-$ .

**Dem.**: Exercițiu ușor.

### Definiția 1.98

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj,  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $X \subseteq A$ .

- (i)  $\mathcal{L}^X$  este extensia lui  $\mathcal{L}$  obținută adăugând, pentru orice  $a \in X$ , un nou simbol de constantă  $\dot{a}$ .  
Spunem că  $\dot{a}$  este un **nume** pentru  $a$ .
- (ii)  $\mathcal{A}_X$  este  $\mathcal{L}^X$ -extensia lui  $\mathcal{A}$  obținută definind pentru orice  $a \in X$ ,  $\dot{a}^{\mathcal{A}_X} = a$ .

### Observația 1.99

Pentru orice formulă  $\varphi$  a lui  $\mathcal{L}$  cu  $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$  și pentru orice  $a_1, \dots, a_n \in A$ , fie  $\varphi(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n)$  enunțul din  $\mathcal{L}^A$  obținut din  $\varphi$  prin înlocuirea lui  $x_i$  cu  $\dot{a}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A}_A \models \varphi(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n).$$

**Dem.: Exercițiu ușor.**



## Lema constantelor

### Lema constantelor 1.100

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj,  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$  și  $c$  un simbol de constantă din  $\mathcal{L}$  care nu apare în  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Atunci

$$\Gamma \models \varphi_x(c) \iff \Gamma \models \forall x\varphi.$$

**Dem.:** " $\Leftarrow$ " este imediată, deoarece  $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c)$ .

" $\Rightarrow$ " Fie  $(\mathcal{A}, e)$  un model al lui  $\Gamma$ , i.e.  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  a.î.  $\mathcal{A} \models \gamma[e]$  pentru orice  $\gamma \in \Gamma$ .

Vrem să demonstrăm că  $(\mathcal{A}, e)$  este model al lui  $\forall x\varphi$ , i.e. pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ .

Fie  $a \in A$  arbitrar. Fie  $\mathcal{L}^-$  sublimbajul lui  $\mathcal{L}$  obținut prin eliminarea simbolului  $c$ ,  $\mathcal{A}^- := \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^-$  și fie  $\mathcal{A}_a$   $\mathcal{L}$ -extensia lui  $\mathcal{A}^-$  în care  $c$  este interpretat cu  $a$  (i.e.  $c^{\mathcal{A}_a} = a$ ).

Deoarece  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form_{\mathcal{L}^-}$ , rezultă din Propoziția 1.94 că pentru orice  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\mathcal{A} \models \gamma[e] \iff \mathcal{A}^- \models \gamma[e] \iff \mathcal{A}_a \models \gamma[e].$$



## Lema constantelor

### Lema constantelor 1.100

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj,  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$  și  $c$  un simbol de constantă din  $\mathcal{L}$  care nu apare în  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Atunci

$$\Gamma \models \varphi_x(c) \iff \Gamma \models \forall x \varphi.$$

**Dem.:** (continuare)

Așadar  $(\mathcal{A}_a, e)$  este model al lui  $\Gamma$  și deoarece  $\Gamma \models \varphi_x(c)$ , avem că

$$\mathcal{A}_a \models \varphi_x(c)[e].$$

Deoarece  $c^{\mathcal{A}_a} = a$ , putem aplica Lema 1.80.(ii) pentru a obține că

$$\mathcal{A}_a \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Aplicând din nou Propoziția 1.94, rezultă

$$\mathcal{A}_a \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A}^- \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Am demonstrat astfel că pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ , deci că  $(\mathcal{A}, e)$  este model al lui  $\forall x \varphi$ .



### Propoziția 1.101

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj finit. Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură finită  $\mathcal{A}$ , există un enunț  $\theta^{\mathcal{A}}$  care caracterizează  $\mathcal{A}$  până la izomorfism, i.e.: pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \models \theta^{\mathcal{A}}.$$

**Dem.: (Nu se cere la examen)** Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură finită cu  $n$  elemente  $a_1, \dots, a_n$ . Considerăm enunțul

$$\theta^{\mathcal{A}} := \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \wedge \forall y \left( \bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i \right) \wedge \bigwedge_{s \in \mathcal{L}} \varphi_s \right),$$

unde formula  $\varphi_s(x_1, \dots, x_n)$ , care descrie interpretarea simbolului  $s$  în  $\mathcal{A}$ , se definește astfel:



## Elementar echiv. $\Rightarrow$ izomorfism - structuri finite, $\mathcal{L}$ finit

(i) dacă  $s$  este un simbol de constantă  $c$  și  $c^A = a_i$ , atunci

$$\varphi_s := x_i = c.$$

(ii) dacă  $s$  este un simbol de relație  $R$  de aritate  $m$ , atunci

$$\varphi_s := \bigwedge_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \in R^A} Rx_{i_1} \dots x_{i_m} \wedge \bigwedge_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \notin R^A} \neg Rx_{i_1} \dots x_{i_m}.$$

(iii) dacă  $s$  este un simbol de operație  $f$  de aritate  $m$ , atunci

$$\varphi_s := \bigwedge_{f^A(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) = a_j} fx_{i_1} \dots x_{i_m} = x_j.$$

Fie  $\mathcal{B}$  o  $\mathcal{L}$ -structură. Atunci  $\mathcal{B}$  satisfacă  $\theta^A \iff$  există  $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$  a.î.

(i) pentru orice  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $b_i \neq b_j$  și pentru orice  $b \in \mathcal{B}$ ,  $b \in \{b_1, \dots, b_n\}$ . Prin urmare,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ .

(ii) pentru orice  $s \in \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B} \models \varphi_s[b_1, \dots, b_n]$   
 $\iff \mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  și funcția  $h : A \rightarrow B$ ,  $h(a_i) = b_i$  este izomorfism de la  $\mathcal{A}$  la  $\mathcal{B}$ .





