LOGICA MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Sem. I, 2017-2018

Ioana Leustean
FMI, UB

Partea I

- **Mulțimi, Relații, Funcții**
  Operații cu mulțimi. Funcția caracteristică. Operatori de închidere. Relații binare. Relații de echivalență. Relații de ordine.
- **Latici si Algebre Boole**
  Laticea ca structură algebrică. Algebre Boole. Teorema de reprezentare a lui Stone.

MULȚIMI. RELAȚII

Operaţii cu mulţimi

A, B, C, T mulțimi

- $A, B \subseteq T$
  $A \cup B = \{x \in T | x \in A \text{ sau } x \in B\}$
  $A \cap B = \{x \in T | x \in A \text{ și } x \in B\}$
  $\overline{A} = \{x \in T | x \notin A\}$
- $\mathcal{P}(T) = \{A | A \subseteq T\}$
- $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ și } b \in B\}$

Exemplu. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...

Exercițiu. $A, B, C \subseteq T$
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Mulţimi. Relaţii n-are

n număr natural, $n \geq 1$
A_1, …, $A_n \subseteq T$ mulțimi

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in T | ex.\ i \in \{1, \ldots, n\}\ x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in T | x \in A_i\ \ or.\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$
- $\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) |\ x_i \in A_i\ \ or.\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$

Notație. $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Definiţie

O **relație** între A_1, …, A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$. O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n.

Mulţimi. Relaţii n-are

Exemple

- $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $| = \{(k, n) |$ *ex.* $m \in \mathbb{N}$ a.î. $mk = n\}$

- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $< = \{(k, n) |$ *ex.* $m \in \mathbb{N}$ a.î. $m \neq 0$ si $m + k = n\}$

- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$
  $R = \{(n_1, n_2, n_3, z) \mid z = n_1 - n_2 + n_3\}$

Operaţii cu relaţiii

A, B, C mulțimi

- relația inversă:
  dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R^{-1} \subseteq B \times A$ și
  $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$
- compunerea relațiilor:
  dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$ atunci $R \circ Q \subseteq A \times C$ și
  $R \circ Q = \{(a, c) | ex.\ b \in B\ (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}$
- diagonala $\Delta_A = \{(a, a) | a \in A\}$

Exercițiu
(1) Compunerea relațiilor este asociativă.
(2) Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $\Delta_A \circ R = R$ și $R \circ \Delta_B = R$.

Relaţiii

A, B mulțimi
$R \subseteq A \times B$ (relație între A și B)

Definiţie

Relația R se numește:

- totală: or. $a \in A$ ex. $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in R$
- surjectivă : or. $b \in B$ ex. $a \in A$ astfel încât $(a, b) \in R$
- injectivă: or. a_1, $a_2 \in A$ or. $b \in B$
  $(a_1, b) \in R$ și $(a_2, b) \in R$ implică $a_1 = a_2$
- funcțională: or. $a \in A$ or. b_1, $b_2 \in B$
  $(a, b_1) \in R$ și $(a, b_2) \in R$ implică $b_1 = b_2$

Funcţii.

A, B mulțimi

O **funcție** de la A la B este o relație totală și functională, deci
$R \subseteq A \times B$ este funcție dacă
pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ cu $(a, b) \in R$.

Notația $f : A \to B$ are următoarea semnificație:
$f(a)$ este unicul element din B care este în relație cu a.

Astfel funcția $R \subseteq A \times B$ va fi notată prin $f_R : A \to B$, unde

$$b = f_R(a) \text{ ddacă } (a, b) \in R.$$

Invers, relația asociată lui $f : A \to B$ este $R_f = \{(a, f(a)) | a \in A\}$.

Vom nota prin $1_A : A \to A$ funcția $f(a) = a$ oricare $a \in A$.
Evident, $R_{1_A} = \Delta_A$.

Compunerea funcţiilor

$f : A \to B$ și $g : B \to C$ funcții

Definim $g \circ f : A \to C$ unde $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Exercițiu. $R_{g \circ f} = R_f \circ R_g$.

Spunem că o funcție $f : A \to B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

O **bijecție** este o funcție injectivă și surjectivă.

Exercițiu. O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Funcţia caracteristică

T mulțime, $A \subseteq T$

Funcția caracteristică a lui A în raport cu T este
$\chi_A : T \to \{0, 1\}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Proprietăţi

Dacă A, $B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

(1) $\chi_{A \cap B}(x) = min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

(2) $\chi_{A \cup B}(x) = max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

(3) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

Funcţia caracteristică

T mulțime, $\{0,1\}^T = \{f : T \to \{0,1\} | f$ funție $\}$

Propoziţie

Există o bijecție între $\mathcal{P}(T)$ și $\{0,1\}^T$.

Dem. Funcțiile care stabilesc bijecția sunt

$F : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T$, $F(A) = \chi_A$

$G : \{0,1\}^T \to \mathcal{P}(T)$, $G(f) = \{x \in T | f(x) = 1\}$

Se arată că $F(G(f)) = f$ și că $G(F(A)) = A$
oricare $A \subseteq T$ și $f : T \to \{0,1\}$.

Principiul Inducţiei

Principiul Inducţiei

Dacă $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:
(i) $0 \in S$,
(ii) or. $n \in \mathbb{N}$ $(n \in S \Rightarrow n+1 \in S)$,
atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem. Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ a.î. (i) și (ii) sunt adevărate. Presupunem că $S \neq \mathbb{N}$, deci există $n_0 \in \mathbb{N} \setminus S$. Din (i) rezultă că $n_0 \neq 0$. Din (ii) rezultă că $1, \ldots, n_0 - 1 \in S$, deci $n_0 \in S$. Am obținut o contradicție, deci $S = \mathbb{N}$.

Mulţimi numărabile

O mulțime A este **numărabilă** dacă există $f : \mathbb{N} \to A$ funcție bijectivă și se numește **cel mult numărabilă** dacă este finită sau numărabilă.

Exerciții

(1) O reuniune finită de mulțimi numărabile este numărabilă.

(2) O reuniune numărabilă de mulțimi numărabile este numărabilă.

(3) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Principiul Diagonalizării

Principiul Diagonalizării

Fie A o mulțime si $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A. Pentru orice $a \in A$ definim $R_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$. Fie $D_R = \{x \in A \mid (x, x) \notin R\}$ diagonala relației R. Atunci $D_R \neq R_a$ pentru orice $a \in A$.

Dem. Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D_R = R_a$.
Sunt posibile două cazuri: $a \in D_R$ sau $a \notin D_R$.

(1) $a \in D_R \Rightarrow (a, a) \notin R \Rightarrow a \notin R_a = D_R$,
(2) $a \notin D_R \Rightarrow (a, a) \in R \Rightarrow a \in D_a = D_R$.

În ambele cazuri ajungem la o contradicție,
deci $D_R \neq R_a$ oricare $a \in A$.

Principiul Diagonalizării

Propoziție. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este numărabilă.

Dem. Presupunem că $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ este numărabilă, deci există o bijecție $F : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definim
$R = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k \in F(n)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Dacă $n \in \mathbb{N}$ atunci
$R_n = \{k \in \mathbb{N} \mid (n, k) \in R\} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \in F(n)\} = F(n)$.
Principiul diagonalizării implică $D_R \neq F(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Dar $D_R \subseteq \mathbb{N}$, deci $D_R \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Deoarece F este bijectivă, rezultă că există un $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $F(n_0) = D_R$.
Am obținut o contradicție, deci $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este numărabilă.

Observații. (1) Există o funcție bijectivă între $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ și $2^{\mathbb{N}}$,
unde $2^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \mid f \text{ funcție}\}$.
(2) Există o funcție bijectivă între $2^{\mathbb{N}}$ și $\mathbb{R}$.
În consecință $2^{\mathbb{N}}$ și $\mathbb{R}$ nu sunt numărabile.

Familii de elemente

I, A mulțimi

O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$.

