Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul I 2023/2024

Laurențiu Leuștean

Pagina web: https://cs.unibuc.ro/courses/lmc/

PRELIMINARII

Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \\
A \cap B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\} \\
A \setminus B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \\
C_T A &= T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}
\end{aligned}$$

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale; $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar, $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Operații cu mulțimi

Notăm cu (a, b) perechea ordonată formată din a și b (care sunt componentele lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$; $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale ddacă $a = c$ și $b = d$.

Definiție

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

Funcții

Fie A și B mulțimi și $f : A \to B$ o funcție.
Spunem că $f : A \to B$ este definită pe A cu valori în B, A se numește domeniul de definiție al funcției f și B se numește domeniul valorilor sau codomeniul lui f.

Fie $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui X prin f; $f(A)$ este imaginea lui f.
- $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui Y prin f.
- Fie $f|_X : X \to B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este restricția lui f la X.

Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $Fun(A, B)$ sau B^A.

Funcții

Fie $f : A \to B$ o funcție.

- f este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- f este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- f este bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcția identică a lui A: $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcții

$f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

f este bijectivă ddacă f este inversabilă.

Observație

(i) Pentru orice mulțime A, $Fun(\emptyset, A)$ are un singur element, funcția vidă.

(ii) Pentru orice mulțime nevidă A, $Fun(A, \emptyset) = \emptyset$.

Definiția 1.1

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. Funcția caracteristică a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{dacă } x \in A \\ 0, & \textit{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Definiția 1.2

Spunem că A este echipotentă cu B dacă există o bijecție $f : A \to B$. Notație: $A \sim B$.

Propoziția 1.3

Pentru orice mulțimi A, B, C, avem

(i) $A \sim A$;

(ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.

(iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B ddacă B este echipotentă cu A. De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

Echipotență

Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 1.4 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \to B$ și $g : B \to A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Definiția 1.5

O mulțime A se numește finită *dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{1, \ldots, n\}$.*
Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $|A|$ și se mai numește și cardinalul *lui A.*

Definiția 1.6

O mulțime care nu este finită se numește infinită.

Mulțimi (cel mult) numărabile

Definiția 1.7

O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.

Exemple de mulțimi numărabile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$.

Teorema Cantor

$\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt mulțimi numărabile.

Se poate demonstra că

Propoziția 1.8

$\mathbb{R}$ este echipotentă cu $2^{\mathbb{N}}$.

Mulțimi (cel mult) numărabile

Propoziția 1.9

(i) *Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.*

(ii) *Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.*

(iii) *O mulțime A este cel mult numărabilă ddacă există o funcție injectivă de la A la o mulțime numărabilă.*

(iv) *Produsul cartezian a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.*

(v) *Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

Corolar 1.10

Fie A o mulțime numărabilă și B o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.

Cardinale

Numerele cardinale sau cardinalele sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Pentru orice mulțime A, cardinalul lui A (sau numărul cardinal al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- $|A|$ este unic determinat de A.
- pentru orice mulțimi A, B, avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A.
Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

Cardinale

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A.

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A, $|A|$ este tot o mulțime.

- Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele transfinite sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește alef zero).
- $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.
- O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Familii de mulțimi

Fie I o mulțime nevidă.

Definiția 1.11

Fie A o mulțime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$.

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T. Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Familii de mulțimi

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.

Definiția 1.12

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\}\\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ și $A_1, \ldots, A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un n-tuplu (ordonat)
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Propoziția 1.13

(i) *Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.*

(ii) *Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabilă.*

(iii) *Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.*

Definiția 1.14

O relație n-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$.
O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n. Dacă R este relație n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

Definiția 1.15

O relație binară între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.
O relație binară pe A este o submulțime a lui $A^2 = A \times A$.

Exemple

- relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$:
  $| = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$
- relația de ordine strictă pe $\mathbb{N}$:
  $< = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$

Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiția 1.16

- *R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.*
- *R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.*
- *R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.*
- *R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,*
$$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- *R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,*
$$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- *R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.*

Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A.

Definiția 1.17

R este relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiția 1.18

R este relație de

- *ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.*
- *ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.*
- *ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.*

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Logica propozițională - informal

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe propoziții sau enunțuri declarative, despre care se poate argumenta în principiu că sunt adevărate sau false.

Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca find atomice și le notăm $p, q, r, \ldots$ sau $p_1, p_2, p_3, \ldots$.

Exemple: p=Numărul 2 este par. q=Mâine plouă. r=Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

$\neg p$	$=$	Numărul 2 nu este par.
$p \vee q$	$=$	Numărul 2 este par sau mâine plouă.
$p \wedge q$	$=$	Numărul 2 este par și mâine plouă.
$p \rightarrow q$	$=$	Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă.
$p \leftrightarrow q$	$=$	Numărul 2 este par dacă și numai dacă mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Azi este vineri, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

p=*Azi este vineri.* q=*Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \to q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$=*Azi este vineri și nu avem curs de logică.*

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*
q = *Sunt taxiuri la gară.*
r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q? q este adevărată.

Definiția 2.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectori logici: $\neg$ (se citește non), $\rightarrow$ (se citește implică)*
- *paranteze: (,).*

- Mulțimea *Sim* a simbolurilor lui *LP* este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Definiția 2.2

Mulțimea Expr a expresiilor lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ. Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n.
- Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$((((v_7, v_1\neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2)).$

Operația de bază pentru expresii este concatenarea: dacă $\varphi = \varphi_0 \ldots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \ldots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \ldots \varphi_{k-1}\psi_0 \ldots \psi_{l-1}$.

Definiția 2.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

- *Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i, j)-subexpresia lui θ;*
- *Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j)-subexpresia lui θ.*

Formule

Definiția formulelor este un exemplu de definiție inductivă.

Definiția 2.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

(F0) *Orice variabilă propozițională este formulă.*

(F1) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F2) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F3) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.*

Notații: Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- *Form* $\subseteq$ *Expr*. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Exemple:

- $v_1 \neg \to (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- $((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \to v_2))$ sunt formule.

*Citire unică (*Unique readability*)*

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 2.5

Mulțimea Form a formulelor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.6 (Principiul inducției pe formule)

*Fie **P** o proprietate. Presupunem că:*

(0) *Orice variabilă are proprietatea **P**.*

(1) *Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea **P**, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea **P**.*

(2) *Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ și ψ au proprietatea **P**, atunci $(\varphi \to \psi)$ are proprietatea **P**.*

*Atunci orice formulă φ are proprietatea **P**.*

Dem.: Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea ***P***.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. $\square$

Propoziția 2.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ *o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:*

- $V \subseteq \Gamma$;
- Γ *este închisă la* $\neg$, *adică* $\varphi \in \Gamma$ *implică* $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ *este închisă la* $\rightarrow$, *adică* $\varphi, \psi \in \Gamma$ *implică* $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Form$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } \varphi \in \Gamma.$$

Conform definiției lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 2.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea $\boldsymbol{P}$, deci orice formulă φ este în Γ. Așadar, $\Gamma = Form$. $\square$

Definiția 2.8

Fie φ o formulă a lui LP. O subformulă a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ.

Notație: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \to v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Formule

Conectorii derivați $\vee$ (se citește sau), $\wedge$ (se citește și), $\leftrightarrow$ (se citește dacă și numai dacă) sunt introduși prin abrevierile:

$$
\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\
(\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))) \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).
\end{aligned}
$$

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $(((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziția 2.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \to A, \quad G_\neg : A \to A, \quad G_\to : A \times A \to A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ *pentru orice variabilă* $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi))$ *pentru orice formulă* φ.

(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$ *pentru orice formule* φ, ψ.

Principiul recursiei pe formule

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da definiții recursive ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \to \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ,

$$c(\varphi) \text{ este numărul conectorilor logici care apar în } \varphi.$$

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{array}{rcl} c(v) & = & 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) & = & c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi \to \psi) & = & c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{array}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \to A$, $G_0(v) = 0$,

$$G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad G_\neg(n) = n + 1,$$
$$G_\to : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad G_\to(m, n) = m + n + 1.$$

Notație:

Pentru orice formulă φ, notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: 1 pentru adevărat și 0 pentru fals. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0,1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0,1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.

