

LOGICA MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ  
Sem. I, 2017-2018

Ioana Leustean  
FMI, UB

# Ce este logica?

*logikē tekhnē* = știința raționamentelor  
*logos* = cuvânt, raționament

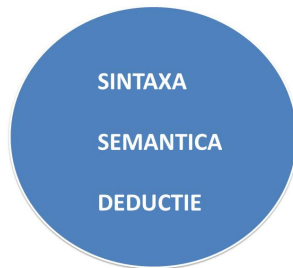
"A deduction is speech (logos) in which, certain things having been supposed, something different from those supposed results of necessity because of their being so." (Aristotel, Prior Analytics)  
Smith, R., "Aristotle's Logic", SEP (Spring 2014), Ed. N. Zalta (ed.)

"Contrariwise [...] if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic."  
Lewis Carroll, *Through the Looking-Glass, and What Alice Found There*

"Logic is the beginning of wisdom, [...], not the end. "  
Captain Spock, *Star Trek VI: The Undiscovered Country* (1991)

# Logica matematică

O *logică* este un sistem formal cu două componente: *sintaxa* și *semantica*.  
Orice sistem logic are un mecanism de *deducție*.



Exemple din *logica clasică*:

	p	q	$p \rightarrow q$
Sintaxa: $p \rightarrow q$	0	0	1
Semantica:	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

Deducția:  $\frac{p \rightarrow q, p}{q}$  (*modus ponens*)

# Logică și Informatică

"Computing and Computing Science unavoidably emerge as an exercise in formal mathematics or, if you wish an acronym, as exercise in VLSAL (Very Large Scale Application of Logic)."

Dijkstra, E.W. The next fifty years (EWD1243a). E.W. Dijkstra Archive. Center for American History, University of Texas at Austin.

"Logic is the calculus of computation."

Aaron R. Bradley, Zohar Manna, The Calculus of Computation Decision Procedures with Applications to Verification, Springer, 2007

"Computer science is the continuation of logic by other means."

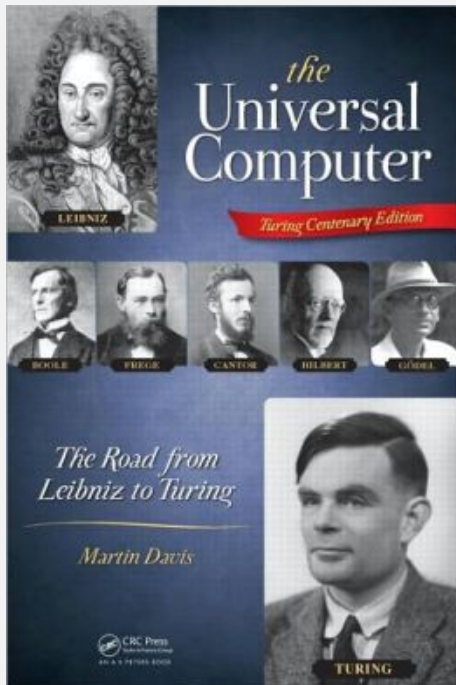
Georg Gottlob: Logic and Artificial Intelligence, Media Seminar, VSL 2014

# Logică și Informatică

*Aplicatii ale logicii în informatică:*

- arhitectura calculatoarelor (circuite logice)
- software engineering (testare și verificare)
- limbaje de programare (semantică, programare logica)
- baze de date (algebre de relații)
- inteligență artificială (demonstrare automată)
- calculabilitate și complexitate

J. Y. Halpern, R. Harper, N. Immerman, P.G.Kolaitis, M.Y. Vardi, V.Vianu, On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science Bulletin of Symbolic Logic 7(2), 2001, 213-233



*"... a computing machine is really a logic machine. Its circuits embody the distilled insights of a remarkable collection of logicians, developed over century. Nowadays, as computer technology advances with such breathtaking rapidity, as we admire the truly accomplishments of the engineers, it is all too easy to overlook the logicians whose ideas made it all possible. This book tells their story."*