Notăm cu $\{a_i\}_{i \in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ or. $i \in I$. Vom scrie $\{a_i\}_i$ atunci cand I poate fi dedus din context.
Dacă $I = \emptyset$ atunci $\{a_i\}_{i \in \emptyset}$ este *familia vidă* $\emptyset$.

Fie $\{A_i\}_{i \in I}$ și $\{B_i\}_{i \in I}$ familii de submulțimi ale unei mulțimi T.
Definim
$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid ex.\ i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$
$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i\ or.\ i \in I\}$

Exercițiu. $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

Dacă $I = \emptyset$ atunci $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$, $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = T$.

Produsul cartezian

I mulțime, $\{A_i\}_{i\in I}$ familie de mulțimi indexată de I.

Vom nota prin $(x_i)_i$ o familie de elemente a mulțimii $\bigcup_i A_i$ cu proprietatea că $x_i \in A_i$ or. $i \in I$.

Definim $\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_i A_i | f(i) \in A_i \ or.\ i \in I\}$
$= \{(x_i)_i | x_i \in A_i \ or.\ i \in I\}$.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi
$(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$
$(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$

Dacă $I = \emptyset$ atunci $\prod_{i\in\emptyset} A_i = \{\emptyset\} = \{\bullet\}$ este singleton și conține unica funcție de la $f_\emptyset : \emptyset \to \emptyset$.

Operatori de închidere

T mulțime

Un **operator de închidere** pe T este o funcție $\mathcal{C} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ care verifică următoarele proprietăți oricare A, $B \subseteq T$:

(I1) $A \subseteq \mathcal{C}(A)$,
(I2) $A \subseteq B$ implică $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$,
(I3) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \mathcal{C}(A)$.

Exercițiu. Fie $X_0 \subseteq T$ o submulțime fixată. Atunci

$\mathcal{C} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ definit prin $\mathcal{C}(A) = A \cup X_0$ or. $A \subseteq T$

este operator de închidere.

Operatori de închidere

Exemplu.

Fie *Var* o mulțime de variabile și *Form* mulțimea propozițiilor care se pot construi folosind variabile din *Var*.

Pentru $\Gamma \subseteq \mathit{Form}$ definim

$\mathcal{C}(\Gamma)$ = mulțimea tuturor formulelor care sunt *consecințe* ale lui Γ.

Funcția $\mathcal{C} : \mathcal{P}(\mathit{Form}) \to \mathcal{P}(\mathit{Form})$ este un operator de închidere.

RELATII BINARE. RELATII DE ORDINE. RELATII DE ECHIVALENTA

Relaţii binare

A mulțime, $R \subseteq A \times A$

Relația binară R se numește:

- reflexivă: $(x, x) \in R$ or. $x \in A$
- simetrică: $(x, y) \in R$ implică $(y, x) \in R$ or. x, $y \in A$
- antisimetrică: $(x, y) \in R$ și $(y, x) \in R$ implică $x = y$
  or. x, $y \in A$
- tranzitivă: $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R$ implică $(x, z) \in R$
  or. x, y, $z \in A$
- relație de preordine: reflexivă, tranzitivă
- relație de ordine: reflexivă, antisimetrică, tranzitivă
- relație de echivalență: reflexivă, simetrică, tranzitivă

Relaţii binare

Dacă A mulțime și $R \subseteq A \times A$ definim:

$\mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$
$\mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$
$\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n \geq 1} R^n$, unde $R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$ pt. $n \geq 1$, $R^0 = \Delta_A$

Propoziţie

(1) $\mathcal{R}(R)$ este reflexivă, $\mathcal{S}(R)$ este simetrică, $\mathcal{T}(R)$ este tranzitivă.
(2) Dacă $Q \subseteq A \times A$ este reflexivă (simetrică, tranzitivă) și $R \subseteq Q$ atunci $\mathcal{R}(R) \subseteq Q$ ($\mathcal{S}(R) \subseteq Q$, $\mathcal{T}(R) \subseteq Q$).

Propoziţie

$\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} : \mathcal{P}(A \times A) \to \mathcal{P}(A \times A)$ sunt operatori de închidere.

Relaţii binare

Observaţie

Fie $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale și
$R = |$ (relația de divizibilitate). Atunci $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R)) \neq \mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$.

Dacă A mulțime și $R \subseteq A \times A$ definim $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathcal{R}(R)))$.

Propoziţie

(1) $\mathcal{E}(R)$ este relație de echivalență oricare $R \subseteq A \times A$.
(2) Dacă $Q \subseteq A \times A$ este relație de echivalență și
$R \subseteq Q$ atunci $\mathcal{E}(R) \subseteq Q$.

Propoziţie

$\mathcal{E} : \mathcal{P}(A \times A) \to \mathcal{P}(A \times A)$ este operator de închidere.

Relaţii de echivalenţă

Exemple:

- Fie $k \geq 2$ și $\equiv \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $(n_1, n_2) \in \equiv$ ddacă ex. $x_1, x_2 \geq 0$, ex. $0 \leq r < k$ a.î.
  $n_1 = kx_1 + r$ și $n_2 = kx_2 + r$.

- Fie $f : A \to B$ o funcție și $\ker f \subseteq A \times A$
  $\ker f = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}$

- (X, E) un graf neorientat ($E \subseteq X \times X$), $\sim \subseteq X \times X$
  $(x, y) \in \sim$ ddacă $x = y$ sau există un drum de la x la y.

- Fie *Var* o mulțime de variabile și *Form* mulțimea formulelor calculului propozițional clasic care se pot construi folosind variabilele din *Var*. Definim $\sim \subseteq Form \times Form$ prin $(\varphi, \psi) \in \sim$ ddacă formula $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ este teoremă.

Relaţii de echivalenţă

Fie A o mulțime și $\sim \subseteq A \times A$ o relație de echivalență.
Vom nota prin $x \sim y$ faptul că $(x, y) \in \sim$.

Pentru orice $x \in A$ definim $\hat{x} = \{y \in A | x \sim y\}$
(clasa de echivalență a lui x).

Un **sistem de reprezentanți** pentru $\sim$ este o submultime $X \subseteq A$ cu proprietatea că oricare $a \in A$ există un unic $x \in X$ astfel încât $a \sim x$.

Propoziţie

Au loc următoarele proprietăți:
(1) $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x \sim y$
(2) $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset \Leftrightarrow x \not\sim y$
(3) $A = \bigcup \{\hat{x} | x \in X\}$ oricare ar fi $X \subseteq A$ un sistem de reprezentanți pentru $\sim$.

Partiţii

A mulţime

O **partiţie** a lui A este o familie $\{A_i\}_{i\in I}$ de submulţimi nevide ale lui A care verifică proprietăţile:
(p1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ oricare $i \neq j$,
(p2) $A = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Propoziţie

(1)Dacă $\{A_i\}_{i\in I}$ este o partiţie a lui A atunci relaţia

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ex } i \in I \text{ astfel încât } x, y \in A_i$$

este relaţie de echivalenţă pe A.
(2) Dacă $\sim \subseteq A \times A$ este relaţie de echivalenţă şi $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanţi, atunci $\{\hat{x} | x \in X\}$ este o partiţie a lui A.
(3) Există o bijecţie între mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A si mulţimea partiţiilor lui A.

Dem. exerciţiu

Mulţimea cât

A mulțime, $\sim \subseteq A \times A$ relație de echivalență pe A

Definim $A/_{\sim} = \{\hat{x} | x \in A\}$ (mulțimea claselor de echivalență).

Definim $p_{\sim} : A \to A/_{\sim}$, $p_{\sim}(x) = \hat{x}$ or. $x \in A$ (surjecția canonică).
Se observă că $\ker p_{\sim} = \sim$.