*Elementar echiv.  $\Rightarrow$  izomorfism - structuri finite,  $\mathcal{L}$  finit*

### *Propoziția 1.102*

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj finit. Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structuri finite  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

**Dem.: Exercițiu ușor.**

### Teorema 1.103

Pentru orice limbaj  $\mathcal{L}$ , orice  $\mathcal{L}$ -structură finită  $\mathcal{A}$  și orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

**Dem.:** " $\Leftarrow$ " evidentă, conform Propoziției 1.58.

" $\Rightarrow$ " Presupunem prin reducere la absurd că  $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$ . Fie  $A = |\mathcal{A}|$ ,  $B = |\mathcal{B}|$  și  $n = |A|$ . Atunci  $\mathcal{A} \vDash \exists^{=n}$ , deci  $\mathcal{B} \vDash \exists^{=n}$ , deoarece  $\exists^{=n}$  este enunț și  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ . Deci,  $\mathcal{B}$  este finită, cu  $n$  elemente.

Rezultă că numărul funcțiilor bijective  $f : A \rightarrow B$  este finit.

Conform presupunerii, nicio bijecție  $f : A \rightarrow B$  nu este izomorfism, deci nu e homorfism. Așadar, pentru orice  $f$ , există un simbol  $S_f$  al lui  $\mathcal{L}$  a.î.  $f$  nu transportă interpretarea lui  $S_f$  de la  $\mathcal{A}$  la  $\mathcal{B}$ .

Fie  $\mathcal{L}^-$  sublimbajul finit al lui  $\mathcal{L}$  ale cărui simboluri ne-logice sunt exact aceste simboluri  $S_f$ . Notăm  $\mathcal{A}^- = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^-$ ,  $\mathcal{B}^- = \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}^-$ . E clar că  $\mathcal{A}^- \not\cong \mathcal{B}^-$ , deci că  $\mathcal{A}^- \not\cong \mathcal{B}^-$  (conform Propoziției 1.102) și că  $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$  (conform Corolarului 1.97.(ii)). Contradicție. □



Fie  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$  un limbaj de ordinul întâi,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  două  $\mathcal{L}$ -structuri,  $A = |\mathcal{A}|, B = |\mathcal{B}|$ .

### *Definiția 1.104*

Un homomorfism  $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  se numește **scufundare** dacă  $h$  este injectiv.

**Notație:**  $h : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{B}$ .

### *Propoziția 1.105*

O funcție  $h : A \rightarrow B$  este scufundare  $\iff h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  respectă toate formulele libere de cuantificatori.

**Dem.: Exercițiu.**

Fie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  două  $\mathcal{L}$ -structuri a.î.  $A \subseteq B$  și  $\iota_{A,B} : A \rightarrow B$ ,  $\iota(a) = a$  injecția canonică.

### Definiția 1.106

Spunem că  $\mathcal{A}$  este **substructură** a lui  $\mathcal{B}$  sau că  $\mathcal{B}$  este **extensie** a lui  $\mathcal{A}$  dacă  $\iota_{A,B}$  este scufundare.

**Notație:**  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ .

Prin urmare,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff$

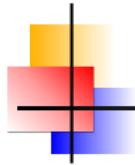
(i) pentru orice  $m \geq 1$ ,  $R \in \mathcal{R}_m$  și orice elemente  $a_1, \dots, a_m \in A$ ,

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) \iff R^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m)$$

(ii) pentru orice  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$  și orice elemente  $a_1, \dots, a_m \in A$ ,

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m)$$

(iii) pentru orice  $c \in \mathcal{C}$ ,  $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$ .



## *Substructuri*

### *Exemplu*

$\mathcal{L} = (R)$ , unde  $R$  simbol de relație binară. Atunci  $(\mathbb{N}, <)$  este substructură a lui  $(\mathbb{Z}, <)$ , dar nu este substructură a lui  $(\mathbb{Z}, \leq)$ .

Fie  $f : M^n \rightarrow M$  și  $\emptyset \neq S \subseteq M$ . Spunem că  $S$  este **închisă la  $f$**  dacă pentru orice  $a_1, \dots, a_n \in S$ ,  $f(a_1, \dots, a_n) \in S$ .

### Propoziția 1.107

Fie  $\mathcal{B}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $\emptyset \neq X \subseteq |\mathcal{B}|$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $X$  este domeniul unei substructuri (unice) a lui  $\mathcal{B}$ ;
- (ii)  $X$  este închisă la  $f^{\mathcal{B}}$  pentru orice  $f \in \mathcal{F}$  și  $c^{\mathcal{B}} \in X$  pentru orice  $c \in \mathcal{C}$ .

**Dem.**: Exercițiu ușor.

### Corolarul 1.108

Dacă  $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$ , atunci orice submulțime nevidă a lui  $|\mathcal{B}|$  este domeniul unei substructuri unice a lui  $\mathcal{B}$ .

Dacă o submulțime  $X$  a lui  $|\mathcal{B}|$  nu satisface condiția (ii) din Propoziția 1.107, atunci  $X$  nu este domeniul unei substructuri a lui  $\mathcal{B}$ , dar există o submulțime a lui  $|\mathcal{B}|$  care conține pe  $X$  și care este domeniul unei substructuri a lui  $\mathcal{B}$ .

### Propoziția 1.109

Fie  $\mathcal{B}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $X \subseteq |\mathcal{B}|$ . Dacă  $X \neq \emptyset$  sau  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , atunci există o substructură  $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$  a lui  $\mathcal{B}$  cu următoarele proprietăți:

- (i)  $X \subseteq |\langle X \rangle_{\mathcal{B}}|$ .
- (ii)  $\langle X \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$  pentru orice substructură  $\mathcal{D}$  a lui  $\mathcal{B}$  a.î.  $X \subseteq |\mathcal{D}|$ .