# M. Davis, The Universal Computer

## Cuprins

- ① Leibniz's Dream
- ② Boole Turns Logic into Algebra
- ③ Frege: From Breakthrough to Despair
- ④ Cantor: Detour through Infinity
- ⑤ Hilbert to the Rescue
- ⑥ Gödel Upsets the Applecart
- ⑦ Turing Conceives of the All-Purpose Computer
- ⑧ Making the First Universal Computers
- ⑨ Beyond Leibniz's Dream

# Logică și Informatică în România

## Grigore C. Moisil (1906-1973)



*"As a professor of the Bucharest University, he was the first to teach there mathematical logic. Articulating logic and automata, Moisil was well prepared to organize the Romanian development in the emergent field of Computer Science...we can say that 1957 is the date of birth of Romanian Computer Science, under the guidance of Professor Moisil and with the collaboration of engineers and mathematicians."*

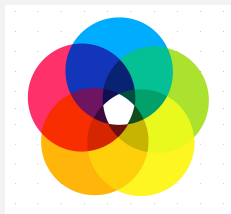
S. Marcus, Grigore C. Moisil: A life becoming a myth, IJCCC 1, 73-79, 2006.

**Gr.C. Moisil** - Computer Pioneer Award of IEEE Computer Society



# Sisteme de logică

- Logica clasică
- Logica modală
  - Logica temporală, Logica dinamică, Logică epistemică
- Logica intuiționistă
- Logica liniară
- Logica cu mai multe valori
  - Logica fuzzy
- Logici pentru corectitudinea programelor
  - Logica Hoare, Logica dinamică,
  - Separation Logic, Matching Logic
- Logica descrierii (Semantic Web)  
etc.



# Conținutul cursului

REZOLUTIE  
DEDUCTIE NATURALA

**LOGICA CLASICA**

STRUCTURA FND ALGEBRE BOOLE  
FNC SECVENTI  
SATISFIABILITATE LIMBAJ  
LATICI  
PREDICATE

**SEMANTICA**

SINTAXA  
COMPLETITUDINE

WordItOut

# Continutul cursului

- **Multimi, Relatii, Functii**

Operatii cu multimi. Functia caracteristica. Operatori de inchidere. Relatii binare. Relatii de echivalenta. Relatii de ordine.

- **Latici si Algebre Boole**

Latticea ca structura algebrica. Algebre Boole. Teorema de reprezentare a lui Stone.

- **Calculul propozitional clasic**

Sintaxa. Semantica. Satisfiabilitate. Teorema de completitudine. Forma normala conjunctiva. Rezolutie.

- **Introducere in calculul cu predicate**

Limbaj de ordinul I. Structura de ordinul I. Sintaxa. Semantica. Rezolutie.

## Bibliografie

- V. E. Cazanescu, Curs de bazele informaticii, Tipografia Universitatii din Bucuresti, 1976.
- G. Georgescu, Elemente de logica matematica, Academia Militara, Bucuresti, 1978.
- G. Georgescu, A. Iorgulescu, Logica matematica, Editura ASE, Bucuresti, 2010.
- Gr. C Moisil, Elemente de logica matematica si de teoria multimilor, Editura Stiintifica, Bucuresti, 1968.
- S. Rudeanu, Curs de bazele informaticii, Tipografia Universitatii din Bucuresti, 1982.

## Bibliografie

- M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge Univ. Press, 2009
- A.R. Bradley, Z. Manna, The Calculus of Computation Decision Procedures with Applications to Verification, Springer, 2007
- M. Ben-Ari, Mathematical Logic For Computer Science, Springer, 2003
- S. Burris, Logic for Mathematics and Computer Science, Prentice Hall, 1998
- H.R. Lewis, C.H. Papadimitriou, Elements of the Theory of Computation, Prentice-Hall, 1981.
- J.D. Monk, Mathematical Logic, Springer Verlag, 1976.

# Inceputurile logicii

Aristotel (IV i.e.n.)



- primul studiu formal al logicii
- a studiat *silogismele*, deductii formate din doua premise si o concluzie.

<i>Premisa</i>	Totii oamenii sunt muritori.
<i>Premisa</i>	Grecii sunt oameni.
<i>Concluzie</i>	Deci grecii sunt muritori.

