FMI, Info, Master I
Semestrul II, 2017
Teoria modelelor

Seminar 5

(S5.1) Demonstraţi că dacă o clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă, atunci complementul să $\mathcal{K}^c$ este de asemenea finit axiomatizabilă.
Demonstraţie: Conform (S3.2), $\mathcal{K}$ este axiomatizată de un singur enunţ φ, deci $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$. Rezultă imediat că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K} \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi \iff \mathcal{A} \vDash \neg\varphi.$$

Prin urmare, $\mathcal{K}^c = Mod(\neg\varphi)$. □

(S5.2) Fie φ, ψ formule şi x variabilă. Să se demonstreze:

(i) $\vDash \varphi$ implică $\vDash \forall x\varphi$;

(ii) $\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem $\vDash \varphi$ şi vrem $\vDash \forall x\varphi$, i.e. pentru orice $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi orice $e : V \to A$ o evaluare, avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ dacă şi numai dacă pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Dar aceasta este adevřat, având în vedere că $\vDash \varphi$.

(ii) Vrem ca pentru orice $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi orice $e : V \to A$ o evaluare, avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi))[e]$. Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$ (*) şi vrem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi))[e]$. Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ (**) şi vrem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi))[e]$. Fie $a \in A$. Vrem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$. Din (*) avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$, iar din (**) scoatem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Astfel deducem concluzia dorită.

□

(S5.3) Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:

(i) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq, \cdot, 1) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, +, 0)$;

(ii) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, +)$.

Demonstraţie:

(i) Este falsă. Presupunem că h este o scufundare. Atunci $h(1) = 0$, $h(2) > h(1) = 0$, deci $h(2) \geq 1$. Prin inducţie se demonstrează imediat că $h(n+1) \geq n$ pentru orice $n \geq 1$. Obţinem că pentru orice n, $2^n - 1 \leq h(2^n) = nh(2)$, deci că $h(2) \geq \frac{2^n - 1}{n}$ pentru orice n, ceea ce este o contradicţie, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{n} = \infty$.

(ii) Este falsă. Presupunem că h este o scufundare. Fie $m := h(2)$ şi $n := h(3)$. Atunci $m \neq n$,

$$\begin{aligned} h(2^n \cdot 3^m) &= h(2^n) + h(3^m) = nh(2) + mh(3) = nm + mn = 2mn \text{ şi} \\ h(3^{2m}) &= 2mh(3) = 2mn. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, $2^n 3^m \neq 3^{2m}$. Deci, h nu e injectiv.

$\square$

(S5.4) Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$-structuri, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$ şi $h : A \to B$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) h este homomorfism injectiv;

(ii) h respectă toate formulele atomice;

(iii) h respectă toate formulele libere de cuantificatori.

Demonstraţie: (i)$\Rightarrow$(ii) A se vedea demonstraţia Propoziţiei 1.56 (se observă că faptul că homomorfismul este surjectiv nu este aplicat decât pentru formulele cu cuantificatori).

(ii)$\Rightarrow$(iii) Trebuie să demonstrăm că pentru orice formulă φ,

$$\text{dacă } \varphi \text{ este liberă de cuantificatori, atunci pentru orice evaluare } e : V \to A, \\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e].$$

Aplicăm inducţia pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Aplicăm (ii).
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci ψ este liberă de cuantificatori, Pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e] \iff \mathcal{B} \nvDash \psi[h \circ e] \\ & \text{ conform ipotezei de inducţie pentru } \psi \\ &\iff \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e] \end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci ψ şi χ sunt libere de cuantificatori. Pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{A} \vDash \psi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \vDash \chi[e] \\ &\iff \mathcal{B} \vDash \psi[h \circ e] \text{ implică } \mathcal{B} \vDash \chi[h \circ e] \\ & \text{ conform ipotezei de inducţie pentru } \psi, \chi \\ &\iff \mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ e]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$. Atunci φ nu este liberă de cuantificatori, deci nu avem ce demonstra.

(iii)$\Rightarrow$(i) Fie $m \geq 1$, $R \in \mathcal{R}_m$ şi $a_1, \ldots, a_m \in A$. Atunci

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) &\iff \mathcal{A} \vDash Rx_1 \ldots x_m[a_1, \ldots, a_m] \iff \mathcal{B} \vDash Rx_1 \ldots x_m[h(a_1), \ldots, h(a_m)] \\ & \text{ deoarece } h \text{ respectă formulele atomice} \\ &\iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)). \end{aligned}$$

Fie $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ şi $a_1, \ldots, a_m, b \in A$. Atunci

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) = b &\iff \mathcal{A} \vDash (fx_1 \ldots x_m = y)[a_1, \ldots, a_m, b] \\ &\iff \mathcal{B} \vDash (fx_1 \ldots x_m = y)[h(a_1), \ldots, h(a_m), h(b)] \\ & \text{ deoarece } h \text{ respectă formulele atomice} \\ &\iff f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) = h(b). \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)).$$

Fie c un simbol de constantă. Atunci pentru orice $b \in A$,

$$\begin{aligned} c^{\mathcal{A}} = b &\iff \mathcal{A} \vDash (c = y)[b] \iff \mathcal{B} \vDash (c = y)[h(b)] \\ & \text{ deoarece } h \text{ respectă formulele atomice} \\ &\iff c^{\mathcal{B}} = h(b). \end{aligned}$$

Prin urmare, $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.
Am demonstrat, aşadar, că h este homomorfism. Demonstrăm că h este injectivă. Fie $a, b \in A$ a.î. $h(a) = h(b)$. Atunci

$$\mathcal{B} \vDash (x = y)[h(a), h(b)].$$

Deoarece h păstrează formulele libere de cuantificatori, rezultă că

$$\mathcal{A} \vDash (x = y)[a, b],$$

adică $a = b$. $\square$