Tabele de adevăr

Operațiile $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ și $\leftrightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0,1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Dem.: Exercițiu.

Evaluări

Definiția 2.10

O *evaluare* *(sau* *interpretare*) *este o funcție* $e : V \to \{0,1\}$.

Teorema 2.11

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ *există o unică funcție*

$$e^+ : Form \to \{0,1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- $e^+(v) = e(v)$ *pentru orice* $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ *pentru orice* $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ *pentru orice* $\varphi, \psi \in Form$.

Dem.: Aplicăm Principiul recursiei pe formule (Propoziția 2.9) cu $A = \{0,1\}$, $G_0 = e$, $G_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\neg(p) = \neg p$ și $G_\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\to(p,q) = p \to q$. $\square$

Propoziția 2.12

Dacă $e : V \to \{0,1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ,

$$
\begin{aligned}
e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),\\
e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),\\
e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $\quad e_1(v) = e_2(v)$ *pentru orice* $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ ddacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$,

(*) $\quad e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \neg\psi$ și ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface $\boldsymbol{P}$.

Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $\quad e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \psi \to \chi$ și ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ și $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$ și pentru orice $v \in Var(\chi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ și χ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \to e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \to e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface $\boldsymbol{P}$. $\square$

Fie φ o formulă.

Definiția 2.14

- *O evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notație: $e \vDash \varphi$.*
- *φ este satisfiabilă dacă admite un model.*
- *Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.*
- *φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ. Notație: $\vDash \varphi$.*

Notație: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 2.15

(i) *φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.*

(ii) *φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.*

Dem.: Exercițiu.

Metoda tabelului

Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \ldots, e(x_k)$, conform Propoziției 2.13.
Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \ldots, x_k\} \to \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2 \ldots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$ subformule ale lui φ $\ldots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\ldots$	$e'_1(x_k)$	$\ldots$	${e'_1}^+(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\ldots$	$e'_2(x_k)$	$\ldots$	${e'_2}^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\ldots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\ldots$	${e'_{2^k}}^+(\varphi)$

Pentru orice i, ${e'_i}^+(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 2.11.

φ este tautologie ddacă ${e'_i}^+(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$.

Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \to (v_2 \to (v_1 \land v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \land v_2$	$v_2 \to (v_1 \land v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiția 2.16

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- *φ este consecință semantică a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\psi \vDash \varphi$.*
- *φ și ψ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$. Notație: $\varphi \sim \psi$.*

Observație

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor lui *LP*.

Propoziția 2.17

Fie φ, ψ formule. Atunci

(i) $\psi \vDash \varphi$ *ddacă* $\vDash \psi \rightarrow \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ *ddacă* ($\psi \vDash \varphi$ *și* $\varphi \vDash \psi$) *ddacă* $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.18

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

terțul exclus	$\vDash \varphi \vee \neg\varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \vDash \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \vDash \varphi \rightarrow \psi$	(3)
contradicția	$\vDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	(4)
dubla negație	$\varphi \sim \neg\neg\varphi$	(5)
contrapoziția	$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	(6)
negarea premizei	$\neg\varphi \vDash \varphi \rightarrow \psi$	(7)
modus tollens	$\neg\psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \vDash \neg\varphi$	(8)
tranzitivitatea implicației	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vDash \varphi \rightarrow \chi$	(9)

legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(11)
exportarea și importarea	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \varphi \wedge \psi \to \chi$	(12)
idempotența	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$	(13)
slăbirea	$\models \varphi \wedge \psi \to \varphi \qquad \models \varphi \to \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$	(17)
absorbția	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$	(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$	(19)
distributivitatea	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	(21)

$$\varphi \to \psi \wedge \chi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \tag{22}$$

$$\varphi \to \psi \vee \chi \sim (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi) \tag{23}$$

$$\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi) \tag{24}$$

$$\varphi \vee \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \tag{25}$$

$$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi) \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) \tag{26}$$

$$\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \tag{27}$$

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \tag{28}$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \to \psi) \to \psi \tag{29}$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \tag{30}$$

$$\models (\varphi \to \psi) \vee (\neg\varphi \to \psi) \tag{31}$$

$$\models (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi) \tag{32}$$

$$\models \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi)) \tag{33}$$

$$\models (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \to \psi) \to \psi) \tag{34}$$

Dem.: Exercițiu.

Exemplu de demonstrație

Demonstrăm (1): $\models \varphi \vee \neg\varphi$.
Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$.
Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.

$\top$ *și* $\bot$

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \to v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \to v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notații

Notăm $v_0 \to v_0$ cu $\top$ și o numim adevărul. Notăm $\neg(v_0 \to v_0)$ cu $\bot$ și o numim falsul.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \bot$.

Definiția 2.19

Pentru orice formule φ, χ, χ', definim

$$\varphi_\chi(\chi') \quad := \quad \text{expresia obținută din } \varphi \text{ prin înlocuirea tuturor apariţiilor lui } \chi \text{ cu } \chi'.$$

*$\varphi_\chi(\chi')$ se numește **substituția lui χ cu χ' în φ**. Spunem și că $\varphi_\chi(\chi')$ este o **instanță de substituție** a lui φ.*

- $\varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.
- $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$.
- Dacă χ nu este subformulă a lui φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$.

Exemple:

Fie $\varphi = (v_1 \to v_2) \to \neg(v_1 \to v_2)$.

- $\chi = v_1 \to v_2$, $\chi' = v_4$. $\quad \varphi_\chi(\chi') = v_4 \to \neg v_4$
- $\chi = v_1$, $\chi' = \neg\neg v_2$. $\varphi_\chi(\chi') = (\neg\neg v_2 \to v_2) \to \neg(\neg\neg v_2 \to v_2)$
- $\chi = v_1 \to v_2$, $\chi' = v_4 \vee v_1$. $\quad \varphi_\chi(\chi') = (v_4 \vee v_1) \to \neg(v_4 \vee v_1)$

Propoziția 2.20

Pentru orice formule φ, χ, χ',

$$\chi \sim \chi' \quad \textit{implică} \quad \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

Propoziția 2.21

Pentru orice formule φ, ψ, χ *și orice variabilă* $v \in V$,

- $\varphi \sim \psi$ *implică* $\varphi_v(\chi) \sim \psi_v(\chi)$.
- *Dacă* φ *este tautologie atunci și* $\varphi_v(\chi)$ *este tautologie.*
- *Dacă* φ *este nesatisfiabilă, atunci și* $\varphi_v(\chi)$ *este nesatisfiabilă.*

Notații

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$
$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.

Propoziția 2.22

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$ *ddacă* $e^+(\varphi_i) = 1$ *pentru orice* $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 1$ *ddacă* $e^+(\varphi_i) = 1$ *pentru un* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.23

$$\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$$
$$\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$$

Dem.: Exercițiu.

FORMA NORMALĂ CONJUNCTIVĂ / DISJUNCTIVĂ

Definiția 2.24

Un literal este o

- *variabilă (în care caz spunem că este literal pozitiv) sau*
- *negația unei variabile (în care caz spunem că este literal negativ).*

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Convenție: $\bigvee_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1$ și $\bigwedge_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1$.

Definiția 2.25

O formulă φ este în formă normală disjunctivă (FND) dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \left(\bigwedge\limits_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Definiția 2.26

O formulă φ este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}\right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple

- $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

Notație: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 2.27

(i) *Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.*

(ii) *Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.*

Dem.: Exercițiu.

Funcția asociată unei formule

Exemplu: Arătați că $\vDash v_1 \to (v_2 \to v_1 \wedge v_2)$.

v_1	v_2	$v_1 \to (v_2 \to v_1 \wedge v_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Funcția asociată unei formule

Fie φ o formulă și $Var(\varphi) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}\}$, unde $n \geq 1$ și $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$.

Fie $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} : Var(\varphi) \to \{0,1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(v_{i_k}) = \varepsilon_k \quad \text{pentru orice } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definim $e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \in \{0,1\}$ astfel:

$$e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \to \{0,1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$, adică, $e(v_{i_k}) = e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(v_{i_k}) = \varepsilon_k$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Conform Propoziției 2.13, definiția nu este ambiguă.