Proprietatea de universalitate a mulţimii cât

Fie B o mulțime și
$f : A \to B$ o funcție a.î. $\sim \subseteq \ker f$.
Atunci există o unică funcție
$\hat{f} : A/_{\sim} \to B$ a.î.
$\hat{f}(\hat{x}) = f(x)$ or. $x \in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_{\sim}"] \arrow[d, "f"'] & A/_{\sim} \arrow[dl, dotted, "\hat{f}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Dem. exercițiu

Cardinali

Două mulțimi A și B sunt **echipotente** dacă există o funcție bijectivă $f : A \to B$. În acest caz scriem $A \simeq B$.

Propoziție. Următoarele proprietăți sunt adevărate:
(i) $A \simeq A$,
(ii) $A \simeq B$ implică $B \simeq A$,
(iii) $A \simeq B$ și $B \simeq C$ implică $A \simeq C$.

Relația de echipotență este o relație de echivalență. Pentru o mulțime A definim **cardinalul** lui A ca fiind $|A| = \{B \mid A \simeq B\}$.

Două mulțimi finite sunt echipotente dacă și numai dacă au același număr de elemente. Cardinalul unei mulțimi finite este numărul de elemente.

Există mulțimi infinite care nu sunt echipotente: $\mathbb{N} \not\simeq 2^{\mathbb{N}}$.

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (*aleph-zero*) ,
$2^{\aleph_0} = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (*puterea continuului*)

Monoidul cuvintelor

Un **alfabet** este o mulțime de simboluri.
Un **cuvînt** este un șir finit de simboluri din alfabet.

Fie A un alfabet. Definim $A^+ = \{a_1 \ldots a_n \mid n \geq 1, a_1, \ldots, a_n \in A\}$ și $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ unde λ este *cuvîntul vid*.

Operația de concatenare $\cdot : A^* \times A^* \to A^*$ se definește prin

$$(a_1 \ldots a_n) \cdot (b_1 \ldots b_k) = a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_k$$

$(A^*, \cdot, \lambda)$ este un monoid și se numește
monoidul cuvintelor peste alfabetul A.

Pentru două cuvinte w, $w' \in A^*$ definim
$w \sim w'$ dacă și numai dacă au același număr de litere.

Exercițiu. $\sim$ este relație de echivalență pe A și $A/_{\sim} \simeq \mathbb{N}$.

Relaţii binare

Fie A mulțime și $R \subseteq A \times A$ o relație de preordine. Definim $x \sim y$ ddacă $(x, y) \in R$ și $(y, x) \in R$.

Propoziție. $\sim$ este relație de echivalență pe A.
Dem. exercițiu

Pe $A/\sim$ definim $\hat{x} \leq \hat{y} \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Lemă. $\leq$ este bine definită, adică
$x \sim x_1$, $y \sim y_1$ și $(x, y) \in R$ implică $(x_1, y_1) \in R$.
Dem. exercițiu

Propoziție. $\leq$ este relație de ordine pe $A/\sim$.
Dem. exercițiu

Relaţii binare

Exemple. Dezvoltați construcția anterioară pentru:

- $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$
  $R = \{((z_1, n_1), (z_2, n_2)) \in A \times A | z_1 \cdot n_2 \leq z_2 \cdot n_1\}$
  Arătați că $A/\sim \simeq \mathbb{Q}$.

- $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ funcție}\}$

  Fie f, $g \in A$. Spunem că $f \in O(g)$ dacă
  ex. $c > 0$ în $\mathbb{R}$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $f(n) \leq cg(n)$ or. $n \geq n_0$.

  $R = \{(f, g) \in A \times A | f \in O(g)\}$ este relație de preordine.

  $f \sim g \Leftrightarrow f \in O(g)$ și $g \in O(f)$ este relație de echivalență

  Pentru $f \in A$ clasa de echivalență a lui f se notează $\Theta(f)$ și se numește *rata de creștere* (*rate of growth*) a funcției f.

- Dacă A și B sunt mulțimi, definim
  $A \prec B$ ddacă ex. $f : A \to B$ funcție injectivă.

  Relația $\prec$ este preordine. Definim

  $A \sim B$ ddacă $A \prec B$ și $B \prec A$.

  Relația $\sim$ este o relatie de echivalență.

  Teorema Cantor-Scröder-Bernstein.
  Dacă există două funcții injective $f : A \to B$ și $g : B \to A$ atunci $A \simeq B$.

  Relația de ordine pe cardinali este definită prin:

  $|A| \leq |B|$ ddacă $A \prec B$ ddacă ex. $f : A \to B$ funcție injectivă.

MULTIMI PARTIALORDONATE. LATICI.
TEOREME DE PUNCT FIX

Mulţimi parţial ordonate

O mulțime parțial ordonată (**mpo**) este o pereche (A, R), unde A este o mulțime și R este o relație de ordine pe A.

Exemple.

- $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ unde T este o mulțime,
- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ cu $|$ relația de divizibilitate,
- $(Pf(A, B), \prec)$ unde
A, B sunt mulțimi,
$Pf(A, B) = \{f : A \rightharpoondown B | f$ functie parțială$\}$,
$f \prec g \Longrightarrow dom(f) \subseteq dom(g)$ si $f(a) = g(a)$ or. $a \in dom(f)$

Relațiile de ordine sunt uzual notate cu $\leq$.
Dacă $(A, \leq)$ este **mpo** si $\geq := \leq^{-1}$ atunci
$(A, \geq)$ este **mpo**.

Mulţimi total ordonate

Fie $(A, \leq)$ *mpo*. Două elemente a_1, $a_2 \in A$ se numesc **comparabile** dacă $a_1 \leq a_2$ sau $a_2 \leq a_1$.

Exemplu. In $(\mathbb{N}, |)$ elementele 2 si 4 sunt comparabile, dar elementele 3 si 7 nu sunt comparabile.

O relație de ordine parțială se numește **totală** (**liniară**) dacă oricare două elemente sunt comparabile. O **mulțime total ordonată** este o pereche $(A, \leq)$ unde A este o mulțime și $\leq$ este o relație de ordine totală pe A. Pentru mulțimile total ordonate este folosită și denumirea de **lanț**.

Exemplu. $(\mathcal{LR}, \leq_{lex})$ este lanț, unde $\mathcal{LR}$ este mulțimea cuvintelor din DEX, iar $\leq_{lex}$ este relația de ordine lexicografică.

Produsul cartezian de lanţuri

Fie $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ lanțuri.

- Pe $A_1 \times A_2$ definim **relația de ordine pe componente**
  $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 y_1$ si $x_2 \leq_2 y_2$.
  $(A_1 \times A_2, \leq)$ este **mpo**.
  Dacă $|A_1|$, $|A_2| \geq 2$ atunci $(A_1 \times A_2, \leq)$ **nu e lanț**.

Exemplu. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elementele $(2, 3)$ si $(4, 1)$ nu sunt comparabile.

- Pe $A_1 \times A_2$ definim **relația de ordine lexicografică**
  $(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq_1 y_1$ si $x_1 \neq y_1)$ sau
  $(x_1 = y_1$ si $x_2 \leq_2 y_2)$.
  $(A_1 \times A_2, \leq)$ este **lanț**.

Exercitiu. Definiți relația de ordine lexicografică pe produsul cartezian a n lanțuri $(A_1, \leq_1)$, $\cdots$, $(A_n, \leq_n)$.

Elemente minimale si maximale

Fie $(A, \leq)$ **mpo**. Un element $e \in A$ se numește

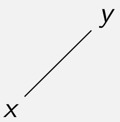
- **element minimal** dacă $(a \leq e \Rightarrow a = e)$;
- **prim element** (**minim**) dacă $e \leq a$ or $a \in A$;
- **element maximal** dacă $(e \leq a \Rightarrow a = e)$;
- **ultim element** (**maxim**) dacă $a \leq e$ or $a \in A$.

Exemplu. In **mpo** $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$, elementele minimale sunt 2 si 5, iar elementele maximale sunt 12, 20, 25.

Orice minim (maxim) este element minimal (maximal).
Invers nu este adevărat.

