FMI, Info, Master I
Semestrul II, 2017
Teoria modelelor

Seminar 2

(S2.1) Să se axiomatizeze:

(i) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element minimal;

(ii) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element maximal;

(iii) clasa mulţimilor strict ordonate cu proprietatea că orice element are un unic succesor.

Demonstraţie: Folosim notaţiile din curs. Se ia $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<})$. Teoria mulţimilor strict ordonate este este $Th((IREFL), (TRANZ)$. Clasa de mulţimi strict ordonate care trebuie axiomatizată se notează $\mathcal{K}$.

(i) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MINIMAL)))$, unde

$$(MINIMAL): \quad \exists x \forall y \, \neg(y \dot{<} x)$$

(ii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MAXIMAL)))$, unde

$$(MAXIMAL): \quad \exists x \forall y \, \neg(x \dot{<} y)$$

(iii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (SUCC)))$, unde

$$(SUCC): \quad \forall x \exists y (x \dot{<} y \wedge \forall z (x \dot{<} z \rightarrow (z = y \vee y \dot{<} z)))$$

□

(S2.2) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile care au cel puţin un drum de lungime 3;

(iii) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3;

(iv) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă.

Demonstraţie: Folosim notaţiile din curs. Se ia $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Teoria grafurilor este $Th((IREFL), (SIM))$. Clasa de grafuri care trebuie axiomatizată se notează $\mathcal{K}$.

(i) Adăugăm enunţul
$$\varphi := \forall x \forall y (\neg(x = y) \to \dot{E}(x, y)).$$
Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (SIM), \varphi))$.

(ii) Adăugăm enunţul
$$\varphi := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} \neg(v_i = v_j) \wedge \dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_4) \right).$$
Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (SIM), \varphi))$.

(iii) Adăugăm enunţul
$$\varphi := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} \neg(v_i = v_j) \wedge \dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_1) \right).$$
Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (SIM), \varphi))$.

(iv) Adăugăm enunţul
$$\varphi := \forall x \exists y \dot{E}(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (\dot{E}(x, y) \wedge \dot{E}(x, z) \Rightarrow y = z).$$
Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (SIM), \varphi))$.

$\square$

(S2.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \varphi \wedge \forall x \psi \tag{1}$$
$$\exists x (\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \varphi \vee \exists x \psi. \tag{2}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}}\!\models \varphi \wedge \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 1.35) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤}}\!\models \varphi \vee \exists x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 1.35) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e]$.

$\square$