**Dem.:** Definim:

$$\begin{aligned} A_0 &= X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset \\ A_{n+1} &= A_n \cup \{f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m) \mid m \geq 1, f \in \mathcal{F}_m, a_1, \dots, a_m \in A_n\} \\ A &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

### Propoziția 1.109

Fie  $\mathcal{B}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $X \subseteq |\mathcal{B}|$ . Dacă  $X \neq \emptyset$  sau  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , atunci există o substructură  $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$  a lui  $\mathcal{B}$  cu următoarele proprietăți:

- (i)  $X \subseteq |\langle X \rangle_{\mathcal{B}}|$ .
- (ii)  $\langle X \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$  pentru orice substructură  $\mathcal{D}$  a lui  $\mathcal{B}$  a.î.  $X \subseteq |\mathcal{D}|$ .

**Dem.:** (continuare) Se verifică ușor că  $A$  este cea mai mică mulțime care conține  $X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}\}$  și este închisă la toate funcțiile  $f^{\mathcal{B}}$  pentru  $f \in \mathcal{F}$ . Atunci  $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$  este unica substructură a lui  $\mathcal{B}$  cu domeniul  $A$ . □

### Definiția 1.110

$\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$  se numește substructura lui  $\mathcal{B}$  **generată** de  $X$ .

### Observația 1.111

Dacă  $X$  este cel mult numărabilă și  $\mathcal{L}$  este cel mult numărabil, atunci și  $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$  este cel mult numărabilă.



### Propoziția 1.112

Fie  $\mathcal{B}$  o  $\mathcal{L}$ -structură. Dacă  $\mathcal{L}$  are cel puțin un simbol de constantă, atunci

$$|\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{B}}| = \{t^{\mathcal{B}} \mid t \text{ este termen închis al lui } \mathcal{L}\}.$$

**Dem.: Exercițiu.**

### Exemple

- ▶  $\mathcal{L} = (\dot{S}, \dot{0})$ ,  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, S, 0)$ . Atunci  $|\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{N}}| = \mathbb{N}$ , deci  $\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$ .
- ▶  $\mathcal{L} = (\dot{0})$ ,  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0)$ . Atunci  $\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{N}} = (\{0\}, 0)$ .

Fie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  două  $\mathcal{L}$ -structuri.

### Propoziția 1.113

Presupunem că  $A \subseteq B$ . Atunci  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff$  pentru orice formulă liberă de cuantificatori  $\varphi$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

**Dem.**: Exercițiu.

### Definiția 1.114

Spunem că  $\mathcal{A}$  este **substructură elementară** a lui  $\mathcal{B}$  sau că  $\mathcal{B}$  este **extensie elementară** a lui  $\mathcal{A}$  dacă

- (i)  $A \subseteq B$ ;
- (ii) pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

**Notăție:**  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .



## Substructuri elementare

### Propoziția 1.115

Dacă  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ , atunci  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  și  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

**Dem.**: Exercițiu ușor.

### Exemplu

Fie  $\mathcal{L} = (\dot{\leq})$ ,  $\mathcal{A} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$  și  $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, \leq)$ . Atunci  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  și  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  (de ce?), dar  $\mathcal{A} \not\prec \mathcal{B}$ .

Considerăm formula  $\varphi = \forall y(x \dot{\leq} y)$ . Atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[1], \text{ dar } \mathcal{B} \not\vDash \varphi[1].$$

i.e. 1 este cel mai mic element în  $\mathcal{A}$ , dar nu în  $\mathcal{B}$ .

Considerăm formula  $\psi = \exists y(y \dot{\leq} x \wedge \neg(x = y))$ . Atunci

$$\mathcal{B} \vDash \psi[1], \text{ dar } \mathcal{A} \not\vDash \psi[1].$$

i.e. 1 are un predecesor în  $\mathcal{B}$ , dar nu în  $\mathcal{A}$ .

Următorul rezultat este un instrument foarte util pentru a demonstra că o substructură este elementară.

### *Propoziția 1.116 (Criteriul lui Tarski)*

Presupunem că  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  și că pentru orice formulă  $\varphi$ , orice evaluare  $e : V \rightarrow A$  și orice variabilă  $x$ ,

$$\mathcal{B} \models \exists x \varphi[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{B} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Atunci  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

**Dem.:** Demonstrăm prin inducție după formule că pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$(*) \quad \text{pentru orice evaluare } e : V \rightarrow A, \quad \mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

Avem următoarele cazuri:

- $\varphi$  este formulă atomică. Atunci (\*) rezultă din faptul că  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  și Propoziția 1.113.
- Pașii de inducție pentru  $\neg$  și  $\rightarrow$  sunt imediați.

### Propoziția 1.116 (Criteriul lui Tarski)

Presupunem că  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  și că pentru orice formulă  $\varphi$ , orice evaluare  $e : V \rightarrow A$  și orice variabilă  $x$ ,

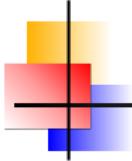
$$\mathcal{B} \models \exists x \varphi[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{B} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Atunci  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

**Dem.:** (continuare) •  $\varphi = \forall x \psi$ . Atunci  $\varphi \vdash \neg \exists x \neg \psi$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{B} \models \neg \exists x \neg \psi[e] \iff \mathcal{B} \not\models \exists x \neg \psi[e] \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{B} \not\models \neg \psi[e_{x \leftarrow a}] \text{ din ipoteză} \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{B} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \\
 &\quad \text{din ipoteza de inducție} \\
 &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e].
 \end{aligned}$$





## *Teorema Löwenheim-Skolem în jos*

Putem enunță acum unul din rezultatele centrale ale teoriei modelelor.

