

Seminar 4

(S4.1) Să se dea exemple de limbaj \mathcal{L} de ordinul întâi și de două \mathcal{L} -structuri care sunt elementar echivalente, dar nu sunt izomorfe.

(S4.2) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- două simboluri de constante c, d .

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui \mathcal{L} :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d) \\ \varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z)) \\ \varphi_3 &= \exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z)) \\ \varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))\end{aligned}$$

(S4.3) Fie \mathcal{K} o clasă nevidă de \mathcal{L} -structuri. Demonstrați următoarele:

- Fiecare $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ este model al lui $Th(\mathcal{K})$.
- Dacă \mathcal{K} are cel puțin două elemente care nu sunt elementar echivalente, atunci $Th(\mathcal{K})$ nu este o teorie completă.

(S4.4) Decideți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

- $(\mathbb{N}, \leq, +, 0) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, \cdot, 1)$;
- $(\mathbb{N}, \leq, \cdot, 1) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, +, 0)$.