## Silogismele

- Patru tipuri de enunțuri (**A**ffirmo **nE**g **O**)
  - A:** *Toți X sunt Y.* (universal afirmativ)
  - E:** *Nici un X nu este Y.* (universal negativ)
  - I:** *Unii X sunt Y.* (particular afirmativ)
  - O:** *Unii X nu sunt Y.* (particular negativ)
- Un silogism este format din două premize și o concluzie, fiecare având una din formele **A E I O**.

Premiză majoră

Premiză minoră

Concluzia

## Silogismele

	<b>Barbara</b>	<b>Festino</b>
<i>Premiză</i>	Toți oamenii sunt muritori.	Nici un câine nu este pisică.
<i>Premiză</i>	Toți grecii sunt oameni.	Unele carnivore sunt pisici.
<i>Concluzie</i>	Toți grecii sunt muritori.	Unele carnivore nu sunt câini.
	<b>Felapton</b>	<b>AIO</b>
<i>Premiză</i>	Nici un $X$ nu este $Y$ .	Toți $X$ sunt $Y$ .
<i>Premiză</i>	Toți $X$ sunt $Z$ .	Unii $Z$ sunt $Y$ .
<i>Concluzie</i>	Unii $Z$ nu sunt $Y$ .	Unii $Z$ nu sunt $X$ .
	<b>Adevărat pentru <math>X \neq \emptyset</math></b>	<b>Fals</b>

256 silogisme,

15 valide,

24 valide dacă  $X, Y, Z \neq \emptyset$



- **Gottfried Wilhelm Leibniz**, 1646 -1716

*lingua characteristicam universalis, calculus ratiocinator*

"If controversies were to arise, there would be no more need of disputation between two philosophers than between two accountants. For it would suffice to take their pencils in their hands, and say to each other: *Calulemus* - Let us calculate."

- **George Boole**, 1815-1864

*The Mathematical Analysis of Logic* (1847)

"The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of the operations of the mind by which reasoning is performed; to give expressions to them in the symbolic language of calculus, and upon this foundation to establish the science of logic and construct its methods."

## G. Boole: Logica "claselor"

Analiza raționamentelor prin metode asemănătoare calculului algebric.

$x$  mulțimea oamenilor,  
 $y$  mulțimea muritorilor,  
 $z$  mulțimea grecilor.

	<b>Barbara</b>	
<i>Premiză</i>	Toți oamenii sunt muritori.	$x(1 - y) = 0 \Leftrightarrow x = xy$
<i>Premiză</i>	Toți grecii sunt oameni.	$z(1 - x) = 0 \Leftrightarrow z = zx$
<i>Concluzie</i>	Toți grecii sunt muritori.	$z(1 - y) = 0 \Leftrightarrow z = zy$

**Dem.**  $z = zx = z(xy) = (zx)y = zy$

## Logica matematică

- **Friedrich Ludwig Gottlob Frege**, *Begriffsschrift*, 1879  
(a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought)
- **Giuseppe Peano**, *Formulario Mathematico*, 1894-1908
- **Bertrand Russell și Alfred North Whitehead**  
*Principia Mathematica*, 1910-1913
- **David Hilbert**, Hilbert's Program , 1921  
"Once a logical formalism is established one can expect that a systematic, so-to-say computational, treatment of logic formulas is possible, which would somewhat correspond to the theory of equations in algebra."
- **Kurt Gödel**  
Teorema de completitudine a calculului cu predicate (1929),  
Teoremele de incompletitudine (1931)
- **Alfred Tarski**  
*The Concept of Truth in Formalized Languages* (1935),  
*On the Concept of Logical Consequence* (1936)

# Calculul propozitional clasic

- O *propozitie* este un enunt care poate fi *adevarat*(1) sau *fals*(0).
- Propozitiile sunt notate simbolic ( $p, q, r, \dots$ ) si sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ( $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ).

Fie  $p$  propozitia: *Azi este joi, deci avem curs de logica.*

Cine este  $\neg p$ ?

Propozitia  $\neg p$  este: *Azi este joi si nu avem curs de logica.*

# Puzzle-uri logice

- Propozitia falsa
- Cele trei premii
- Cei trei frati gemeni

R. Smullyan, *To mock a mocking bird*, Oxford University Press, 2000.

## Propozitia falsa

Dintre urmatoarele propozitii, numai una singura este falsa.  
Aflati propozitia falsa.