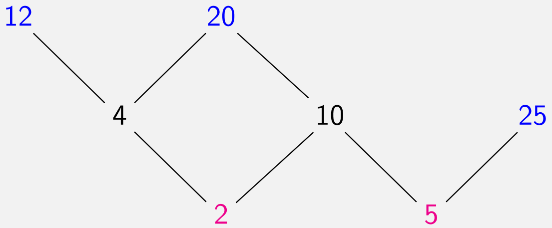
Diagrame Hasse

$x \leq y$ este reprezentat prin



segment crescător

Exemplu. $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ este reprezentata prin



Sortarea topologică

Este folosită în probleme de planificare. Presupunem că un project este format din mai multe procese care se conditioneaza intre ele: procesul p nu poate începe decât după terminarea procesului q. Mulțimea proceselor devine astfel mulțime parțial ordonată $(P, \leq)$. Se pune problema găsirii unei secvențe de execuție a proceselor.

O relație de ordine totală $\triangleleft \subseteq P \times P$ este compatibilă cu relația de ordine parțială $\leq$ dacă $x \leq y \Rightarrow x \triangleleft y$ oricare x, $y \in P$. Determinarea unei relații de ordine totale compatibile cu o relație de ordine parțială dată se numește **sortare topologică**.

Algoritm de sortare topologică

Intrare: $(P, \leq)$ **mpo**, $n = |P|$ $k := 1$

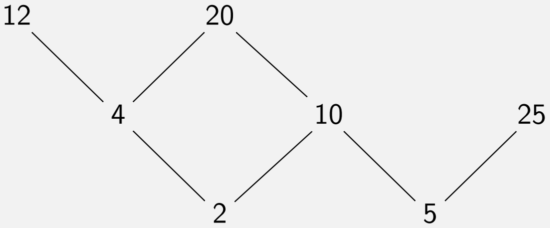
while $P \neq \emptyset$
$\{$
$p_k :=$ un element minimal al lui P;

$P := P \setminus \{p_i\}$;

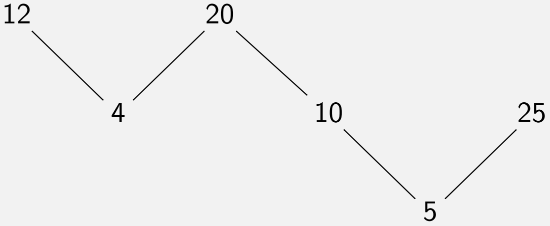
$k := k + 1$
$\}$

Iesire: $p_1 \lhd \cdots \lhd p_n$ este o ordonare totala compatibilă

Sortare topologică

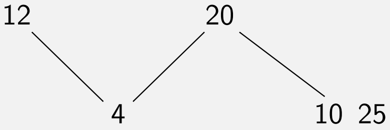


$x_1 := 2$

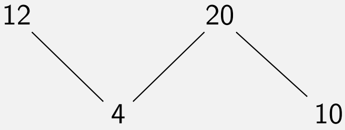


$x_2 := 5$

Sortare topologică



$x_3 := 25$



$x_4 := 4$

$\vdots$

$2 \lhd 5 \lhd 25 \lhd 4 \lhd 10 \lhd 12 \lhd 20$

Soluția nu este unică.

PBO şi PI

O **mpo** $(A, \leq)$ este **bine ordonată** dacă orice submulţime nevidă a sa are prim element.

Observaţie. Orice mulţime bine ordonată este lanţ.

Principiul Bunei Ordonări. $\mathbb{N}$ este bine ordonată (faţă de relaţia de ordine uzuală).

Principiul Inducţiei. Dacă $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:
(i) $0 \in S$,
(ii) or. $n \in \mathbb{N}$ $(n \in S \Rightarrow n + 1 \in S)$,
atunci $S = \mathbb{N}$.

Infimum si supremum

Fie $(A, \leq)$ **mpo**. Un element $a \in A$ se numește

- **minorant** al lui X daca $a \leq x$ or. $x \in X$;
- **majorant** al lui X daca $x \leq a$ or. $x \in X$;
- **infimum** al lui X daca a este cel mai mare minorant (a este ultim element in multimea minoranților lui X);
- **supremum** al lui X dacă a este cel mai mic majorant (a este prim element in multimea majoranților lui X).

Exercițiu. Infimumul (supremumul) unei mulțimi, dacă există, este unic.

Infimumul (supremumul) lui X îl vom nota $\inf X$ ($\sup X$).
Dacă $X = \{x_1, x_2\}$ atunci notăm $\inf\{x_1, x_2\}$, $\sup\{x_1, x_2\}$.

Exemple

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $X = (3, 4]$, $Y = \mathbb{N}$
mulțimea majoranților lui X este $[4, \infty)$,
4 este ultim element pt. X,
mulțimea minoranților lui X este $(-\infty, 3]$,
3 este infimum pt. X,
Y nu are majoranți (ultim element, supremum),
mulțimea minoranților lui Y este $(-\infty, 0)$,
0 este prim element pt. Y .

- $(\mathbb{N}, |)$, $X = \{n_1, n_2\}$
$\sup X = \sup\{n_1, n_2\} = cmmmc\{n_1, n_2\}$
$\inf X = \inf\{n_1, n_2\} = cmmdc\{n_1, n_2\}$

- $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$, $X = \{12, 20, 25\}$
X nu are minoranți si nici majoranți

- $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(T)$
$\sup \mathcal{X} = \bigcup\{Y | Y \in \mathcal{X}\}$, $\inf \mathcal{X} = \bigcap\{Y | Y \in \mathcal{X}\}$

CPO. Latici

CPO

O **mpo completă** (CPO) este o mulțime parțial ordonată $(C, \leq)$ cu proprietățile:

- C are prim element $\perp$,
- $\sup X$ există pentru orice **lanț** $X \subseteq C$.

Exemplu. $(Pf(A, B), \prec)$ este CPO.

Latice

O **mpo** $(L, \leq)$ este **latice** dacă $\sup\{x_1, x_2\}$ si $\inf\{x_1, x_2\}$ există oricare ar fi x_1, $x_2 \in L$. Laticea $(L, \leq)$ este **completă** dacă $\inf X$ si $\sup X$ există oricare ar fi $X \subseteq L$.
Exemplu. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ este latice completă.

Exerciţiu.

(a) Orice latice completă este CPO.
(b) Orice latice completă are prim si ultim element.

Funcţie crescătoare. Puncte fixe.

Funcţie crescătoare

Dacă $(A, \leq_A)$ si $(B, \leq_B)$ sunt **mpo** atunci o funcție $f : A \to B$ este **crescătoare** dacă $a_1 \leq_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2)$ or. a_1, $a_2 \in A$.

Funcţie continuă

Dacă $(A, \leq_A)$ si $(B, \leq_B)$ sunt CPO atunci o funcție $f : A \to B$ este **continuă** dacă pentru orice lanț $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ din A

$$f(\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}) = \sup\{f(a_n) | n \in N\}.$$

Exercitiu. Orice funcție continuă este crescătoare.

Punct fix

Un element $a \in A$ este **punct fix** al unei funcții $f : A \to A$ dacă

$$f(a) = a.$$

Teoreme de punct fix

Teorema Knaster-Tarski pentru latici complete

Fie $(L, \leq)$ latice completă și $\mathbf{F} : L \to L$ o funcție crescătoare. Atunci $a = \inf\{x \in L | \mathbf{F}(x) \leq x\}$ este cel mai mic punct fix al funcției $\mathbf{F}$.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Fie $(C, \leq)$ o CPO si $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă. Atunci $a = \sup\{\mathbf{F}^n(\perp) | n \in \mathbb{N}\}$ cel mai mic punct fix al funcției $\mathbf{F}$.