Definiția 2.28

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \ \textit{pentru orice}\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ.

Propoziția 2.29

(i) Fie φ o formulă. Atunci
   - (a) $\vDash \varphi$ ddacă F_φ este funcția constantă 1.
   - (b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcția constantă 0.

(ii) Fie φ, ψ două formule astfel încât $Var(\varphi) = Var(\psi)$. Atunci
   - (a) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.
   - (b) $\varphi \sim \psi$ ddacă $F_\varphi = F_\psi$.

(iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.

Definiția 2.30

O funcție booleană este o funcție $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, unde $n \geq 1$. Spunem că n este numărul variabilelor lui F.

Exemplu: Pentru orice formulă φ, F_φ este funcție Booleană cu n variabile, unde $n = |Var(\varphi)|$.

Teorema 2.31

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, luăm $\varphi := \bigvee_{i=1}^{n} (v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, așadar, $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i, rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este funcția constantă 0.

Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.
Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T} \left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i \right).$$

Deoarece $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Se demonstrează că $H = F_\varphi$ (exercițiu suplimentar). $\square$

Teorema 2.32

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^{n} (v_i \vee \neg v_i).$$

Altcumva, mulțimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula $\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in F} \left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right)$.

Se demonstrează că $H = F_\psi$ (exercițiu suplimentar). $\square$

Exemplu: Fie $H : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$

$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$

$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$

$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$

$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$

$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$

$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$

$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Teorema 2.33

Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND și cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Dem.:
Fie $n = |Var(\varphi)|$ și $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ funcția booleană asociată. Aplicând Teorema 2.31 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FND} în FND a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$. Așadar, conform Propoziției 2.29.(ii), $\varphi \sim \varphi^{FND}$.

Similar, aplicând Teorema 2.32 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FNC} în FNC a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$. Prin urmare, $\varphi \sim \varphi^{FNC}$. $\square$

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublele negații, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3. Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui $\vee$ fața de $\wedge$, pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui $\wedge$ fața de $\vee$, pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

Exemplu

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \to \neg v_2) \to (v_0 \to v_2)$.

Avem

$$\begin{array}{lll} \varphi & \sim & \neg(\neg v_0 \to \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\ & \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\ & \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 1} \\ & \sim & \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\ & \sim & (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\ & \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 & \text{Pasul 2} \end{array}$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obține FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$\begin{array}{lll} \varphi & \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\ & \sim & (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2). \end{array}$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotența și comutativitatea lui $\vee$, că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.

CLAUZE ȘI REZOLUȚIE

Definiția 2.34

O clauză este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \ldots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \ldots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, *obținem clauza vidă* $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

Definiția 2.35

Fie C *o clauză și* $e : V \to \{0, 1\}$. *Spunem că e este model al lui C sau că e satisface C și scriem* $e \vDash C$ *dacă există* $L \in C$ *a.î.* $e \vDash L$.

Definiția 2.36

O clauză C *se numește*

(i) *satisfiabilă dacă are un model.*

(ii) *validă dacă orice evaluare* $e : V \to \{0, 1\}$ *este model al lui* C.

Clauze

Definiția 2.37

*O clauză C este **trivială** dacă există un literal L a.î. $L \in C$ și $L^c \in C$.*

Propoziția 2.38

(i) *Orice clauză nevidă este satisfiabilă.*

(ii) *Clauza vidă $\square$ este nesatisfiabilă.*

(iii) *O clauză este validă ddacă este trivială.*

Dem.: Exercițiu.

Notăm $Var(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}$.
Daca $x \in Var(C)$, spunem ca x apare în C.

- $Var(C) = \emptyset$ ddacă $C = \square$.

Clauze

$\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ este o mulțime finită de clauze.
Dacă $m = 0$, obținem mulțimea vidă de clauze $\emptyset$.

$\mathcal{S}$ este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncție de disjuncții ale literalilor din fiecare clauză.

Definiția 2.39

Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui $\mathcal{S}$ sau că e satisface $\mathcal{S}$ și scriem $e \vDash \mathcal{S}$ dacă $e \vDash C_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definiția 2.40

$\mathcal{S}$ se numește

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui $\mathcal{S}$.

Propoziția 2.41

- *Dacă $\mathcal{S}$ conține clauza vidă $\square$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.*
- *$\emptyset$ este validă.*

Dem.: Exercițiu.

Notăm $Var(\mathcal{S}) := \bigcup_{C\in\mathcal{S}} Var(C)$.
Daca $x \in Var(\mathcal{S})$, spunem ca x apare în $\mathcal{S}$.

- $Var(\mathcal{S}) = \emptyset$ ddacă ($\mathcal{S} = \emptyset$ sau $\mathcal{S} = \{\square\}$).

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ este satisfiabilă.

Dem.: Considerăm $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e(v_1) = e(v_2) = 1$. Atunci $e \vDash \mathcal{S}$. $\square$

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Presupunem că $\mathcal{S}$ are un model e. Atunci $e(v_1) = e(v_3) = 1$ și, deoarece $e \vDash \{\neg v_3, \neg v_2\}$, trebuie să avem $e(v_2) = 0$. Rezultă că $e(v_2) = e^+(\neg v_1) = 0$, deci e nu satisface $\{\neg v_1, v_2\}$. Am obținut o contradicție. $\square$

Clauze și FNC

Unei formule φ în FNC îi asociem o mulțime finită de clauze $\mathcal{S}_\varphi$ astfel:

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}\right),$$

unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Pentru orice i, fie C_i clauza obținută considerând toți literalii $L_{i,j}, j \in \{1,\ldots,k_i\}$ distincți. Fie $\mathcal{S}_\varphi$ mulțimea tuturor clauzelor $C_i, i \in \{1,\ldots,n\}$ distincte.

$\mathcal{S}_\varphi$ se mai numește și forma clauzală a lui φ.

Propoziția 2.42

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$, $e \vDash \varphi$ ddacă $e \vDash \mathcal{S}_\varphi$.

Clauze și FNC

Unei mulțimi finite de clauze $\mathcal{S}$ îi asociem o formulă $\varphi_{\mathcal{S}}$ în FNC astfel:

- $C = \{L_1, \ldots, L_n\}, n \geq 1 \longmapsto \varphi_C := L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$.
- $\square \longmapsto \varphi_{\square} := v_0 \wedge \neg v_0$.

Fie $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ o mulțime nevidă de clauze. Formula asociată lui $\mathcal{S}$ este

$$\varphi_{\mathcal{S}} := \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_{C_i}.$$

Formula asociată mulțimii vide de clauze este $\varphi_{\emptyset} := v_0 \vee \neg v_0$.

Formula $\varphi_{\mathcal{S}}$ nu este unic determinată, depinde de ordinea în care se scriu elementele în clauze și în $\mathcal{S}$, dar se observă imediat că: $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ implică $\varphi_{\mathcal{S}} \sim \varphi_{\mathcal{S}'}$.

Propoziția 2.43

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e \vDash \mathcal{S}$ ddacă $e \vDash \varphi_{\mathcal{S}}$.

Rezoluția

Definiția 2.44

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numește rezolvent al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1$, $L^c \in C_2$ și

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

Regula Rezoluției

$$Rez \qquad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu $Res(C_1, C_2)$ mulțimea rezolvenților clauzelor C_1, C_2.

- Rezoluția a fost introdusă de Blake (1937) și dezvoltată de Davis, Putnam (1960) și Robinson (1965).
- Multe demonstratoare automate de teoreme folosesc rezoluția. Limbajul PROLOG este bazat pe rezoluție.

Exemplu

$C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_5\}$, $C_2 = \{v_1, \neg v_2, v_{100}, v_5\}$.

- Luăm $L := \neg v_5$. Atunci $L \in C_1$ și $L^c = v_5 \in C_2$. Prin urmare, $R = \{v_1, v_2, \neg v_2, v_{100}\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.
- Dacă luăm $L' := v_2$, atunci $L' \in C_1$ și $L'^c = \neg v_2 \in C_2$. Prin urmare, $R' = \{v_1, \neg v_5, v_{100}, v_5\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.