- a. Propozitia  $d$  este adevarata.
- b. Propozitia  $a$  este falsa.
- c. Propozitia  $b$  este falsa
- d. Propozitia  $c$  este adevarata.

Propozitia falsa este  $b$ .

## Cele trei premii

Presupuneti ca vreau sa va ofer unul din premiile:



**A**



**B**



**C**

Voi trebuie sa enuntati o propozitie  $p$ . Daca  $p$  este adevarata atunci primiti unul din premiile **A** sau **B**. Daca  $p$  este falsa atunci primiti premiul **C**.

## Cele trei premii

Enuntati o propozitie  $p$  astfel incat:

- sa luati cu siguranta unul din premiile **A** sau **B**;  
p:  $2 + 2 = 4$
- sa luati cu siguranta premiul **C**;  
p:  $2 + 2 \neq 4$
- sa luati cu siguranta premiul **A**.  
p: *Nu voi lua premiul B.*



# Laurentiu, Leo si Teodor

Laurentiu, Leo si Teodor sunt trei frati gemeni.

- Laurentiu, Leo mint intotdeauna (liars), iar
- Teodor spune intotdeauna adevarul (truth-teller).

Intr-o zi intalniti pe strada unul din cei trei frati.

Aveti voie sa ii puneti o singura intrebare, formata din cel mult trei cuvinte, la care el va raspunde *Da* sau *Nu*.

Care din urmatoarele intrebari va permite *sa decideti* daca persoana cu care vorbiti este Leo?

## Laurentiu, Leo si Teodor

- Esti tu Teodor?  
Raspunsul *Nu* este imposibil. Raspunsul *Da* il poate da oricare din cei trei frati. **Nu putem decide daca vorbim cu Leo.**
- Esti tu Leo?  
Raspunsul *Da* il poate da numai Laurentiu. Raspunsul *Nu* il pot da numai Teodor si Leo. **Nu putem decide daca vorbim cu Leo.**
- Esti tu Laurentiu?  
Raspunsul *Da* il poate da numai Leo. Raspunsul *Nu* il pot da numai Teodor si Laurentiu. Daca raspunsul este *Da*, atunci vorbim cu Leo. Daca raspunsul este *Nu*, atunci nu vorbim cu Leo. **Putem decide daca vorbim cu Leo.**

# Calculul cu predicate

- Introduce *predicatele* si *cuantificatorii*.

Un predicat este o functie cu valori booleene  $P : X \rightarrow \{0, 1\}$ .  
Exista doi cuantificatori: existential ( $\exists$ ) si universal ( $\forall$ ).

Formalizati in teoria grafurilor urmatoarele proprietati:

*varful  $x$  are cel putin doi vecini diferiti,*

$$\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$$

*fiecare varf are cel putin doi vecini diferiti.*

$$\forall x \exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$$

unde  $V$  este multimea varfurilor grafului,  $E : V \times V \rightarrow \{0, 1\}$  si  $E(x, y) = 1$  ddaca  $x$  si  $y$  sunt vecini

## Calculul cu predicate

Fie  $X$  o multime nevida si presupunem ca pentru fiecare  $x \in X$ , sunt definite doua predicate  $P(x)$  si  $Q(x)$ . Cercetati daca urmatorul enunt este intotdeauna adevarat.

$$((\forall x P(x)) \rightarrow (\forall x Q(x))) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)))$$

Enuntul **nu** este intotdeauna adevarat. Contraexemplu:

$$X = \mathbb{N}$$

$P(x)$  :  $x$  este numar par,

$Q(x)$  :  $x$  este multiplu de 3.

Atunci  $\forall x P(x)$  este falsa, deci  $(\forall x P(x)) \rightarrow (\forall x Q(x))$  este adevarata. Pe de alta parte,  $P(2) \rightarrow Q(2)$  este falsa, deci  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  este falsa. Obtinem o implicatie cu premisa adevarata si concluzia falsa ( $1 \rightarrow 0$ ), care este falsa.

Success!