Observăm că în ipotezele ultimei teoreme secvența
$\mathbf{F}^0(\perp) = \perp \leq \mathbf{F}(\perp) \leq \mathbf{F}^2(\perp) \leq \cdots \leq \mathbf{F}^n(\perp) \leq \cdots$
este un lanț, deci a există.

Teoreme de punct fix

Exemplu.
$Pf(\mathbb{N},\mathbb{N})$ CPO, $\perp : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$, $\perp(k)$ nedefinită or. $k \in \mathbb{N}$
$\mathbf{F} : Pf(\mathbb{N},\mathbb{N}) \to Pf(\mathbb{N},\mathbb{N})$

$$\mathbf{F}(g)(k) := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ k * g(k-1), & k > 0 \text{ si } g(k-1) \text{ e definită} \\ \text{nedefinit}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Deoarece **F** este continuă, conform Teoremei Knaster-Tarski, cel mai mic punct fix al funcției **F** este $f = \sup\{\mathbf{F}^n(\perp) | n \in \mathbb{N}\}$.

$$f(k) = \mathbf{F}(f)(k) := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ k * f(k-1), & k > 0 \text{ si } f(k-1) \text{ e definită} \\ \text{nedefinit}, & \text{altfel} \end{cases}$$

***f* este funcția factorial.**

Teoremele de punct fix sunt folosite in semantica denotațională pentru a defini semantica instrucțiunii **while**.

Latici

Definitia L1.

O **mpo** $(L, \leq)$ este latice dacă $\sup\{x_1, x_2\}$, $\inf\{x_1, x_2\}$ există oricare x_1, $x_2 \in L$.

Infimumul (supremumul) devin operații pe L:
$\vee : L \times L \to L$, $x_1 \vee x_2 := \sup\{x_1, x_2\}$,
$\wedge : L \times L \to L$, $x_1 \wedge x_2 := \inf\{x_1, x_2\}$.

Propoziţia L1-2.

Următoarele identități sunt satisfăcute:

- asociativitate:
  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
- comutativitate: $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$,
- absorbție: $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$.

Demonstrație. exercitiu.

Laticea $(L, \leq)$ devine structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$.

Definiţia Algebrică a Laticilor

Definitia L2.
O **latice** este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$ unde $\vee$ si $\wedge$ sunt operații binare asociative, comutative și care verifică proprietățile de absorbție.

Lema. $x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ or. $x,\ y \in L$.
Demonstrație. Daca $x \vee y = y$, atunci $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$.

Propozitia L2-1.

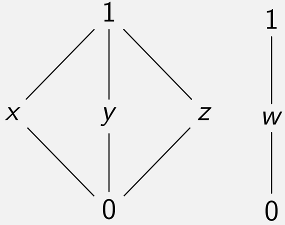
Fie $(L, \vee, \wedge)$ in sensul Definiției L2. Definim
$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.
Atunci $(L, \leq)$ este latice in sensul Definitiei L1. In plus
$\sup\{x, y\} = x \vee y$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ or. $x,\ y \in L$.
Demonstrație. exercițiu.

Latici marginite

O latice este **marginită** dacă are prim și ultim element. Primul element se notează cu 0, iar ultimul element se notează cu 1.
O latice marginită va fi notata prin $(L, \leq, 0, 1)$, iar ca structură algebrică prin $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$. Se observă că:
$x \vee 0 = x$, $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 1 = x$ or. $x \in L$.

Elementul x este **complement** al lui y daca $x \vee y = 1$ si $x \wedge y = 0$.
O latice este **complementată** dacă orice element are cel puțin un complement.

Exemplu. Determinați elementele complementate în laticile:



Algebre Boole

O latice $(L, \vee, \wedge)$ este **distributivă** dacă, or x, $y \in L$:
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ și $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Lemă

Într-o latice distributivă și marginită, un element are cel mult un complement.

Demostrație. Fie y_1, y_2 complemente pentru x. Obținem
$y_1 = y_1 \wedge 1 = y_1 \wedge (y_2 \vee x) = y_1 \wedge y_2 = y_2 \wedge (y_1 \vee x) = y_2 \wedge 1 = y_2$

O **algebra Boole** este o latice distributivă și complementată cu prim si ultim element. Dacă B este o algebră Boole, atunci pentru orice element există un unic complement. Putem defini o operație

$$^{-} : B \to B \text{ prin } \overline{x} := \text{complementul lui } x.$$

O algebră Boole este o structură algebrică

$$(B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1).$$

ALGEBRE BOOLE

Scurt istoric

1854 George Boole: *The Laws of Thought*

All the operations of Language, as an instrument of reasoning, may be conducted by a system of signs composed of the following elements: literal symbols, ...signs of operation, ... the sign of identity =. And these symbols of Logic are in their use subject to definite laws, partly agreeing with and partly differing from the laws of the corresponding symbols in the science of Algebra.

1904 Edward V. Huntington: *Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic*

1936 Marshall H. Stone: *The Theory of Representations of Boolean Algebras*

1938 Claude E. Shannon: *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*

Algebra Logicii

George Boole - *The Mathematical Analysis of Logic* (1847)
Analiza raționamentelor prin metode asemănătoare calculului algebric.

Exemplu. Fie a, b, c și d proprietăți ale substanțelor care pot interac tiona în cadrul unui experiment. Se cunosc următoarele:
(1) a și b apar simultan $\Rightarrow$ apare numai una dintre c și d,
(2) b și c apar simultan $\Rightarrow$ fie a și d apar simultan,
fie nu apare nici una,
(3) nici una dintre a și b nu apare $\Rightarrow$ nici una dintre c și d nu apare,
(4) nici una dintre c și d nu apare $\Rightarrow$ nici una dintre a și b nu apare.

Demonstrați că:
(a) nici una dintre a și b nu apare $\Rightarrow$ nu apare nici c,
(b) a, b și c nu apar simultan.

Algebra Logicii

Fie A, B, C și D mulțimile substanțelor care au, respectiv, proprietățile a, b, c și d.

(1) a și b apar simultan $\Rightarrow$ cu siguranță apare una dintre c și d,
$A \cap B \subseteq (C \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{C})$

(2) b și c apar simultan $\Rightarrow$ fie a și d apar simultan,
fie nu apare nici una,
$B \cap C \subseteq (A \cap D) \cup (\overline{A} \cap \overline{D})$

(3) nici una dintre a și b nu apare $\Rightarrow$ nici una dintre c și d nu apare,
$\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{C} \cap \overline{D}$

(4) nici una dintre c și d nu apare $\Rightarrow$ nici una dintre a și b nu apare.
$\overline{C} \cap \overline{D} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Notăm $AB = A \cap B$. Folosim $A \subseteq B \Leftrightarrow A\overline{B} = \emptyset$.

Ipotezele:
(1) $AB(\overline{C} \cup D)(C \cup \overline{D}) = \emptyset$
(2) $BC(\overline{A} \cup \overline{D})(A \cup D) = \emptyset$
(3) $\overline{A}\ \overline{B}(C \cup D) = \emptyset$
(4) $\overline{C}\ \overline{D}(A \cup B) = \emptyset$

Concluzia:
(1) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{C} \Leftrightarrow \overline{A}\ \overline{B}C = \emptyset$

Demonstrația:
$\overline{A}\ \overline{B}(C \cup D) = \emptyset \Rightarrow \overline{A}\ \overline{B}C \cup \overline{A}\ \overline{B}D = \emptyset \Rightarrow \ \overline{A}\ \overline{B}C = \emptyset$ și $\overline{A}\ \overline{B}D = \emptyset$

(2) exercițiu.

Algebra Boole

O **algebră Boole** este o latice distributivă și complementată cu prim și ultim element.
În consecință, o algebră Boole este o structură

$$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$$

care satisface următoarele identități:

(L1) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,

(L2) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$,

(L3) $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$,

(D) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

(P) $x \vee 0 = x$, $x \wedge 0 = 0$,

(U) $x \wedge 1 = x$, $x \vee 1 = 1$,

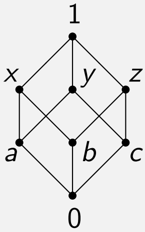
(C) $x \vee \overline{x} = 1$, $x \wedge \overline{x} = 0$.