Exemplu

$C_1 = \{v_7\}$, $C_2 = \{\neg v_7\}$. Atunci clauza vidă $\square$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.

Fie $\mathcal{S}$ o mulțime finită de clauze.

Definiția 2.45

O derivare prin rezoluție din $\mathcal{S}$ sau o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluție este o secvență $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de clauze a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) C_i *este o clauză din* $\mathcal{S}$;
- (ii) *există* $j, k < i$ *a.î.* C_i *este rezolvent al clauzelor* C_j, C_k.

Definiția 2.46

Fie C o clauză. O derivare prin rezoluție a lui C din $\mathcal{S}$ este o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluție $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a.î. $C_n = C$.

Exemplu

Fie

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{\neg v_4\}\}.$$

O derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{S}$ este următoarea:

$$\begin{array}{lcll}
C_1 & = & \{\neg v_4\} & C_1 \in \mathcal{S} \\
C_2 & = & \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\} & C_2 \in \mathcal{S} \\
C_3 & = & \{\neg v_2, \neg v_3\} & C_3 \text{ rezolvent al clauzelor } C_1, C_2 \\
C_4 & = & \{v_3\} & C_4 \in \mathcal{S} \\
C_5 & = & \{\neg v_2\} & C_5 \text{ rezolvent al clauzelor } C_3, C_4 \\
C_6 & = & \{\neg v_1, v_2\} & C_6 \in \mathcal{S} \\
C_7 & = & \{\neg v_1\} & C_7 \text{ rezolvent al clauzelor } C_5, C_6 \\
C_8 & = & \{v_1\} & C_8 \in \mathcal{S} \\
C_9 & = & \square & C_9 \text{ rezolvent al clauzelor } C_7, C_8.
\end{array}$$

Notăm $Res(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} Res(C_1, C_2)$.

Propoziția 2.47

Pentru orice orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$*,*

$$e \vDash \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad e \vDash Res(\mathcal{S}).$$

Dem.: Dacă $Res(\mathcal{S}) = \emptyset$, atunci este validă, deci $e \vDash Res(\mathcal{S})$. Presupunem că $Res(\mathcal{S})$ este nevidă și fie $R \in Res(\mathcal{S})$. Atunci există clauze $C_1, C_2 \in \mathcal{S}$ și un literal L a.î. $L \in C_1, L^c \in C_2$ și $R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$. Avem două cazuri:

- $e \vDash L$. Atunci $e \nvDash L^c$. Deoarece $e \vDash C_2$, există $U \in C_2, U \neq L^c$ a.î. $e \vDash U$. Deoarece $U \in R$, obținem că $e \vDash R$.
- $e \nvDash L$. Deoarece $e \vDash C_1$, există $U \in C_1, U \neq L$ a.î. $e \vDash U$. Deoarece $U \in R$, obținem că $e \vDash R$. $\square$

Teorema 2.48 (Teorema de corectitudine a rezoluției)

Dacă $\square$ se derivează prin rezoluție din $\mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n = \square$ o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluție a lui $\square$.
Presupunem că $\mathcal{S}$ este satisfiabilă și fie $e \vDash \mathcal{S}$.
Demonstrăm prin inducție după i că:

$$\text{pentru orice } 1 \leq i \leq n,\ e \vDash C_i.$$

Pentru $i = n$, obținem că $e \vDash \square$, ceea ce este o contradicție.
Cazul $i = 1$ este evident, deoarece $C_1 \in \mathcal{S}$.
Presupunem că $e \vDash C_j$ pentru orice $j < i$. Avem două cazuri:

- $C_i \in \mathcal{S}$. Atunci $e \vDash C_i$.
- există $j, k < i$ a.î. $C_i \in Res(C_j, C_k)$. Deoarece, conform ipotezei de inducție, $e \vDash \{C_j, C_k\}$ aplicăm Propoziția 2.47 pentru a conclude că $e \vDash C_i$.

$\square$

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

Intrare: $\mathcal{S}$ mulțime finită nevidă de clauze netriviale.
$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

Pi.1 Fie x_i o variabilă care apare în $\mathcal{S}_i$. Definim

$$\mathcal{T}_i^1 \;:= \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 \;:= \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 **if** $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ și $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$ **then**

$$\mathcal{U}_i \;:=\; \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

else $\mathcal{U}_i := \emptyset$.
Pi.3 Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} &:= \big(\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)\big) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} &:= \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pi.4 **if** $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ **then** $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
else if $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **then** $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
else $\{i := i + 1;$ go to Pi.1$\}$.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$. $i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_3$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$.
P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$.
P1.3 $\mathcal{S}_2' := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$; $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$.
P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1 $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$.
P2.2 $\mathcal{U}_2 := \emptyset$.
P2.3 $\mathcal{S}_3 := \emptyset$.
P2.4 $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$.

$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_1$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.3 $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1. $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$.

P2.2 $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.3 $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.4 $i := 3$ and go to P3.1.

P3.1 $x_3 := v_3$; $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$; $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P3.2. $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$. P3.3 $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.

P3.4 $i := 4$ and go to P4.1.

P4.1 $x_4 := v_4$; $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$; $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$.

P4.2 $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$. P4.3 $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$.

P4.4 $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.

Propoziția 2.49

Fie $n := |Var(\mathcal{S})|$. Atunci algoritmul DP se termină după cel mult n pași.

Dem.: Se observă imediat că pentru orice i,

$$Var(\mathcal{S}_{i+1}) \subseteq Var(\mathcal{S}_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq Var(\mathcal{S}_i).$$

Prin urmare, $n = |Var(\mathcal{S}_1)| > |Var(\mathcal{S}_2)| > |Var(\mathcal{S}_3)| > \ldots \geq 0$.

$\square$

Fie $N \leq n$ numărul de pași după care se termină DP. Atunci $\mathcal{S}_{N+1} = \emptyset$ sau $\square \in S_{N+1}$.

Propoziția 2.50

Pentru orice $i \leq N$,

$$\mathcal{S}_{i+1} \text{ este satisfiabilă } \iff \mathcal{S}_i \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Teorema 2.51

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

$$\mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă ddacă } \square \in S_{N+1}.$$

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.50. Obținem că $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ este nesatisfiabilă ddacă S_{N+1} este nesatisfiabilă ddacă $\square \in S_{N+1}$.

$\square$

SINTAXA LP

Sistemul deductiv

Folosim un sistem deductiv de tip Hilbert pentru *LP*.

Axiomele logice

Mulțimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

unde φ, ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Γ-teoreme

Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ-teoremelor este un nou exemplu de definiție inductivă.

Definiția 2.52

Γ-teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

(T0) *Orice axiomă este Γ-teoremă.*

(T1) *Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.*

(T2) *Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.*

(T3) *Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.*

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Γ-teoreme

Notații

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ-teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ-teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 2.53

O formulă φ se numește teoremă a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 2.54

(i) *dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(ii) *dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(iii) *dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.*

Γ-teoreme

Definiția Γ-teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin inducție după Γ-teoreme.

Versiunea 1

Fie $\boldsymbol{P}$ o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface $\boldsymbol{P}$ astfel:

(i) Demonstrăm că orice axiomă are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

(ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

(iii) Demonstrăm că dacă φ și $\varphi \to \psi$ au proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) Demonstrăm că orice axiomă este în Σ.

(ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ.

(iii) Demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Propoziția 2.55

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) *Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) *$Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) *Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) *$Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 2.56

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i *este axiomă;*

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) *există* $k, j < i$ *a.î.* $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Lema 2.57

Dacă $\theta_1, \ldots, \theta_n$ este o Γ-demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

Γ-demonstrații

Definiția 2.58

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ-demonstrației.

