**FMI, Info, Master I**
**Semestrul II 2015**
**Teoria Modelelor**

# Examen

**(P1)** [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi. Demonstraţi că pentru orice formule $\varphi$, $\psi$ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabile $x, y$,

(i) $\neg\forall x\varphi \vDash\!\!\!\Dashv \exists x\neg\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(iii) $\varphi \vDash \exists y\varphi$.

**Demonstraţie:** Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(i) Avem $\mathcal{A} \vDash (\neg\forall x\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \nvDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ nu este adevărat că pentru orice $a \in A$ avem că
$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash (\exists x\neg\varphi)[e]$.

(ii) Avem $\mathcal{A} \vDash \forall x(\varphi \wedge \psi) \iff$ pentru orice $a \in A, \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A, \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

(iii) Presupunem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Notăm $a := e(y)$. Atunci $e_{y\leftarrow a} = e$, deci $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{y\leftarrow a}]$. Rezultă că $\mathcal{A} \vDash (\exists y\varphi)[e]$.

$\square$

**(P2)** [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi. Demonstraţi că pentru orice formule $\varphi$, $\psi$ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

(i) $\varphi \vDash\!\!\!\Dashv \forall x\varphi$;

(ii) $\exists x(\varphi \to \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \varphi \to \exists x\psi$;

(iii) $\exists x(\psi \to \varphi) \vDash\!\!\!\Dashv \forall x\psi \to \varphi$.

**Demonstraţie:** Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(i) Avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 1.31, deoarece $x \notin FV(\varphi)$) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.

(ii) Avem $\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $[\mathcal{A} \nvDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]]$ $\iff$ (aplicând Propoziţia 1.31, deoarece $x \notin FV(\varphi)$) există $a \in A$ a.î. $[\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{xlaa}] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \exists x\psi)[e]$.

(iii) Avem $\mathcal{A} \vDash (\exists x(\psi \to \varphi))[e] \iff$ (aplicând Propoziţia 1.31, deoarece $x \notin FV(\varphi)$) există $a \in A$ a.î. $[\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau nu este adevărat că pentru orice $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \nvDash (\forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e]$.

□

**(P3)** [2 puncte] Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:

(i) clasa mulţimilor total ordonate este axiomatizabilă;

(ii) clasa mulţimilor total ordonate finite este axiomatizabilă;

(iii) clasa mulţimilor total ordonate infinite este axiomatizabilă.

**Demonstraţie:** Considerăm limbajul $\mathcal{L}_<$ şi mulţimea de enunţuri

$$\Gamma = (IREFL), (TRANZ), (TOTAL) \text{ (folosind notaţiile din Cursul 4).}$$

Se observă că $\Gamma$ satisface condiţia (*) din ipoteza Propoziţiei 1.146: pentru orice $m \in \mathbb{N}$, considerăm $(\{0, \ldots, m\}, <)$, model al lui $\Gamma$ de cardinal $m + 1 \geq m$.

(i) Adevărat, deoarece clasa mulţimilor total ordonate este axiomatizată de $\Gamma$.

(ii) Fals. Clasa mulţimilor total ordonate finite este clasa modelelor finite ale lui $\Gamma$, deci, conform Propoziţiei 1.146.(ii) nu este axiomatizabilă.

(iii) Adevărat. Clasa mulţimilor total ordonate infinite este clasa modelelor infinite ale lui $\Gamma$, deci, conform Propoziţiei 1.146.(iii) este axiomatizabilă.

□

**(P4)** [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi şi $\mathcal{K}$ o clasă de $\mathcal{L}$-structuri care are cel puţin două elemente $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ care nu sunt elementar echivalente. Demonstraţi că $Th(\mathcal{K})$ nu este o teorie completă.

**Demonstraţie:** A se vedea (S3.2). $\square$

**(P5)** [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi cel mult numărabil şi $\Gamma$ o mulţime de enunţuri ale lui $\mathcal{L}$. Demonstraţi că dacă $\Gamma$ are un model, atunci $\Gamma$ are un model cel mult numărabil.

**Demonstraţie:** Fie $\mathcal{B}$ un model al lui $\Gamma$. Aplicând Teorema Löwenheim-Skolem în jos (1.112) pentru $X = \emptyset$ obţinem o $\mathcal{L}$-structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. Rezultă din Propoziţia 1.110 că $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Prin urmare, $\mathcal{A}$ este model cel mult numărabil al lui $\Gamma$. $\square$

**(P6)** [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare $R, S$ şi două simboluri de relaţii binare $P, Q$;
- un simbol de funcţie unară $f$ şi un simbol de funcţie binară $g$;
- două simboluri de constante $c, d$.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x(f(x) = c) \wedge \neg \exists z(g(y,z) = d)\\
\varphi_2 &= \exists y(\exists x P(x,y) \to \forall z Q(x,z))\\
\varphi_3 &= \neg \forall y\big(S(y) \to \exists z R(z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y).
\end{aligned}$$

**Demonstraţie:**

(i)

$$\begin{aligned}
\exists x(f(x) = c) \wedge \neg \exists z(g(y,z) = d) &\mathrel{\exists\!\!\!\!\vDash} \exists x(f(x) = c \wedge \forall z \neg g(y,z) = d)\\
&\mathrel{\exists\!\!\!\!\vDash} \exists x \forall z(f(x) = c \wedge \neg g(y,z) = d).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\exists y(\exists x P(x,y) \to \forall z Q(x,z)) &\mathrel{\exists\!\!\!\!\vDash} \exists y \forall z(\exists x P(x,y) \to Q(x,z))\\
&\mathrel{\exists\!\!\!\!\vDash} \exists y \forall z(\exists u P(u,y) \to Q(x,z))\\
&\mathrel{\exists\!\!\!\!\vDash} \exists y \forall z \forall u(P(u,y) \to Q(x,z)).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\neg\forall y(S(y) \to \exists z R(z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y) &\;\;\text{⫤}\;\; \exists y \neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y) \\
&\;\;\text{⫤}\;\; \exists y \neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists u P(x,u) \\
&\;\;\text{⫤}\;\; \exists y \forall z \neg(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists u P(x,u) \\
&\;\;\text{⫤}\;\; \exists y \forall z \forall x \exists u(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge P(x,u)).
\end{aligned}$$

□

**(P7)** [3 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi şi $\Gamma$ o mulţime de enunţuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea că

$$\text{pentru orice } m \in \mathbb{N},\ \Gamma \text{ are un model finit de cardinal } \geq m.$$

Notăm cu $\mathcal{K}$ clasa modelelor finite ale lui $\Gamma$. Demonstraţi că $\mathcal{K}$ nu este axiomatizabilă.
**Demonstraţie:** Presupunem prin reducere la absurd că există $\Sigma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$. Fie

$$\Delta := \Sigma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că $\Delta$ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate.
Fie $\Delta_0$ o submulţime finită a lui $\Delta$. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Sigma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ un model finit al lui $\Gamma$ de cardinal $\geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$ şi $\mathcal{A} \vDash \Sigma$ deoarece $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Sigma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$$

are un model $\mathcal{B}$. Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Sigma$, rezultă că $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obţinut o contradicţie.

□