### *Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117*

Pentru orice limbaj cel mult numărabil  $\mathcal{L}$ , orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{B}$  și orice submulțime cel mult numărabilă  $X \subseteq B$ , există o  $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă  $\mathcal{A}$  a.î.  $X \subseteq A$  și  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

### *Corolarul 1.118*

Pentru orice limbaj cel mult numărabil  $\mathcal{L}$  și orice mulțime  $\Gamma$  de enunțuri, dacă  $\Gamma$  are un model, atunci  $\Gamma$  are un model cel mult numărabil.

**Dem.: Exercițiu.**



## Teorema Löwenheim-Skolem în jos

### Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117

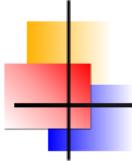
Pentru orice limbaj cel mult numărabil  $\mathcal{L}$ , orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{B}$  și orice submulțime cel mult numărabilă  $X \subseteq B$ , există o  $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă  $\mathcal{A}$  a.î.  $X \subseteq A$  și  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

**Dem.**: Pentru orice formulă  $\varphi$  și variabilă  $y$  definim o **constantă/funcție Skolem**  $F_{\varphi,y}$ .

Dacă formula  $\exists y\varphi$  este enunț, atunci  $F_{\varphi,y}$  este un element al lui  $B$  definit astfel:

- ▶ Dacă  $\mathcal{B} \models \exists y\varphi$ , atunci mulțimea  $S_1 := \{b \in B \mid \mathcal{B} \models \varphi[b]\}$  este nevidă.  $F_{\varphi,y}$  este un element arbitrar al lui  $S_1$ .
- ▶ Dacă  $\mathcal{B} \not\models \exists y\varphi$ , atunci  $F_{\varphi,y}$  este un element arbitrar al lui  $B$ .

Ca urmare,  $\mathcal{B} \models \exists y\varphi \implies \mathcal{B} \models \varphi[F_{\varphi,y}]$ .



## Teorema Löwenheim-Skolem în jos

### Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117

Pentru orice limbaj cel mult numărabil  $\mathcal{L}$ , orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{B}$  și orice submulțime cel mult numărabilă  $X \subseteq B$ , există o  $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă  $\mathcal{A}$  a.î.  $X \subseteq A$  și  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

**Dem.: (continuare)** Dacă  $FV(\exists y\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $k \geq 1$ , atunci definim  $F_{\varphi,y} : B^k \rightarrow B$  astfel: pentru orice  $b_1, \dots, b_k \in B$ ,

- ▶ Dacă  $\mathcal{B} \models \exists y\varphi[b_1, \dots, b_k]$ , atunci mulțimea  $S_2 := \{b \in B \mid \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k, b]\}$  este nevidă.  
 $F_{\varphi,y}(b_1, \dots, b_k)$  este un element arbitrar al lui  $S_2$ .
- ▶ Dacă  $\mathcal{B} \not\models \exists y\varphi[b_1, \dots, b_k]$ , atunci  $F_{\varphi,y}(b_1, \dots, b_k)$  este un element arbitrar al lui  $B$ .

Ca urmare,

$$\mathcal{B} \models \exists y\varphi[b_1, \dots, b_k] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k, F_{\varphi,y}(b_1, \dots, b_k)].$$



## Teorema Löwenheim-Skolem în jos

### Teorema Löwenheim-Skolem în jos 1.117

Pentru orice limbaj cel mult numărabil  $\mathcal{L}$ , orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{B}$  și orice submulțime cel mult numărabilă  $X \subseteq B$ , există o  $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă  $\mathcal{A}$  a.î.  $X \subseteq A$  și  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

**Dem.:** (continuare) Extindem construcția lui  $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$  (a se vedea Propoziția 1.109) închizând-o și la constantele și funcțiile Skolem. Așadar, fie  $A$  cea mai mică submulțime a lui  $B$  care:

- ▶ conține  $X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}\} \cup \{F_{\varphi,y} \mid \exists y \varphi \text{ enunț}\}$ ;
- ▶ este închisă la  $f^{\mathcal{B}}$  pentru orice  $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ ;
- ▶ este închisă la funcțiile Skolem  $F_{\varphi,y}$ , când  $\exists y \varphi$  nu este enunț.

Obținem că  $A$  este domeniul unei substructuri unice  $\mathcal{A}$  a lui  $\mathcal{B}$ .

Deoarece  $\mathcal{L}$  este cel mult numărabil,  $A$  este cel mult numărabilă.

Aplicând Criteriul lui Tarski 1.116, rezultă imediat că  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ . □

**Skolemizarea** este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducere de noi simboluri de funcții/constante, numite **simboluri de funcții/constante Skolem**.

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi și  $\varphi$  un enunț al lui  $\mathcal{L}$  care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \theta,$$

unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  sunt variabile distințte două către două și  $\theta$  este formulă liberă de cuantificatori.



## Forma normală Skolem

Asociem lui  $\varphi$  un enunț universal  $\varphi^{Sk}$  într-un limbaj extins  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ : Dacă  $\varphi$  este liberă de cuantificatori sau universală, atunci  $\varphi^{Sk} = \varphi$  și  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$ .

Altfel,  $\varphi$  are una din formele:

- ▶  $\varphi = \exists x \psi$ . Introducem un nou simbol de constantă  $c$  și considerăm  $\varphi^1 = \psi_x(c)$ ,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$ .
- ▶  $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$  ( $k \geq 1$ ). Introducem un nou simbol de funcție  $f$  de aritate  $k$  și considerăm  
 $\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi_x(fx_1 \dots x_k)$ ,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$ .

În ambele cazuri,  $\varphi^1$  are cu un cuantificator existențial mai puțin decât  $\varphi$ .

Dacă  $\varphi^1$  este liberă de cuantificatori sau universală, atunci  $\varphi^{Sk} = \varphi^1$ . Dacă  $\varphi^1$  nu este universală, atunci formăm  $\varphi^2, \varphi^3, \dots$ , până ajungem la o formulă universală și aceasta este  $\varphi^{Sk}$ .

