FMI, Info, Master I
Semestrul II, 2017
Teoria modelelor

Seminar 1

(S1.1) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

(i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, şi $t = \dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \to \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$.

(ii) Fie $\varphi = x\dot{<}\dot{S}y \to (x\dot{<}y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

(S1.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3\dot{<}v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Notaţie 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice $e : V \to A$ şi orice $a, b \in A$, avem că:*

$$(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a} = (e_{x\leftarrow a})_{y\leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}$. Aşadar,

$$e_{x\leftarrow a,y\leftarrow b} : V \to A, \quad e_{x\leftarrow a,y\leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ şi } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S1.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\neg\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \forall x\neg\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(iii) $\exists y\forall x\varphi \vDash \forall x\exists y\varphi$;

(iv) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vDash \forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi$.

(S1.4) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \nvDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;

(ii) $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \nvDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

(iii) $\forall x\exists y\varphi \nvDash \exists y\forall x\varphi$.