Propoziția 2.59

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Propoziția 2.60

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ddacă există o submulțime finită } \Sigma \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Sigma \vdash \varphi.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 2.55.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.
"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 2.59, φ are o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstrație a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$

Propoziția 2.61

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Dem.:

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$

(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 2.54.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$

(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) și Propoziția 2.54.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$

(1), (2) și Propoziția 2.54.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$

(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) și Propoziția 2.54.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$

(MP): (3), (4) $\square$

Teorema 2.62 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq Form$ *și* $\varphi, \psi \in Form$*. Atunci*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Teorema deducției este un instrument foarte util pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Propoziția 2.63

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{35}$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{gathered}
\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.
\end{gathered}$$

Câteva consecințe

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 2.54.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 2.54.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziția 2.54.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4). $\square$

Propoziția 2.64

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ, χ*,*

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \ \ \text{și} \ \ \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi.$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P.2.63 și P.2.55.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4). $\square$

Propoziția 2.65

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)) \tag{36}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.66

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.67

Pentru orice formule φ, ψ,

$$
\begin{aligned}
\{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi && (37)\\
&\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) && (38)\\
&\vdash \psi \to (\neg\psi \to \varphi) && (39)\\
&\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi && (40)\\
&\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi && (41)\\
&\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) && (42)\\
\{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi) && (43)\\
&\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi && (44)\\
&\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi && (45)
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.68

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \ \text{ și } \ \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
(4)	$\Gamma \vdash \neg\psi \to \varphi$	Teorema deducției
(5)	$\Gamma \vdash (\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(42) și P.2.55.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	(MP): (2), (5)
(7)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$	(6), (4) și P. 2.64
(8)	$\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(45) și P.2.55.(ii)
(9)	$\Gamma \vdash \varphi$	(MP): (7), (8).

Câteva consecințe

Propoziția 2.69

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\begin{array}{rcll}
\{\varphi \wedge \psi\} & \vdash & \varphi & (46)\\
\{\varphi \wedge \psi\} & \vdash & \psi & (47)\\
\{\varphi, \psi\} & \vdash & \varphi \wedge \psi & (48)\\
\{\varphi, \psi\} \vdash \chi & \textit{ddacă} & \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi & (49)\\
 & \vdash & \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi & (50)
\end{array}$$

Dem.: Exercițiu.

SINTAXA și SEMANTICA

Teorema 2.70 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice teoremă este tautologie:

$$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \text{ mulțimea tuturor tautologiilor lui } LP.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exercițiu).
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\vDash \varphi$ și $\vDash \varphi \to \psi$, deci $\vDash \varphi \wedge (\varphi \to \psi)$. Aplicăm (2) pentru a obține că $\vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$.

$\square$

Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Definim

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.
Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Pentru orice $a \in \{0,1\}$, definim evaluarea $e_{v\mapsto a} : V \to \{0,1\}$ prin

$$e_{v\mapsto a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 2.71

Fie $e : V \to \{0,1\}$ *o evaluare. Pentru orice formulă* φ*,*

(i) *Dacă* $e^+(\varphi) = 1$*, atunci* $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$*.*

(ii) *Dacă* $e^+(\varphi) = 0$*, atunci* $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$*.*

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.
  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.
  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.
  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.
  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$.
  Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ ((41) din Propoziția 2.67), putem aplica (MP) pentru a obține $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

  Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.55.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	(43) din Propoziția 2.67
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziția 2.55.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$ sau $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	(38) din P. 2.67 și P. 2.55.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.55.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) și Propoziția 2.54.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.55.(i). $\square$

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.

Teorema 2.72 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Dem.: "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine 2.70.
"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \to \{0,1\}, \{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0,1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 2.71, obținem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k și fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \mapsto \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e și e', obținem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 2.68 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. □

Propoziția 2.73

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$\varphi \sim \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \models \varphi \to \psi$ și $\models \psi \to \varphi$

Propoziția 2.17

$\Longleftrightarrow \quad \vdash \varphi \to \psi$ și $\vdash \psi \to \varphi$

Teorema de completitudine.

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă din Propoziția 2.55.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.

"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Mulțimi de formule - semantică

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 2.74

- *O evaluare* $e : V \to \{0, 1\}$ *este* *model* *al lui* Γ *dacă este model al fiecărei formule din* Γ *(adică* $e \vDash \gamma$ *pentru orice* $\gamma \in \Gamma$*).* *Notație:* $e \vDash \Gamma$*.*
- Γ *este* *satisfiabilă* *dacă are un model.*
- *Dacă* Γ *nu este satisfiabilă, spunem și că* Γ *este* *nesatisfiabilă* *sau* *contradictorie.*

Notații: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 2.75

O formulă φ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\Gamma \vDash \varphi$.
Dacă φ nu este consecință semantică a lui Γ, scriem $\Gamma \nvDash \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ. Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Definiția 2.76

- *Δ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$. Notație: $\Gamma \vDash \Delta$.*
- *Γ și Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. Notație: $\Gamma \sim \Delta$.*

Mulțimi de formule - semantică

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 2.77

- *$Mod(\emptyset) = Fun(V, \{0, 1\})$, adică orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.*
- *$Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \vDash \varphi$.*

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.78

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Γ *este nesatisfiabilă.*

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$ *pentru orice formulă* φ.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi$ *pentru orice formulă nesatisfiabilă* φ.

(iv) $\Gamma \vDash \bot$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Notații

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notații

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \nvdash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\nvdash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este teoremă} \\
\Gamma \not\models \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este consecință semantică a lui } \Gamma \\
\not\models \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este tautologie.}
\end{array}
$$

Mulțimi consistente

Definiția 2.79

Fie Γ o mulțime de formule.

- *Γ este* *consistentă* *dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.*
- *Γ este* *inconsistentă* *dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.*

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.

Propoziția 2.80

(i) $\emptyset$ *este consistentă.*

(ii) *Mulțimea teoremelor este consistentă.*

Dem.:

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 2.70, ar rezulta că $\models \bot$, o contradicție. Așadar $\not\vdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziția 2.55.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. $\square$

Propoziția 2.81

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ *este inconsistentă.*

(ii) *Pentru orice formulă* ψ, $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) *Există o formulă* ψ *a.î.* $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Dem.: Exercițiu.

Teorema de completitudine tare

Teorema 2.82 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă } \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema 2.83 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formulă* φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Observație

Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente.

LOGICA DE ORDINUL ÎNTÂI

Definiția 3.1

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul întâi este format din:

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;*
- *parantezele (,);*
- *simbolul de egalitate $=$;*
- *cuantificatorul universal $\forall$;*
- *o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;*
- *o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;*
- *o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;*
- *o funcție aritate $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.*

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathrm{ari})$.
- τ se numește signatura lui $\mathcal{L}$ sau tipul de similaritate al lui $\mathcal{L}$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \ldots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m;

$\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m.

Definiția 3.2

Mulțimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

Expresia vidă se notează λ. O expresie nevidă este de forma $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$, unde $k \geq 1$ și $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice $i = 0, \ldots, k-1$.

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ și $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}$ două expresii ale lui $\mathcal{L}$.

$$\theta = \sigma \text{ ddacă } k = l \text{ și } \theta_i = \sigma_i \text{ pentru orice } i = 0, \ldots, k-1.$$

Definiția 3.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$. Spunem că o expresie σ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. $\sigma = \theta_i \ldots \theta_j$. Notăm cu $Var(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ.

Definiția 3.4

Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

(T0) *Orice variabilă este termen.*

(T1) *Orice simbol de constantă este termen.*

(T2) *Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \ldots t_m$ este termen.*

(T3) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.*

Notații:

- Mulțimea termenilor se notează *$Term_{\mathcal{L}}$*.
- Termenii se notează $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.

Definiția 3.5

Un termen t se numește închis dacă $Var(t) = \emptyset$.