$\varphi^{Sk}$  este o **formă normală Skolem** a lui  $\varphi$ .



### Exemple

- ▶ Fie  $\theta$  o formulă liberă de cuantificatori a.î.  $FV(\theta) = \{x\}$  și  $\varphi = \exists x \theta$ . Atunci  $\varphi^1 = \theta_x(c)$ , unde  $c$  este un nou simbol de constantă. Deoarece  $\varphi^1$  este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că  $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$ .
- ▶ Fie  $R$  un simbol de relație de aritate 3 și  $\varphi = \exists x \forall y \forall z R(x, y, z)$ . Atunci
$$\varphi^1 = \forall y \forall z (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z R(c, y, z),$$
unde  $c$  este un nou simbol de constantă. Deoarece  $\varphi^1$  este un enunț universal, rezultă că  $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z P(c, y, z)$ .
- ▶ Fie  $P$  un simbol de relație de aritate 2 și  $\varphi = \forall y \exists z P(y, z)$ . Atunci  $\varphi^1 = \forall y (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y P(y, f(y))$ , unde  $f$  este un simbol nou de funcție unară. Deoarece  $\varphi^1$  este un enunț universal, rezultă că  $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y P(y, f(y))$ .

### Exemplu

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj care conține un simbol de relație binară  $R$  și un simbol de funcție unară  $f$ . Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\ &= \forall y \forall u \exists v (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v),\end{aligned}$$

unde  $g$  este un nou simbol de funcție unară

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y, u)) \\ &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)),\end{aligned}$$

unde  $h$  este un nou simbol de funcție binară.

Deoarece  $\varphi^2$  este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)).$$

### Propoziția 1.118

- (i)  $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$ , deci  $\varphi^{Sk} \models \varphi$  în  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ .
- (ii) În general,  $\varphi$  și  $\varphi^{sk}$  nu sunt logic echivalente ca enunțuri în  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ .

**Dem.:**

- (i) Se aplică faptul că  $\models \varphi_x(t) \rightarrow \exists x\varphi$ ,  $\models \varphi$  implică  $\models \forall x\varphi$  și  $\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$  pentru a conduce că  $\models \varphi^1 \rightarrow \varphi$ ,  $\models \varphi^2 \rightarrow \varphi^1$ , etc..
- (ii) Fie  $\mathcal{L} = (R)$ , unde  $R$  este simbol de relație binară și  $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$ . Atunci  $\varphi^{Sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$  (unde  $f$  este un nou simbol de funcție unară) și  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = (f, R)$ . Fie  $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ -structura  $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$ , unde  $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ . Atunci  $\mathcal{A} \models \varphi$ , deoarece pentru orice număr întreg  $m$  există un număr întreg  $n$  a.î.  $m < n$ . Pe de altă parte,  $\mathcal{A} \not\models \varphi^{Sk}$ , deoarece pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ , avem că  $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ .



Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi.

### Definiția 1.119

Pentru orice variabilă  $y$  și orice formulă  $\psi$  a.î.  $\exists y\psi$  este enunț, fie  $c_{y,\psi}$  un nou simbol de constantă.

$c_{y,\psi}$  se numește **simbol de constantă Skolem** asociat perechii  $(y, \psi)$ .

Pentru orice variabilă  $y$  și orice formulă  $\psi$  a.î.

$FV(\exists y\psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$  ( $n \geq 1$ ), fie  $f_{y,\psi}$  un nou simbol de funcție de aritate  $n$ .

$f_{y,\psi}$  se numește **simbol de funcție Skolem** asociat perechii  $(y, \psi)$ .

### Notăție

Notăm cu  $\mathcal{L}^+$  extensia lui  $\mathcal{L}$  obținută adăugând toate aceste simboluri de constante și funcții Skolem.  $\mathcal{L}^+$  se numește **extensie Skolem primitivă** a lui  $\mathcal{L}$ .

Orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  se extinde la o  $\mathcal{L}^+$ -structură  $\mathcal{A}^+$  astfel: Fie  $y$  o variabilă și  $\psi$  o formulă.

- ▶ Dacă  $\exists y\psi$  este un enunț, atunci  $c_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}$  se definește astfel:
  - ▶  $c_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}$  este un element  $b \in A$  a.î.  $\mathcal{A} \models \psi[b]$ , dacă un astfel de  $b$  există.
  - ▶  $c_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}$  este un element arbitrar al lui  $A$ , altfel.

Prin urmare,

$$\mathcal{A}^+ \models \exists y\psi \rightarrow \psi_y(c_{y,\psi}).$$

- ▶ Dacă  $FV(\exists y\psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$  ( $n \geq 1$ ), atunci  $f_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+} : A^n \rightarrow A$  se definește astfel: pentru orice  $b_1, \dots, b_n \in A$ ,
  - ▶  $f_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}(b_1, \dots, b_n)$  este un element  $b \in A$  a.î.  $\mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n, b]$ , dacă un astfel de  $b$  există.
  - ▶  $f_{y,\psi}^{\mathcal{A}^+}(b_1, \dots, b_n)$  este un element arbitrar al lui  $A$ , altfel.

Prin urmare,

$$\mathcal{A}^+ \models \exists y\psi \rightarrow \psi_y(f_{y,\psi}(x_1, \dots, x_n)).$$

Fie  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$  un limbaj de ordinul întâi.

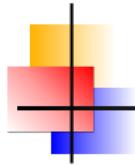
### Definiția 1.120

Un limbaj  $\mathcal{L}' = (\mathcal{R}, \mathcal{F}', \mathcal{C}')$  de ordinul întâi se numește **extensie Skolem** a lui  $\mathcal{L}$  dacă există un sir de limbaje  $\mathcal{L}_n = (\mathcal{R}, \mathcal{F}_n, \mathcal{C}_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) a.î.  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}_{n+1}$  este o extensie Skolem primitivă a lui  $\mathcal{L}_n$  și  $\mathcal{F}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i$ ,  $\mathcal{C}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$ .

