FMI, Info, Master I
Semestrul II, 2017
Teoria modelelor

Seminar 3

(S3.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models\!\!\dashv \exists x\varphi \tag{1}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \models\!\!\dashv \varphi \to \forall x\psi \tag{2}$$

$$\exists x(\psi \to \varphi) \models\!\!\dashv \forall x\psi \to \varphi \tag{3}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\varphi \models\!\!\dashv \exists x\varphi$:
$\mathcal{A} \models \exists x\varphi[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ (aplicând Propoziţia 1.35, deoarece $x \notin FV(\varphi)$) $\iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$.

$\forall x(\varphi \to \psi) \models\!\!\dashv \varphi \to \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 1.35) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \to \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \to \varphi) \models\!\!\dashv \forall x\psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \models \exists x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $[\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]] \iff$ (aplicând Propoziţia 1.35) există $a \in A$ a.î. $[\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e]] \iff$ [există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}]]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e]] \iff \mathcal{A} \not\models \forall x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x\psi \to \varphi)[e]$. $\square$

(S3.2) Demonstraţi că orice clasă finit axiomatizabilă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizată de un singur enunţ.
Demonstraţie: Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de enunţuri a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$. Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A} \models \varphi_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\} \iff \mathcal{A} \models \varphi$. Aşadar, $Mod(\varphi) = Mod(\Gamma) = \mathcal{K}$. $\square$

(S3.3) Să se axiomatizeze clasa grafurilor infinite.
Demonstraţie: Folosim notaţiile din curs. Se ia $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Teoria grafurilor este $Th((IREFL), (SIM))$. Adaugăm la ea mulţimea de enunţuri

$$\Gamma := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 2\}.$$

Deci, răspunsul este $Th((IREFL), (SIM), \Gamma)$. $\square$

Definiţia 1. *Spunem că $h : A \to B$ este scufundare şi scriem $h : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{B}$ dacă h este homomorfism injectiv.*
Spunem că $\mathcal{A}$ poate fi scufundată în $\mathcal{B}$ sau că $\mathcal{A}$ este scufundabilă în $\mathcal{B}$ şi scriem $\mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{B}$ dacă există o scufundare $h : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{B}$.

(S3.4) Demonstraţi că relaţia $\hookrightarrow_0$ este reflexivă şi tranzitivă, dar nu este simetrică sau antisimetrică.
Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ $\mathcal{L}$-structuri arbitrare, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$, $C = |\mathcal{C}|$.

- Fie $1_A : A \to A, \quad 1_A(a) = a$. Atunci $1_A : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{A}$. Deci $\hookrightarrow_0$ este reflexivă.
- Presupunem că $g : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{B}$ şi $h : \mathcal{B} \hookrightarrow_0 \mathcal{C}$. Atunci $h \circ g : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{C}$. Deci $\hookrightarrow_0$ este tranzitivă.
- $\hookrightarrow_0$ nu este simetrică. În $\mathcal{L}_=$, $(A) \hookrightarrow_0 (B) \iff$ există o injecţie de la A la $B \iff |A| \leq |B|$. Fie A, B finite a.î. $|A| < |B|$. Atunci $(A) \hookrightarrow_0 (B)$, dar $(B) \not\hookrightarrow_0 (A)$.
- $\hookrightarrow_0$ nu este antisimetrică. Vezi exemplul din curs de după Definiţia 1.53.

$\square$