Propoziția 3.6 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- *Γ conține variabilele și simbolurile de constante.*
- *Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$.*

Atunci $Term_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor expresiilor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $Term_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Propoziția 3.7 (Citire unică (Unique readability))

Dacă t este un termen, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $t = x$, *unde* $x \in V$;
- $t = c$, *unde* $c \in \mathcal{C}$;
- $t = ft_1 \ldots t_m$, *unde* $f \in \mathcal{F}_m$ $(m \geq 1)$ *și* $t_1, \ldots, t_m$ *sunt termeni.*

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

Formule

Definiția 3.8

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$, *unde* s, t *sunt termeni;*
- $(Rt_1 \ldots t_m)$, *unde* $R \in \mathcal{R}_m$ $(m \geq 1)$ *și* $t_1, \ldots, t_m$ *sunt termeni.*

Definiția 3.9

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

(F0) *Orice formulă atomică este formulă.*

(F1) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F2) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F3) *Dacă φ este formulă, atunci $(\forall x \varphi)$ este formulă pentru orice variabilă x.*

(F4) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.*

Notații

- Mulțimea formulelor se notează *$Form_{\mathcal{L}}$*.
- Formulele se notează $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

Propoziția 3.10 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- *Γ conține toate formulele atomice.*
- *Γ este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x), adică: dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $(\neg\varphi), (\varphi \rightarrow \psi), (\forall x \varphi) \in \Gamma$.*

Atunci $Form_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $Form_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Formule

*Propoziția 3.11 (Citire unică (*Unique readability*))*

Dacă φ este o formulă, atunci exact *una din următoarele alternative are loc:*

- $\varphi = (s = t)$, *unde* s, t *sunt termeni;*
- $\varphi = (Rt_1 \ldots t_m)$, *unde* $R \in \mathcal{R}_m$ $(m \geq 1)$ *și* $t_1, \ldots, t_m$ *sunt termeni;*
- $\varphi = (\neg\psi)$, *unde* ψ *este formulă;*
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, *unde* ψ, χ *sunt formule;*
- $\varphi = (\forall x \psi)$, *unde* x *este variabilă și* ψ *este formulă.*

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Formule

Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și cuantificatorul existențial $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\begin{array}{lcl}
\varphi \vee \psi & := & (\neg\varphi) \to \psi \\
\varphi \wedge \psi & := & \neg(\varphi \to (\neg\psi)) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & := & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \\
\exists x\varphi & := & \neg\forall x\neg\varphi.
\end{array}$$

Formule

În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $s = t$, $Rt_1 \dots t_m$, $\forall x \varphi$, $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$. Pe de altă parte, scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.

Pentru a reduce din folosirea parantezelor, presupunem următoarele:

- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori. Așadar, $\forall x \varphi \to \psi$ este $(\forall x \varphi) \to \psi$ și nu $\forall x(\varphi \to \psi)$.
- $\neg$ are precedență mai mare decât $\to, \wedge, \vee, \leftrightarrow$.
- $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.

Formule

- Scriem uneori $f(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $ft_1 \ldots t_m$ și $R(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \ldots t_m$.
- Simbolurile de funcții sau relații de aritate 1 se numesc unare.
- Simbolurile de funcții sau relații de aritate 2 se numesc binare.
- Dacă f este un simbol de funcție binară scriem $t_1 f t_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- Analog, dacă R este un simbol de relație binară, scriem $t_1 R t_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

Vom identifica un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și vom scrie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Definiția 3.12

O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- *A este o mulțime nevidă;*
- *$\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;*
- *$\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;*
- *$\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.*
- *A se numește universul structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$*
- *$f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește denotația sau interpretarea lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.*

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de funcții binare și $\dot{S}$ este simbol de funcție unară;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} =<,\ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +,\ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot,\ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S,\ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol de relație binară
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}_R$-structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde $\mathcal{R} = \emptyset$ și

- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{}^{-1}\}$; $\dot{*}$ simbol de funcție binară, $\dot{}^{-1}$ simbol de funcție unară
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{}^{-1}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{}^{-1}, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$-structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$.
Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{}^{-1\,\mathcal{G}} = {}^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

SEMANTICA

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiția 3.13

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiția 3.14 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e:

- *dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;*
- *dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;*
- *dacă $t = ft_1 \ldots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.*

Interpretarea formulelor

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a *formulei* φ *sub evaluarea* e.

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Negația și implicația

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$\to: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\, \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ sau $\psi^{\mathcal{A}}(e) = 1\big)$.

Notație

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretare $e_{x \mapsto a} : V \to A$ prin

$$e_{x \mapsto a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 3.15

Fie φ o formulă. Spunem că:

- *e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.*
- *e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$.*

Corolar 3.16

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash (\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *implică* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e] \iff$ *pentru orice* $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 3.17

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff & (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto a}) = 0 \\ \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto a}) = 1. \end{aligned}$$

Corolar 3.18

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \land \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *și* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \lor \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *ddacă* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x \varphi)[e] \iff$ *există* $a \in A$ *a.î.* $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}]$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.19

Spunem că φ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui φ.

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.
Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.20

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 3.21

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.22

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \psi$

Definiția 3.23

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \psi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Echivalențe și consecințe logice

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\neg\exists x\varphi \;\;\vDash\!\!\!\dashv\;\; \forall x\neg\varphi \tag{51}$$

$$\neg\forall x\varphi \;\;\vDash\!\!\!\dashv\;\; \exists x\neg\varphi \tag{52}$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \;\;\vDash\!\!\!\dashv\;\; \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \tag{53}$$

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \;\;\vDash\;\; \forall x(\varphi \vee \psi) \tag{54}$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \;\;\vDash\;\; \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \tag{55}$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \;\;\vDash\!\!\!\dashv\;\; \exists x\varphi \vee \exists x\psi \tag{56}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\;\vDash\;\; \forall x\varphi \to \forall x\psi \tag{57}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\;\vDash\;\; \exists x\varphi \to \exists x\psi \tag{58}$$

$$\forall x\varphi \;\;\vDash\;\; \exists x\varphi \tag{59}$$

$$\begin{align} \varphi &\vDash \exists x\varphi \tag{60}\\ \forall x\varphi &\vDash \varphi \tag{61}\\ \forall x\forall y\varphi &\mathrel{\text{⫤}}\vDash \forall y\forall x\varphi \tag{62}\\ \exists x\exists y\varphi &\mathrel{\text{⫤}}\vDash \exists y\exists x\varphi \tag{63}\\ \exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. \tag{64} \end{align}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.24

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \rightarrow t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \rightarrow s = u$.

Dem.: *Exercițiu ușor.*

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\}$ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.25

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui Γ.
Notație: $\mathcal{A} \vDash \Gamma[e]$

Definiția 3.26

Spunem că φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma[e] \implies \mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Variabile legate și libere

Definiția 3.27

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}$ *o formulă a lui* $\mathcal{L}$ *și* x *o variabilă.*

- *Spunem că variabila* x *apare legată pe poziția* k *în* φ *dacă* $x = \varphi_k$ *și există* $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ *a.î.* $\varphi_i \ldots \varphi_j$ *este de forma* $\forall x\psi$ *cu* ψ *formulă.*
- *Spunem că* x *apare liberă pe poziția* k *în* φ *dacă* $x = \varphi_k$*, dar* x *nu apare legată pe poziția* k *în* φ*.*
- x *este variabilă legată (*bounded variable*) a lui* φ *dacă există un* k *a.î.* x *apare legată pe poziția* k *în* φ*.*
- x *este variabilă liberă (*free variable*) a lui* φ *dacă există un* k *a.î.* x *apare liberă pe poziția* k *în* φ*.*

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Variabile legate și libere

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{array}{lcll}
FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\
FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi); & \\
FV(\varphi \to \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi); & \\
FV(\forall x \varphi) & = & FV(\varphi) \setminus \{x\}. &
\end{array}$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propoziția 3.28

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in Var(t), \text{ atunci } t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.29

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$, $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 3.28 pentru a obține că
$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2) \quad \text{și} \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Rezultă că
$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = Rt_1 \dots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \dots, m$ și aplicăm din nou Propoziția 3.28 pentru a obține că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \quad &\iff \quad R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) \\ &\iff \quad R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \quad \iff \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e_2].$$

Rezultă că

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \quad \iff \quad \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

- $\varphi = \psi \to \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \chi[e_2].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] & \iff \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \\ & \iff \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_2] \\ & \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1x \mapsto a}(v) = e_{2x \mapsto a}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1x \mapsto a}, e_{2x \mapsto a}$ pentru a obține că

$$\text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \mapsto a}] \Longleftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \mapsto a}].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \mapsto a}] \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \mapsto a}] \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].
\end{aligned}$$

$\square$

Propoziția 3.30

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\varphi &\mathrel{\models\!\!\dashv} \exists x\varphi && (65)\\
\varphi &\mathrel{\models\!\!\dashv} \forall x\varphi && (66)\\
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \varphi \wedge \forall x\psi && (67)\\
\forall x(\varphi \vee \psi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \varphi \vee \forall x\psi && (68)\\
\exists x(\varphi \wedge \psi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \varphi \wedge \exists x\psi && (69)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \varphi \vee \exists x\psi && (70)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \varphi \to \forall x\psi && (71)\\
\exists x(\varphi \to \psi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \varphi \to \exists x\psi && (72)\\
\forall x(\psi \to \varphi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \exists x\psi \to \varphi && (73)\\
\exists x(\psi \to \varphi) &\mathrel{\models\!\!\dashv} \forall x\psi \to \varphi && (74)
\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 3.31

O formulă φ se numește enunț (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.
Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 3.32

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \Longleftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 3.29 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. $\square$

Definiția 3.33

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model al unui enunț φ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Fie φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de enunțuri.