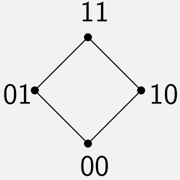
Exemple

- $L_2 = (\{0,1\}, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$,
- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, ^-, \emptyset, T)$
- Algebra Lindenbaum-Tarski a calculului propozițional.
- Mulțimea evenimentelor asociate unui experiment.
- Mulțimea închis-deschișilor unui spațiu topologic.

Exercițiu. Dacă $(A_i, \vee_i, \wedge_i, ^{-_i}, 0_i, 1_i)$ sunt algebre Boole oricare $1 \leq i \leq n$ atunci $A_1 \times \cdots \times A_n$ este algebră Boole cu operațiile definite pe componente.

Diagrame Hasse





$\overline{a} = z$, $\overline{b} = y$, $\overline{c} = x$

Reguli de calcul

$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ algebră Boole

- $x \vee y = 1$ si $x \wedge y = 0 \Rightarrow y = \overline{x}$,

$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee \overline{x}) = (y \wedge x) \vee (y \wedge \overline{x}) = y \wedge \overline{x} =$
$(y \wedge \overline{x}) \vee 0 = (y \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge \overline{x}) = \overline{x} \wedge (y \vee x) = \overline{x} \wedge 1 = \overline{x}$

- principiul dublei negații: $\overline{\overline{x}} = x$,

Atât $\overline{\overline{x}}$, cât și x satisfac ecuațiile care definesc în mod unic complementul lui $\overline{x}$.

- $x \leq y \Rightarrow x \vee z \leq y \vee z$, $x \wedge z \leq y \wedge z$

- $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge \overline{y} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} \vee y = 1 \Leftrightarrow \overline{y} \leq \overline{x}$

$x \leq y \Rightarrow x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} \Rightarrow x \wedge \overline{y} = 0$
$x \wedge \overline{y} = 0 \Rightarrow y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = y \vee x \Rightarrow x \leq y$

Reguli de calcul

$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ algebră Boole

- $\vee$ si $\wedge$ sunt *idempotente*

$x \vee x = x \wedge x = x$

$x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = x$, $x \wedge x = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = x$

- Legile lui De Morgan

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

Se demonstrează că $\overline{x} \wedge \overline{y}$ satisface ecuațiile care definesc în mod unic complementul lui $x \vee y$.

ALGEBRE BOOLE - MATERIAL SUPLIMENTAR

Operaţiile $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $+$

$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ algebra Boole

- $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$

$x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1$,
$x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$, $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$.

- $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

$x \leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = y$,
$\overline{x} \leftrightarrow \overline{y} = x \leftrightarrow y$, $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$.

- $x + y := (x \leftrightarrow y)^d = (\overline{x} \wedge y) \vee (\overline{y} \wedge x)$

$x + x = 0$, $x + y = y + x$,
$x + z \leq (x + y) \vee (y + z)$.
Operația $(x, y) \mapsto x + y$ are proprietățile unei "distanțe".

Exemple fundamentale

- Câmp de mulțimi (field of sets)

$A \subseteq \mathcal{P}(X)$ cu astfel ˆ incât $\emptyset \in A$ și
$X_1, X_2 \in A \Rightarrow X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2, \overline{X_1} \in A$.
Atunci $(A, \cap, \cup, ^-, \emptyset, A)$ este o algebră Boole de mulțimi.

- $F \subseteq \{0,1\}^X$ astfel încât $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in F$ și

$f_1, f_2 \in F \Rightarrow f_1 \vee f_2, f_1 \wedge f_2, \overline{f_1} \in F$,
unde, oricare $x \in X$, $\mathbf{0}(x) := 0$, $\mathbf{1}(x) := 1$, $\overline{f_1} := \overline{f_1(x)}$,
$(f_1 \vee f_2)(x) := f_1(x) \vee f_2(x)$, $(f_1 \wedge f_2)(x) := f_1(x) \wedge f_2(x)$.
Atunci $(F, \vee, \wedge, ^-, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ este o algebră Boole de funcții.

Teorema de reprezentare a lui Stone afirmă că orice algebră Boole poate fi reprezentată printr-o algebră Boole care are una din formele de mai sus. În continuare vom demonstra aceasta teoremă.

Noţiuni de algebră universală

Următoarele noțiuni se definesc pentru orice clasă de structuri algebrice:

- subalgebră,
- morfism, izomorfism, scufundare,
- congruență.

Vom defini aceste noțiuni pentru algebrele Boole.

Exercițiu. Definiți noțiunile de subalgebră, morfism si congruență pentru latici ca structuri algebrice.

Subalgebre

$(A, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ algebră Boole

Definitie

Fie $S \subseteq A$ astfel incat 0, $1 \in S$ și

$$x,\ y \in S \Rightarrow x \vee y,\ x \wedge y,\ \overline{x} \in S.$$

Atunci $(S, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ este o algebră Boole, unde $\vee$, $\wedge$ si $^-$ sunt restricțiile operațiilor din A.
În acest caz spunem că S este o **subalgebră** a lui A.

Exemplu. Dacă $A = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ atunci care din mulțimile

$$S_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, A\} \text{ si } S_2 := \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, A\}$$

este subalgebră a algebrei Boole $(A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$?

Morfisme Booleene

$(A, \vee_A, \wedge_A, ^{-}, 0_A, 1_A)$, $(B, \vee_B, \wedge_B, ^{\sim}, 0_B, 1_B)$ algebre Boole

Definiţie

O funcție $f : A \to B$ este un **morfism de algebre Boole** dacă:

- $f(0_A) = 0_B$, $f(1_A) = 1_B$,
- $f(\overline{x}) = \widetilde{f(x)}$,
- $f(x \vee_A y) = f(x) \vee_B f(y)$, $f(x \wedge_A y) = f(x) \wedge_B f(y)$.

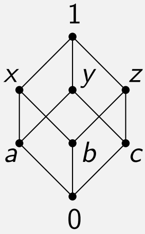
Un morfism injectiv se numeste **scufundare**.

Izomorfism

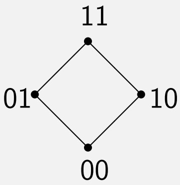
Un **izomorfism** este un morfism bijectiv. Spunem ca algebrele Boole A si B sunt **izomorfe** dacă există un izomorfism $f : A \to B$. În acest caz scriem $A \simeq B$.

Exercițiu. Dacă $f : A \to B$ este un izomorfism de algebre Boole atunci $f^{-1} : B \to A$ este de asemenea un izomorfism.

Exemple



A

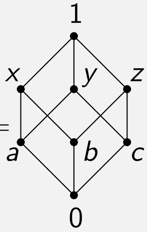


B

- $f : A \to B$ definit prin
  $f(a) = f(b) = f(c) = 01$ si $f(x) = f(y) = f(z) = 10$
  e un morfism surjectiv
- $g : B \to A$ definit prin $g(10) = a$ si $g(01) = z$
  este o scufundare

Algebre izomorfe

- Consideram urmatoarele algebre Boole:

$A=$ 

$C = (\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, C)$
$D = (\{0,1\}^3, \vee, \wedge, ^{-}, 000, 111)$

Atunci $A \simeq C \simeq D$

Structurile izomorfe sunt identice modulo redenumire.

Congruenţe

$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ algebră Boole

Definitie

O **congruență** pe A este o relație $\equiv \subseteq A \times A$ care verifică următoarele proprietăți:

- $\equiv$ este relație de echivalență,
- $x \equiv y \Rightarrow \overline{x} \equiv \overline{y}$,
- $x_1 \equiv y_1$ si $x_2 \equiv y_2 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \equiv y_1 \vee y_2$ $x_1 \wedge x_2 \equiv y_1 \wedge y_2$.

