FMI, Info, Master I
Semestrul II, 2017
Teoria modelelor

Seminar 6

(S6.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex al lui $\mathcal{L}$, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x \exists z (f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$;

(ii) $\forall y \exists z \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;

(iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;

(iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.

Demonstraţie:

(i) Avem $\varphi^1 = \forall x (f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d)_z(h(x)) = \forall x (f(x) = c \wedge \neg(g(x, h(x)) = d)$, unde h este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(ii) Avem $\varphi^1 = \forall y \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, z))_z(p(y)) = \forall y \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde p este un nou simbol de operaţie unară, şi $\varphi^2 = \forall y (P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))_u(j(y)) = \forall y (P(j(y), y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde j este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z (P(x,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, şi $\varphi^2 = \forall u \forall y (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_z(k(u,y)) = \forall u \forall y (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(k(u,y))))$, unde k este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem $\varphi^1 = \forall z \forall x \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u)))_u(n(z,x)) = \forall z \forall x \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(n(z,x)) \vee \neg Q(v, n(z,x))))$, unde n este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

$\square$

(S6.2) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol de operaţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ al lui $\mathcal{L}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \nvDash \varphi$.

Demonstraţie:

Prima soluţie: se ia φ ca fiind

$$\forall x \forall y ((\neg \exists z (x = z + z) \wedge \neg \exists z (y = z + z)) \to \exists z (x + y = z + z)),$$

ce exprimă faptul că suma a două elemente "nepare" este pară – în $\mathbb{Z}$, avem într-adevăr regula "impar + impar = par", dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1,0) + (0,1) = (1,1)$.
A doua soluţie: se ia φ ca fiind

$$\exists t \forall x (\exists z (x = z + z) \vee \exists z (x = z + z + t)),$$

ce este adevărată în $\mathbb{Z}$, luând $t := 1$ (orice număr este ori de forma $2z$, ori de forma $2z+1$), dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relaţia de congruenţă indusă de subgrupul normal al elementelor pare are patru clase, şi nu două. $\square$

(S6.3) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol de operaţie, $\cdot$, de aritate 2. Fie $\mathcal{G} = (G, \cdot^{\mathcal{G}})$ un grup finit. Să se determine un enunţ φ_G al lui $\mathcal{L}$ astfel încât pentru orice grup $\mathcal{H} = (H, \cdot^{\mathcal{H}})$ avem că $\mathcal{H} \vDash \varphi_G$ dacă şi numai dacă $\mathcal{H}$ este izomorf cu $\mathcal{G}$.

Demonstraţie: Dat fiind că G este mulţime finită, există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $g : \{1, \ldots, n\} \to G$ o bijecţie. Luăm enunţul φ_G ca fiind

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \wedge \forall z \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} z = x_i \right) \wedge \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n} x_i \cdot x_j = x_{g^{-1}(g(i) \cdot^{\mathcal{G}} g(j))} \right),$$

unde primii doi termeni ai conjuncţiei din paranteză exprimă faptul că $x_1, \ldots, x_n$ sunt exact elementele potenţialei structuri, iar ultimul termen codifică "tabla" grupului G.

Astfel, notând porţiunea fără cuantificatori a lui φ_G cu ψ_G, avem că un grup $\mathcal{H} = (H, \cdot^{\mathcal{H}})$ satisface φ_G dacă şi numai dacă există $f : \{1, \ldots, n\} \to H$ astfel încât pentru orice $e : V \to H$ avem că $\mathcal{H} \vDash \psi_G[e_{x_1 \leftarrow f(1), \ldots, x_n \leftarrow f(n)}]$. Funcţiile f cu această proprietate corespund izomorfismelor $h : G \to H$ prin formulele $h := f \circ g^{-1}$ şi $f := h \circ g$. $\square$