Γ este satisfiabilă ddacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ este un model al lui Γ. Notație: $\mathcal{A} \vDash \Gamma$

φ este consecință semantică a lui Γ ddacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \implies \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Mulțimi de enunțuri

Notație: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Lema 3.34

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ,

(i) $\Gamma \vDash \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.

(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.

(iii) Γ *este satisfiabilă* $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dem.: Exercițiu ușor.

TAUTOLOGII

Tautologii

Noțiunile de tautologie și consecință semantică din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectorilor $\neg, \rightarrow$.

Definiția 3.35

O $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \to \{0,1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ,

- $F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;
- $F(\varphi \to \psi) = F(\varphi) \to F(\psi)$.

Propoziția 3.36

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \to \{0,1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr.

Tautologii

Definiția 3.37

φ este tautologie dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F.

Exemple de tautologii: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Propoziția 3.38

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. $\square$

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu este tautologie.

Definiția 3.39

Două formule φ și ψ sunt *tautologic echivalente* *dacă* $F(\varphi) = F(\psi)$ *pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F.*

Exemplul 3.40

$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)$ şi $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$ sunt tautologic echivalente.

Definiția 3.41

O formulă φ este *consecință tautologică* *a unei mulțimi de formule Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F,*

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad F(\varphi) = 1.$$

Propoziția 3.42

Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ, atunci $\Gamma \vDash \varphi$.

SUBSTITUȚII

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.43

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$$t_x(u) \quad := \quad \text{expresia obținută din } t \text{ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui } x \text{ cu } u.$$

Propoziția 3.44

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

Substituția

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.
Avem

- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$, avem $\mathcal{A} \vDash \forall x\varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 3.45

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x.

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- u nu conține variabile;
- φ nu conține variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conține apariții libere ale lui x.

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiția 3.46

$\varphi_x(u)$:= *expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.*

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituție liberă.

Propoziția 3.47

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Propoziția 3.48

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x,

(i) *pentru orice termen t,*

$$\vDash u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) *pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ,*

$$\vDash u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 3.49

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) *Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,*

$$\vDash \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \qquad \vDash \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii) $\vDash \forall x\varphi \rightarrow \varphi, \qquad \vDash \varphi \rightarrow \exists x\varphi.$

(iii) *Pentru orice simbol de constantă c,*

$$\vDash \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \qquad \vDash \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$

În general, dacă x si y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \nvDash (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 3.50

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vdash} \exists y\varphi_x(y) \quad \textit{și} \quad \forall x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vdash} \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 3.50 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 3.51

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \ldots, y_k$, varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- *dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ;*
- *dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;*
- *dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci φ' este $\psi' \to \chi'$;*
- *dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci*

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w \psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \ldots, y_k\} \\ \forall z \psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \ldots,$ care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \ldots, y_k$.

Definiția 3.52

φ' este *variantă* a lui φ dacă este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \ldots, y_k$.

Propoziția 3.53

(i) Pentru orice formulă φ, dacă φ' este o variantă a lui φ, atunci $\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi'$;

(ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t, dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \ldots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ, atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.

FORME NORMALE

Forma normală prenex

Definiția 3.54

O formulă care nu conține cuantificatori se numește liberă de cuantificatori ("quantifier-free").

Definiția 3.55

O formulă φ este în formă normală prenex dacă

$$\varphi = Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\,\psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1,\ldots,Q_n \in \{\forall,\exists\}$, $x_1,\ldots,x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește matricea lui φ și $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n$ este prefixul lui φ.

Exemple de formule în formă normală prenex:

- Formulele universale: $\varphi = \forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n\,\psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori
- Formulele existențiale: $\varphi = \exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_n\,\psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori

Teorema 3.56 (Teorema de formă normală prenex)
Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \mathrel{\text{⊨⊣}} \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y,z) = c) \land \neg\exists x(f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned}
\varphi \quad &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \quad \exists y\big(g(y,z) = c \land \neg\exists x(f(x) = d)\big) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \quad \exists y\big(g(y,z) = c \land \forall x\neg(f(x) = d)\big) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \quad \exists y\forall x\big(g(y,z) = c \land \neg(f(x) = d)\big)
\end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y\forall x\big(g(y,z) = c \land \neg(f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg\forall y(S(y) \to \exists z R(z)) \wedge \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned}
\varphi &\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \neg(S(y) \to \exists z R(z)) \wedge \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \forall z \neg(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \forall z\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big)\\
&\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \forall z \forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big)\\
&\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \forall z \forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \exists v(P(x,v) \to f(x) = d)\big)\\
&\mathrel{\text{H}\!\!\text{|}} \exists y \forall z \forall x \exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge (P(x,v) \to f(x) = d)\big)
\end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge (P(x,v) \to f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Forma normală Skolem

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante Skolem.

Observație

Orice formulă liberă de cuantificatori este universală.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Forma normală Skolem

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
Dacă φ este universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.
Altfel, φ are una din formele:

- $\varphi = \exists x\, \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x\, \psi$ $(k \geq 1)$. Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi_x(f x_1 \ldots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ.
Dacă φ^1 este enunț universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este enunț universal, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la un enunț universal și acesta este φ^{Sk}.

φ^{Sk} este o formă normală Skolem a lui φ.

Exemple

- Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x\, \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z\, R(x, y, z)$. Atunci
$$\varphi^1 = \forall y \forall z\, (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z\, R(c, y, z),$$
unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z\, R(c, y, z)$.
- Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z\, P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y\, (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y\, P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y\, P(y, f(y))$.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f. Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v\, (R(y,z) \land f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}
\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v\, (R(y,z) \land f(u) = v)_z(g(y)) \\
&= \forall y \forall u \exists v\, (R(y,g(y)) \land f(u) = v), \\
&\quad \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\
\varphi^2 &= \forall y \forall u\, (R(y,g(y)) \land f(u) = v)_v(h(y,u)) \\
&= \forall y \forall u\, (R(y,g(y)) \land f(u) = h(y,u)), \\
&\quad \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}
\end{aligned}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u\, (R(y,g(y)) \land f(u) = h(y,u)).$$

Teorema 3.57 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex și φ^{Sk} o formă normală Skolem a sa.

(i) $\vDash \varphi^{Sk} \to \varphi$, *deci* $\varphi^{Sk} \vDash \varphi$ *în* $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

(ii) φ *este satisfiabilă ddacă* φ^{Sk} *este satisfiabilă.*

Observație

În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

SINTAXA

Definiția 3.58

Mulțimea $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ *a axiomelor (logice) ale lui* $\mathcal{L}$ *constă din:*

(i) *toate tautologiile.*

(ii) *formulele de forma*

$$t = t, \quad s = t \to t = s, \quad s = t \wedge t = u \to s = u,$$

pentru orice termeni s, t, u.

(iii) *formulele de forma*

$$t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_m = u_m \quad \to \quad ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m,$$
$$t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_m = u_m \quad \to \quad (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m),$$

pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ *și orice termeni* t_i, u_i $(i = 1, \ldots, m)$.