Construcţia algebrei cât

Pe mulțimea claselor de echivalență $A/\equiv$ definim:

$$\hat{x} \vee \hat{y} := \widehat{x \vee y}, \quad \hat{x} \wedge \hat{y} := \widehat{x \wedge y}, \quad \overline{\hat{x}} := \hat{\overline{x}}.$$

Atunci $(A/\equiv, \vee, \wedge, ^{-}, \hat{0}, \hat{1})$ este o algebră Boole.

Construcţia algebrei cât

Demonstrație.*

Fie $(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ o algebra Boole si $\equiv$ o congruență pe A. Pe mulțimea claselor de echivalență $A/\equiv$ definim:

$$\hat{x} \vee \hat{y} := \widehat{x \vee y}, \quad \hat{x} \wedge \hat{y} := \widehat{x \wedge y}, \quad \overline{\hat{x}} := \hat{\overline{x}}.$$

Demonstrăm că definițiile operațiilor pe clase de echivalență sunt independente de reprezentanți, i.e.
$\hat{x} = \hat{z},\ \hat{y} = \hat{u} \Rightarrow \widehat{x \vee y} = \widehat{z \vee u},\ \widehat{x \wedge y} = \widehat{z \wedge u},\ \hat{\overline{x}} = \hat{\overline{z}}$.
Dacă $\hat{x} = \hat{z}$ atunci $x \equiv z$.Deoarece $\equiv$ este congruență, obținem $\overline{x} \equiv \overline{z}$, deci $\hat{\overline{x}} = \hat{\overline{z}}$. Am demonstrat că definiția operației $^{-}$ în algebre cât este corectă.

Demonstrarea identităților este imediată:
$\hat{x} \vee \overline{\hat{x}} = \hat{x} \vee \hat{\overline{x}} = \widehat{x \vee \overline{x}} = \hat{1}$.

Exercițiu. Arătați că funcția $p : A \to A/\equiv$, definită prin $p(x) := \hat{x}$ este morfism de algebre Boole.

Exemplu

$A = \{x_1 x_2 \cdots x_n \,|\, x_i \in \{0,1\}$ oricare $i\}$, unde $n \geq \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$(A, \vee, \wedge, ^-, 0 \cdots 0, 1 \cdots 1)$ este algebră Boole, unde operațiile sunt definite pe componente

Fie $k \in \{1, \ldots, n\}$ si $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$.

Definim $x_1 x_2 \cdots x_n \equiv y_1 y_2 \cdots y_n \Leftrightarrow x_{n_i} = y_{n_i}$ oricare $1 \leq i \leq k$.

Atunci $\equiv$ este o congruență pe A.

Exercițiu. Demonstrați că $L_2^k \simeq A/\equiv$.

Filtre si Ideale

În unele clase de structuri (inele, module, grupuri, algebre Boole) congruențele sunt unic determinate de submulțimi particulare.

$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ algebră Boole

Definiţie

O submulțime $F \subseteq A$ se numeste **filtru** dacă:

- $1 \in F$,
- $x \in F$, $x \leq y \Rightarrow y \in F$,
- x, $y \in F \Rightarrow x \wedge y$.

Un filtru F se numeste **propriu** dacă $0 \notin F$ $(F \neq A)$.

Exercițiu. Noțiunea duală este cea de **ideal**. Definiți noțiunea de ideal folosind principiul dualizării.

Filtre

Exemple.

- $\{1\}$ este filtru.
- Mulțimea $\{\{a\}, 1\}$ este filtru in $\mathcal{P}(\{a, b\})$.
- Dacă A este o algebră Boole, atunci mulțimea

$$[a) := \{x \in A \,|\, a \leq x\}$$

este filtru oricare $a \in A$. Observam ca $[a)$ este propriu dacă și numai dacă $a \neq 0$.

- Dacă $f : A \to B$ este un morfism de algebre Boole atunci

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in A | f(x) = 1\}$$

este filtru in A.

- Fie A o algebra Boole si $F \subseteq A$. Daca F este filtru si subalgebra a lui A, atunci $F = A$.

Filtre si congruenţe*

$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ algebră Boole

Teoremă*

(1) Dacă $F \subseteq A$ filtru, definim $\equiv_F \subseteq A \times A$ prin

$$x \equiv_F y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F \Leftrightarrow x \rightarrow y \in F \text{ si } y \rightarrow x \in F.$$

Atunci $\equiv_F$ este o congruență pe A.

(2) Dacă $\equiv \subseteq A \times A$ este o congruență pe A, definim

$$\mathbf{F}_{\equiv} := \hat{1} = \{x \in A \,|\, x \equiv 1\}.$$

Atunci $\mathbf{F}_{\equiv}$ este filtru în A.

(3) Dacă $F \subseteq A$ este un filtru și $\equiv \subseteq A \times A$ este o congruență, atunci $F = \mathbf{F}_{\equiv_F}$ si $\equiv = \equiv_{\mathbf{F}_{\equiv}}$.

Exista o bijecție între filtre si congruente. Vom nota

$$A/F := A/\equiv_F$$

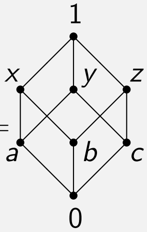
Demonstrație*.

(1), (2) exercițiu.

(3) Dacă F este un filtru și $x \in A$, atunci
$x \in \mathbf{F}_{\equiv_F} \Leftrightarrow x \equiv_F 1 \Leftrightarrow x \leftrightarrow 1 \in F \Leftrightarrow x \in F$.

Fie $\equiv$ congruență si $x \equiv y$ in A. Atunci
$x \to y \equiv y \to y$, deci $x \to y \equiv 1$
și, similar, $y \to x \equiv 1$. Rezulta $x \leftrightarrow y \equiv 1$,
deci $x \leftrightarrow y \in \mathbf{F}_{\equiv}$, adica $x \equiv_{\mathbf{F}_{\equiv}} y$.
Am demonstrat că $\equiv \subseteq \equiv_{\mathbf{F}_{\equiv}}$.
Invers, fie $x \equiv_{\mathbf{F}_{\equiv}} y$, adică $x \leftrightarrow y \in \mathbf{F}_{\equiv} y$.
Rezultă $x \leftrightarrow y \equiv 1$, deci $x \to y \equiv 1$ si $y \to x \equiv 1$.
Obținem $x = x \wedge 1 \equiv x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$
și, similar, $y \equiv x \wedge y$. Așadar $x \equiv y$ și
am demonstrat că $\equiv_{\mathbf{F}_{\equiv}} \subseteq \equiv$.

Filtrele cubului

$A=$ 

- $F_0 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$,
  $F_1 = \{a, x, y, 1\}$, $F_2 = \{b, x, z, 1\}$, $F_3 = \{c, y, z, 1\}$
  $F_4 = \{x, 1\}$, $F_5 = \{y, 1\}$, $F_6 = \{z, 1\}$
- $u \equiv_{F_1} v \Leftrightarrow u \leftrightarrow v \in F_1 \Leftrightarrow a \leq u \rightarrow v$ si $a \leq v \rightarrow u$.

Exerciţiu. Demonstraţi că $u \equiv_{F_1} v \Leftrightarrow a \wedge u = a \wedge v$ or. u, $v \in A$.
Exerciţiu. Determinaţi algebra cât pentru filtrele F_0, ..., F_7 .

Ultrafiltre

$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ algebră Boole

Teorema de caracterizare a ultrafiltrelor
Pentru un filtru propriu $F \subseteq A$ urmatoarele afirmații sunt echivalente:

(1) $x \in F \Leftrightarrow \overline{x} \notin F$ or. $x \in A$,

(2) $x \vee y \in F \Leftrightarrow x \in F$ sau $y \in F$ or. $x, y \in A$,

(3) $F \subseteq U$, U filtru propriu $\Rightarrow F = U$.