### Definiția 1.121

Fie  $\mathcal{L}'$  o extensie Skolem a lui  $\mathcal{L}$ . **Mulțimea Skolem**  $Sk_{\mathcal{L}', \mathcal{L}}$  a lui  $\mathcal{L}'$  peste  $\mathcal{L}$  este mulțimea tuturor formulelor

$$\begin{aligned} Sk_{\mathcal{L}', \mathcal{L}} = & \{ \exists y \psi \rightarrow \psi_y(c_{y,\psi}) \mid \exists y \psi \text{ este enunț} \} \bigcup \\ & \{ \exists y \psi \rightarrow \psi_y(f_{y,\psi}(x_1, \dots, x_n)) \mid FV(\exists y \psi) = \{x_1, \dots, x_n\} \}. \end{aligned}$$



## *Extensii Skolem*

### *Propoziția 1.122*

- ▶ Orice limbaj  $\mathcal{L}$  are o extensie Skolem.
- ▶ Dacă  $\mathcal{L}'$  este o extensie Skolem a lui  $\mathcal{L}$ , atunci orice  $\mathcal{L}$ -structură poate fi extinsă la un model al mulțimii Skolem  $\mathcal{S}k_{\mathcal{L}', \mathcal{L}}$  a lui  $\mathcal{L}'$  peste  $\mathcal{L}$ .



## Forma normală Skolem

### Definiția 1.123

Fie  $\varphi$  un enunț al lui  $\mathcal{L}$ . O **formă normală Skolem** a lui  $\varphi$  este un enunț  $\varphi^{Sk}$  într-un limbaj extins  $\mathcal{L}^{Sk}$  definită astfel:  $\varphi^{Sk}$  este o formă normală Skolem a lui  $\varphi^*$ , unde  $\varphi^*$  este un enunț în formă normală prenex a.î.  $\varphi \models \varphi^*$  (care există conform Teoremei 1.98).

### Definiția 1.124

Fie  $T$  o  $\mathcal{L}$ -teorie,  $\mathcal{L}'$  o extensie a lui  $\mathcal{L}$  și  $T'$  o  $\mathcal{L}'$ -teorie. Spunem că

- (i)  $T'$  este **extensie** a lui  $T$  dacă  $T \subseteq T'$ .
- (ii)  $T'$  este **extensie conservativă** a lui  $T$  dacă  $T'$  este extensie a lui  $T$  și  $T = T' \cap \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ .

### Teorema de formă normală Skolem 1.125

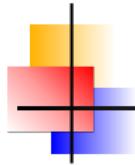
Fie  $\mathcal{L}'$  o extensie Skolem a lui  $\mathcal{L}$  și  $\varphi$  un enunț în formă normală prenex.

- (i)  $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$ .
- (ii) Dacă  $\mathcal{A}'$  este un model al mulțimii Skolem  $Sk_{\mathcal{L}', \mathcal{L}}$  a lui  $\mathcal{L}'$  peste  $\mathcal{L}$ , atunci  $\mathcal{A}' \models \varphi \rightarrow \varphi^{Sk}$ .
- (iii) Fie  $T$  o  $\mathcal{L}$ -teorie și  $T^{Sk}$   $\mathcal{L}'$ -teoria generată de  $\{\varphi^{Sk} \mid \varphi \in T\}$ .
  - (a) Dacă  $\mathcal{A}$  este model al lui  $T$  și  $\mathcal{A}'$  este o extensie a lui  $\mathcal{A}$  la un model al mulțimii Skolem  $Sk_{\mathcal{L}', \mathcal{L}}$ , atunci  $\mathcal{A}'$  este model al lui  $T^{Sk}$ .
  - (b) Dacă  $\mathcal{A}'$  este model al lui  $T^{Sk}$ , atunci  $\mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L}$  este model al lui  $T$ .
  - (c)  $T^{Sk}$  este extensie conservativă a lui  $T$ .

(iv)  $\varphi$  este satisfiabilă dacă  $\varphi^{Sk}$  este satisfiabilă.

**Dem.:** (i) a fost deja demonstrat. (ii) se demonstrează similar.

- (iii).(a) Fie  $\varphi \in T$ . Aplicăm (ii) pentru a conduce că  $\mathcal{A}' \models \varphi \rightarrow \varphi^{sk}$ . Deoarece  $\mathcal{A}' \models \varphi$ , rezultă că  $\mathcal{A}' \models \varphi^{sk}$ .
- (iii).(b) Se aplică (i).
- (iii).(c) Fie  $\varphi \in T$  și  $\mathcal{A}'$  un model al lui  $T^{Sk}$ . Conform (iii).(b),  $\mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L}$  este model al lui  $T$ , deci  $\mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L} \models \varphi$ . Obținem că  $\mathcal{A}' \models \varphi$ . Așadar,  $T^{Sk} \models \varphi$ , prin urmare  $\varphi \in T^{Sk}$ , deoarece  $T^{Sk}$  este teorie. Am demonstrat că  $T \subseteq T^{Sk} \cap \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ .
- Fie acum  $\varphi \in T^{Sk} \cap \text{Sen}_{\mathcal{L}}$  și  $\mathcal{A}$  un model al lui  $T$ . Aplicând Propoziția 1.122, obținem o extensie  $\mathcal{A}'$  a lui  $\mathcal{A}$  care este model al mulțimii Skolem  $Sk_{\mathcal{L}', \mathcal{L}}$  a lui  $\mathcal{L}'$  peste  $\mathcal{L}$ . Conform (iii).(a),  $\mathcal{A}'$  este model al lui  $T^{Sk}$ , deci  $\mathcal{A}' \models \varphi$ . Rezultă că  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Așadar,  $T \models \varphi$ , prin urmare  $\varphi \in T$ .



## Forma normală Skolem

(iv) " $\Leftarrow$ " Se aplică (i).

" $\Rightarrow$ " Fie  $\mathcal{A}$  un model al lui  $\varphi$ . Aplicând Propoziția 1.122, obținem o extensie  $\mathcal{A}'$  a lui  $\mathcal{A}$  care este model al mulțimii Skolem  $Sk_{\mathcal{L}', \mathcal{L}}$  a lui  $\mathcal{L}'$  peste  $\mathcal{L}$ . Aplicând (iii).(a) cu  $T$  fiind teoria generată de  $\{\varphi\}$ , rezultă că  $\mathcal{A}' \models \varphi^{Sk}$ . □



## *Teorema de compacitate*

### *Teorema de compacitate 1.126*

O mulțime de enunțuri  $\Gamma$  este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- ▶ unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi



## Teorema de compacitate - aplicații

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi.

### Propoziția 1.127

Clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri  $\Gamma$  astfel încât

(\*) pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$  este finită.

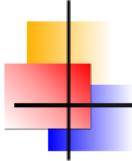
**Dem.:** Presupunem prin reducere la absurd că există  $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$  a.î. (\*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că  $\Delta$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie  $\Delta_0$  o submulțime finită a lui  $\Delta$ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură finită a.î.  $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . Atunci  $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$  pentru orice  $i = 1, \dots, k$  și  $\mathcal{A} \models \Gamma$  deoarece  $\mathcal{A}$  este finită.



## Teorema de compacitate - aplicații

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model  $\mathcal{B}$ .

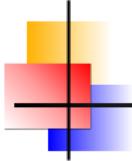
Deoarece  $\mathcal{B} \models \Gamma$ ,  $\mathcal{B}$  este finită.

Deoarece  $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$ , rezultă că  $\mathcal{B}$  este infinită.

Am obținut o contradicție. □

### Corolarul 1.128

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_=$ .



## *Teorema de compacitate - aplicații*

### *Propoziția 1.129*

Clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

**Dem.:** Notăm cu  $\mathcal{K}_{Inf}$  clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor infinite.

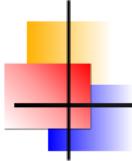
Conform Propoziției 1.50, pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.



## Teorema de compacitate - aplicații

Presupunem că  $\mathcal{K}_{Inf}$  este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie  $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ . Atunci  $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$ .

Rezultă că pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 1.127 □.

### Corolarul 1.130

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_=$ .

### Propoziția 1.131

Fie  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}$  cu proprietatea

(\*) pentru orice  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  are un model finit de cardinal  $\geq m$ .

Atunci  $\Gamma$  are un model infinit.

**Dem.:** Fie

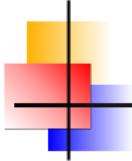
$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că  $\Delta$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie  $\Delta_0$  o submulțime finită a lui  $\Delta$ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie  $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . Conform (\*),  $\Gamma$  are un model finit  $\mathcal{A}$  a.î.  $|\mathcal{A}| \geq m$ . Atunci  $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ , deci  $\mathcal{A} \models \Delta_0$ .

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că  $\Delta$  are un model  $\mathcal{B}$ . Prin urmare,  $\mathcal{B}$  este un model infinit al lui  $\Gamma$ . □



## Teorema de compacitate - aplicații

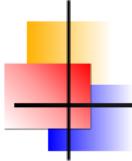
### Propoziția 1.132

Dacă un enunț  $\varphi$  este adevărat în orice  $\mathcal{L}$ -structură infinită, atunci există  $m \in \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $\varphi$  este adevărat în orice  $\mathcal{L}$ -structură finită de cardinal  $\geq m$ .

**Dem.:** Presupunem că nu e adevărat. Fie  $\Gamma := \{\neg\varphi\}$ . Atunci pentru orice  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  are un model finit de cardinal  $\geq m$ .

Aplicând Propoziția 1.131, rezultă că  $\Gamma$  are un model infinit  $\mathcal{A}$ . Prin urmare,  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , ceea ce contrazice ipoteza.





## *Teorema de compacitate - aplicații*

### *Propoziția 1.133*

Fie  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(\*) pentru orice  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  are un model finit de cardinal  $\geq m$ .

Atunci

- (i)  $\Gamma$  are un model infinit.
- (ii) Clasa modelelor finite ale lui  $\Gamma$  nu este axiomatizabilă.
- (iii) Clasa modelelor infinite ale lui  $\Gamma$  este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

**Dem.: Exercițiu.**

Considerăm limbajul  $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ , unde  $\dot{+}$ ,  $\dot{\times}$  sunt simboluri de operații binare,  $\dot{S}$  este simbol de operație unară și  $\dot{0}$  este simbol de constantă.

Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , definim prin inducție  $\mathcal{L}$ -termenul  $\Delta(n)$  astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n + 1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie  $\mathcal{L}$ -structura  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$ . Atunci  $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Prin urmare,  $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

### Definiția 1.134

O  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  se numește **non-standard** dacă există  $a \in A$  a.î.  $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Un astfel de element  $a$  se numește **element non-standard**.

### Teorema 1.135

Există un model non-standard al teoriei  $Th(\mathcal{N})$ .

**Dem.:** Fie  $c$  un simbol de constantă nou,  $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$  și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că  $\Gamma$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie  $\Gamma_0$  o submulțime finită a lui  $\Gamma$ ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \dots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Fie  $n_0 > \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . Considerăm  $\mathcal{L}^+$ -extensia  $\mathcal{N}^+$  a lui  $\mathcal{N}$  definită astfel:  $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$ . Atunci  $\mathcal{N}^+ \models \Gamma_0$ .