Definitie
Un **ultrafiltru** este un filtru propriu care verifica proprietatile echivalente de mai sus. Observam ca ultrafiltrele sunt **elemente maximale** in multimea filtrelor proprii, ordonata cu incluziunea.

Exerciţiu. F este ultrafiltru $\Leftrightarrow A/F \simeq L_2$

Caracterizarea ultrafiltrelor

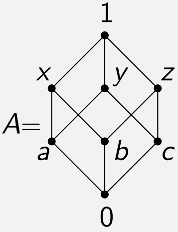
Demonstrația.*

(1⇒ 2) Implicația $\Leftarrow$ este evidentă.
$\Rightarrow$ Fie $x, y \in A$ astfel încât $x \vee y \in F$ și $x \notin F$. Atunci $\overline{x} \in F$, deci $(x \vee y) \wedge \overline{x} = y \wedge \overline{x} \in F$. Deoarece $y \wedge \overline{x} \leq y$, rezulta $y \in F$.

(2⇒ 3) Fie U un filtru propriu astfel încât $F \subseteq U$. Presupunem ca există $x \in U \setminus F$. Deoarece $1 = x \vee \overline{x} \in F$ si $x \notin F$, rezultă $\overline{x} \in F$. În consecință $\overline{x} \in U$, deci $x \wedge \overline{x} = 0 \in U$. Contrazicem faptul că U este propriu, deci presupunerea a fost eronată. Rezultă $U = F$.

(3⇒ 1) Fie $x \in A$ astfel încât $x \notin F$. Dacă
$U := \{a \in A |$ exista $f \in F$ astfel incat $f \wedge x \leq a\}$
atunci U este filtru, $F \subseteq U$ si $x \in U$ (exercitiu). Deoarece $U \neq F$, rezultă că U nu e propriu, deci $0 \in U$. Așadar există $f \in F$ astfel încât $f \wedge x = O$, adică $f \leq \overline{x}$.
Am demonstrat că $\overline{x} \in F$.

Filtrele cubului



- $F_0 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$

  $F_1 = \{a, x, y, 1\},\ F_2 = \{b, x, z, 1\},\ F_3 = \{c, y, z, 1\}$ ultrafiltre

  $F_4 = \{x, 1\},\ F_5 = \{y, 1\},\ F_6 = \{z, 1\}$

Existenţa ultrafiltrelor

Fie $(A, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ algebra Boole.

Mulțimea filtrelor proprii ale algebrei A este nevidă, deoarece $\{1\}$ este filtru propriu în orice algebra Boole.

Pentru a demonstra existența ultrafiltrelor folosim un rezultat echivalent cu **Axioma alegerii** în sistemul axiomatic **Zermelo-Fraenkel**, si anume **Lema lui Zorn**.

Lema lui Zorn

Fie $(P, \leq)$ o **mpo** cu proprietatea că orice lanț $C \subseteq P$ are majorant. Atunci P are cel putin un element maximal.

Existenţa ultrafiltrelor

Propoziţie

Dacă $x \neq 0$ in A atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$.

Dem. Dacă $\mathcal{P} = \{F \mid F \text{ filtru propriu}, x \in F\}$, atunci $(\mathcal{P}, \subseteq)$ este **mpo**. Obervăm că $\mathcal{P}$ este nevidă, deoarece $[x)$ este propriu, deci $[x) \in \mathcal{P}$. Fie $\mathcal{C}$ un lanț din $\mathcal{P}$ și $V := \bigcup\{F \mid F \in \mathcal{C}\}$. Atunci V este un filtru (exercițiu) și $a \in V$, deci V este majorant pentru $\mathcal{C}$. Am demonstrat că orice lanț are un majorant, deci Lema lui Zorn asigură exitența unui element maximal U in $\mathcal{P}$. Aratăm că U este ultrafiltru în A. Fie $U \subseteq U'$, unde U' este un filtru propriu. Atunci $x \in U'$, deci $U' \in \mathcal{P}$. Cum U este maximal în $\mathcal{P}$, obținem $U = U'$.

Existenţa ultrafiltrelor

Propoziţie

Dacă $x \neq 0$ în A atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$.

Corolar 1. Mulțimea ultrafiltrelor este nevidă.

Corolar 2. $\bigcap\{U \subseteq A \,|\, U \text{ ultrafiltru}\} = \{1\}$.

Dem. Fie $x \in U$ oricare ar fi U ultrafiltru și presupunem că $x \neq 1$. Atunci $\overline{x} \neq 0$, deci există un ultrafiltru V astfel încât $\overline{x} \in V$. Rezultă $0 = x \wedge \overline{x} \in V$, ceea ce contrazice faptul că V este ultrafiltru.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Pentru orice algebră Boole A există o mulțime X și un morfism injectiv $d : A \to \mathcal{P}(X)$.

Observaţie

Orice algebra Boole este izomorfă cu o algebră Boole de mulțimi:

$$A \simeq d(A) \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Corolar

Pentru orice algebra Boole A exista o mulțime X și un morfism injectiv $d : A \to L_2^X$.

Dem. Este consecință a faptului că $\mathcal{P}(X) \simeq L_2^X$.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Demonstrație.

Fie A o algebră Boole și fie $\mathcal{U}$ mulțimea ultrafiltrelor lui A. Definim $d : A \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ prin $d(a) := \{U \in \mathcal{U} \mid a \in U\}$.

Fie x, $y \in A$ si $U \in \mathcal{U}$.
$U \in d(\overline{x}) \Leftrightarrow \overline{x} \in U \Leftrightarrow x \notin U \Leftrightarrow U \in \overline{d(x)}$

$U \in d(x \vee y) \Leftrightarrow x \vee y \in U \Leftrightarrow x \in U$ sau $y \in U \Leftrightarrow U \in d(x) \cup d(y)$

Am demonstrat că $d(\overline{x}) = \overline{d(x)}$ și $d(x \vee y) = d(x) \cup d(y)$, deci d este un morfism Boolean.

Fie x, $y \in A$ astfel încât $d(x) = d(y)$. Atunci
$d(x \leftrightarrow y) = d(x) \leftrightarrow d(y) = \mathcal{U}$, adică
$x \leftrightarrow y \in \bigcap\{U \mid U$ ultrafiltru in $A\}$.
Rezultă $x \leftrightarrow y = 1$, deci $x = y$.
Am demonstrat că d este un morfism injectiv.

Atomi

$(A, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ algebră Boole

Definiţie

Elementele minimale în $A \setminus \{0\}$ se numesc **atomi**. Algebra A se numește atomică dacă pentru orice $x \neq 0$ există un atom $a \in A$ astfel încât $a \leq x$.

Exemple

- $A = L_2^n$ are n atomi:
$(0, \ldots, 0)$, $(1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, \ldots, 0, 1)$
- $B = \mathcal{P}(X)$ are atomii de forma $\{x\}$ cu $x \in X$.

Algebre Boole finite

Exerciţii

- a este atom $\Leftrightarrow$ $[a)$ este ultrafiltru.
- Dacă A este atomică atunci $x = \bigvee\{a \in$A$|$ a atom, $a \leq x\}$ or. $x \neq 0$.
- Orice algebră Boole finită este atomică.

Propoziţie

Fie A o algebra Boole finită, $At(A)$ mulțimea atomilor lui A, $\mathcal{U}(A)$ mulțimea ultrafiltrelor lui A.

- Dacă $U \in \mathcal{U}(A)$ și $a = \bigwedge\{x | x \in U\}$ atunci $a \in At(A)$ și $U = [a)$.
- Există o bijecție între $At(A)$ și $\mathcal{U}(A)$.

Teoremă

Dacă A o algebra Boole finită, atunci $A \simeq \mathcal{P}(At(A))$ și izomorfismul este

$d : A \to \mathcal{P}(At(A))$, $d(x) = \{a \in$A$|$ a atom, $a \leq x\}$ or. $x \in A$.