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că  $\Gamma$  are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că  $a := c^{\mathcal{A}}$  este element non-standard al lui  $\mathcal{A}$ . □



## *Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate*

### *Definiția 1.136*

Fie  $A$  o mulțime nevidă. O relație de **bună ordonare** pe  $A$  este o relație de ordine totală  $<$  pe  $A$  cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui  $A$  are minim.

Spunem că  $(A, <)$  este mulțime **bine ordonată**.

### *Exemple*

$(\mathbb{N}, <)$  este bine ordonată, dar  $(\mathbb{Z}, <)$  nu este bine ordonată.

### Propoziția 1.137

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_{\prec}$ .

**Dem.**: Fie  $\mathcal{K}$  clasa  $\mathcal{L}_{\prec}$ -structurilor  $\mathcal{A} = (A, \prec)$  a.î.  $(A, \prec)$  este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că  $\mathcal{K}$  este axiomatizabilă, deci că există  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}_{\prec}$  a.î.  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$ .

Fie  $\mathcal{L}$  extensia lui  $\mathcal{L}_{\prec}$  obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă  $c_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{\prec} c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}.$$

Demonstrăm că  $\Delta$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie  $\Delta_0$  o submulțime finită a lui  $\Delta$ . Atunci

$$\begin{aligned}\Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{\prec} c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{\prec} c_n \mid n = 0, \dots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$



## Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Fie  $(A, <)$  o mulțime infinită bine ordonată. Definim

$$a_{M+1} := \min A, a_M := \min A \setminus \{a_{M+1}\}, \dots,$$

$$a_0 := \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \dots, a_1\}. \text{ Atunci } a_{M+1} < a_M < \dots < a_0.$$

Fie  $\mathcal{A}^+$  extensia lui  $\mathcal{A} = (A, <)$  la  $\mathcal{L}$  obținută astfel:

$$c_0^{\mathcal{A}^+} = a_0, \dots, c_{M+1}^{\mathcal{A}^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{\mathcal{A}^+} \text{ arbitrar pentru } n > M + 1.$$

Atunci  $\mathcal{A}^+ \models \Delta_0$ .

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model  $\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$  (deci  $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ).

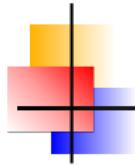
Deoarece  $\mathcal{B}^+ \models \Gamma$ , rezultă că  $(B, <)$  este bine ordonată.

Deoarece  $\mathcal{B}^+ \models \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  rezultă că  $b_{n+1} < b_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Prin urmare, submulțimea nevidă

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Am obținut o contradicție.





## Teoria Ramsey

Teoria Ramsey este o ramură a combinatoricii, a cărei temă principală este:

"Complete disorder is impossible." (T.S. Motzkin)

O structură mare, oricât de haotică ar fi, conține substructuri cu regularități.

### Problemă tipică

O anumită structură este partaționată într-un număr finit de clase. Ce tip de substructură rămâne intactă în cel puțin una din clase?

- ▶ Rezultatele din teoria Ramsey sunt foarte puternice, deoarece ele sunt generale, se obțin presupunând ipoteze foarte slabe.
- ▶ **Graham, Rothschild, Sperner**, Ramsey Theory, 1990.

Se dă o mulțime  $X$  și o colecție  $\mathcal{G}$  de submulțimi **bune** ale lui  $X$ . Fie  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$ .

### Definiția 1.138

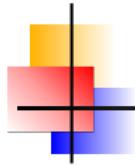
O  **$r$ -colorare** a lui  $X$  este o funcție  $c : X \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ . Pentru  $x \in X$ ,  $c(x)$  este **culoarea** lui  $x$ . O submulțime  $A \subseteq X$  se numește **monocromatică** dacă toate elementele din  $A$  au aceeași culoare.

### Definiția 1.139

O familie de mulțimi  $C_1, \dots, C_r$  se numește **partiție** a lui  $X$  dacă  $X = \bigcup_{i=1}^r C_i$  și  $C_i \cap C_j = \emptyset$  pentru orice  $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ .

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- ▶ Pentru orice partiție  $X = \bigcup_{i=1}^r C_i$  a lui  $X$ , există  $i \in \{1, \dots, r\}$  și  $G \in \mathcal{G}$  a.î.  $G \subseteq C_i$ .
- ▶ Pentru orice  $r$ -colorare a lui  $X$  există o mulțime  $G \in \mathcal{G}$  monocromatică.



## Teoria Ramsey

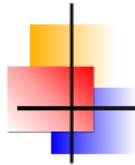
### Teorema Schur (1916)

Fie  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  și  $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^r C_i$  o partiție a lui  $\mathbb{N}$ . Atunci există  $i \in \{1, \dots, r\}$  a.î.

$$\{x, y, x + y\} \subseteq C_i \quad \text{pentru } x, y \in \mathbb{N}.$$

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \{x, y, x + y \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Versiunea cu colorări: Pentru orice  $r$ -colorare a lui  $\mathbb{N}$  există  $x, y \in \mathbb{N}$  a.î. mulțimea  $\{x, y, x + y\}$  este monocromatică.



## Teoria Ramsey

### Teorema van der Waerden (1927)

Fie  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  și  $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^r C_i$  o partiție a lui  $\mathbb{N}$ . Pentru orice  $k \in \mathbb{N}$  există  $i \in \{1, \dots, r\}$  a.î.  $C_i$  conține progresii aritmetice de lungime  $k$ .

- ▶ rezultat central în teoria Ramsey
- ▶ una din cele **trei perle în teoria numerelor Khintchin** (1948)
- ▶ demonstrație combinatorială prin inducție dublă după  $r$  și  $k$ .

$X = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} =$  mulțimea progresiilor aritmetice de lungime  $k$ .

Versiunea cu colorări: Orice colorare finită a lui  $\mathbb{N}$  conține progresii aritmetice monocromatice de lungime finită arbitrară.