(iv) *formulele de forma*

$$\varphi_x(t) \to \exists x \varphi,$$

unde $\varphi_x(t)$ *este o substituție liberă (*$\exists$*-axiomele).*

Definiția 3.59

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele: pentru orice formule φ, ψ,

(i) din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

(ii) dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci din $\varphi \to \psi$ se inferă $\exists x\varphi \to \psi$ ($\exists$-introducerea):

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi} \quad \text{dacă } x \notin FV(\psi).$$

Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.60

Γ-teoremele lui $\mathcal{L}$ sunt formulele definite astfel:

(Γ0) *Orice axiomă logică este Γ-teoremă.*

(Γ1) *Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.*

(Γ2) *Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.*

(Γ3) *Dacă $\varphi \to \psi$ este Γ-teoremă și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\exists x\varphi \to \psi$ este Γ-teoremă.*

(Γ4) *Numai formulele obținute aplicând regulile (Γ0), (Γ1), (Γ2) și (Γ3) sunt Γ-teoreme.*

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notații

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \varphi$ este Γ-teoremă $\qquad \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

Definiția 3.61

O formulă φ se numește teoremă (logică) a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Reformulând condițiile din definiția Γ-teoremelor folosind notația $\vdash$, obținem

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, au loc următoarele:

(i) Dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;

(ii) Dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;

(iii) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ și $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

(iv) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x\varphi \to \psi$.

Definiția 3.62

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) a lui $\mathcal{L}$ este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ astfel încât pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ astfel încât $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$;

(iv) există $j < i$ astfel încât

$$\theta_j = \varphi \to \psi \text{ și } \theta_i = \exists x \varphi \to \psi, \text{ unde } x \notin FV(\psi).$$

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Definiția 3.63

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ astfel încât $\theta_n = \varphi$.

Propoziția 3.64

Fie Γ o mulțime de formule. Pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ ddacă există o } \Gamma\text{-demonstrație a lui } \varphi.$$

Fie Γ o mulțime de formule.

Teorema 3.65 (Teorema Tautologiei (Post))
Fie $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât

(i) ψ este consecință tautologică a mulțimii $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

(ii) $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_2$, $\ldots$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$.

Atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

Teorema 3.66 (Teorema Deducției)

Fie ψ o formulă și φ un enunț. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi \quad \text{ddacă} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi.$$

Propoziția 3.67

Pentru orice formulă φ și orice variabilă x,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \forall x \varphi.$$

Definiția 3.68

Fie φ o formula cu $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Închiderea universală a lui φ este enunțul

$$\overline{\forall\varphi} := \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi.$$

Notații 3.69

$\overline{\forall\Gamma} := \{\overline{\forall\psi} \mid \psi \in \Gamma\}$.

Propoziția 3.70

Pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \overline{\forall\varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\forall\Gamma} \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\forall\Gamma} \vdash \overline{\forall\varphi}.$$

Mulțimi consistente

Definiția 3.71

Fie Γ *o mulțime de formule. Spunem că*

(i) Γ *este consistentă dacă există o formulă* φ *astfel încât* $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

(ii) Γ *este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ *pentru orice formulă* φ.

Propoziția 3.72

Pentru orice mulțime de formule Γ*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) Γ *este inconsistentă.*

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ *astfel încât* $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$.

TEOREMA DE COMPLETITUDINE

Teorema de completitudine - prima versiune

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

$$\Gamma \text{ este consistentă} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema de completitudine - a doua versiune

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ și orice enunț φ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- Henkin a dat în teza sa de doctorat din 1947 o demonstrație simplificată.

TEORII

Definiția 3.73

O $\mathcal{L}$-teorie este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \vDash \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 3.74

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, teoria generată de Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \vDash \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Propoziția 3.75

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ *este cea mai mică teorie* T *a.î.* $\Gamma \subseteq T$.

Dem.: Exercițiu.

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește teorie axiomatică sau teorie prezentată axiomatic. Γ se numește mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Definiția 3.76

O teorie T este finit axiomatizabilă dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ.

Definiția 3.77

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\mathcal{K}$.

Definiția 3.78

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime finită de enunțuri Γ.

Exemple - Teoria egalității

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)\big),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)\right).$$

Propoziția 3.79

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 2$,

$$\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.

Exemple - Teoria egalității

Notații

Fie $n \geq 1$.

- $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 3.80

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} \vDash \exists^{\leq n} & \iff & A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \vDash \exists^{=n} & \iff & A \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{array}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 3.81

Fie $\Gamma := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemple - Teoria grafurilor

Un graf este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V. Elementele lui V se numesc vârfuri, iar elementele lui E se numesc muchii.

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria grafurilor este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt grafurile.
- Γ axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned}
(REFL) &:= \forall x (x \dot{\leq} x) \\
(ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y) \\
(TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)
\end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor parțial ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor parțial ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Fie $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$, unde

$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \vee y \dot{\leq} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile total ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{array}{rcl} (IREFL) & := & \forall x \neg (x \dot{<} x) \\ (TRANZ) & := & \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z) \end{array}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii dense

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$, unde

$$\begin{aligned} (TOTAL) &:= \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x) \\ (DENS) &:= \forall x \forall y \big(x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y) \big). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii dense este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{array}{rcl} (REFL) & := & \forall x(x \dot{\equiv} x) \\ (SIM) & := & \forall x \forall y(x \dot{\equiv} y \to y \dot{\equiv} x) \\ (TRANZ) & := & \forall x \forall y \forall z(x \dot{\equiv} y \land y \dot{\equiv} z \to x \dot{\equiv} z) \end{array}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A. Avem că $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, așadar Γ axiomatizează $\mathcal{K}$. Prin urmare, $\mathcal{K}$ este finit axiomatizabilă.

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y \big(\neg(x = y) \wedge x \doteqdot y \wedge \forall z (z \doteqdot x \rightarrow (z = x \vee z = y))\big),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

TEOREMA DE COMPACITATE

Teorema de compacitate

Teorema 3.82 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 3.83

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*)   pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură finită a.î. $|A| \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$ și $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.

Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.
Deoarece $\mathcal{B} \models \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obținut o contradicție. $\square$

Corolar 3.84

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 3.85

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite.
Conform Propoziției 3.81, pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff A \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \ \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$.
Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \text{ este finită } \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 3.83. $\square$.

Corolar 3.86

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 3.87

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$, deci $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model $\mathcal{B}$. Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un model infinit al lui Γ. $\square$

Propoziția 3.88

Dacă un enunț φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 3.87, rezultă că Γ are un model infinit $\mathcal{A}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$

Propoziția 3.89

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) *pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.*

Atunci

(i) *Γ are un model infinit.*

(ii) *Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.*

(iii) *Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.*

Dem.: Exercițiu.

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, $\dot{S}$ este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție $\mathcal{L}$-termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 3.90

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ se numește non-standard dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește element non-standard.

Teoria lui $\mathcal{N}$ se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \vDash \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 3.91

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^{+} = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \ldots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Fie $n_0 > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Considerăm extensia $\mathcal{N}^+$ a lui $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}^+$ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \vDash \Gamma_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \times^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui $\mathcal{A}$. $\square$

Definiția 3.92

Fie A o mulțime nevidă. O relație de bună ordonare pe A este o relație de ordine totală $<$ pe A cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui A are minim.
Spunem că $(A, <)$ este mulțime bine ordonată.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.

Propoziția 3.93

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{\dot{<}}$.

Dem.: Fie $\mathcal{K}$ clasa $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurilor $\mathcal{A} = (A, <)$ a.î. $(A, <)$ este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{K}$ este axiomatizabilă, deci că există Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$.

Fie $\mathcal{L}$ extensia lui $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă c_n, $n \in \mathbb{N}$. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n = 0, \ldots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Fie $(A,<)$ o mulțime infinită bine ordonată. Definim
$a_{M+1} := \min A$, $a_M := \min A \setminus \{a_{M+1}\}$, ...,
$a_0 := \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \ldots, a_1\}$. Atunci $a_{M+1} < a_M < \ldots < a_0$.
Fie $\mathcal{A}^+$ extensia lui $\mathcal{A} = (A,<)$ la $\mathcal{L}$ obținută astfel:

$$c_0^{\mathcal{A}^+} = a_0, \ldots, c_{M+1}^{\mathcal{A}^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{\mathcal{A}^+} \text{ arbitrar pentru } n > M+1.$$

Atunci $\mathcal{A}^+ \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model $\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ (deci $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$).
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \Gamma$, rezultă că $(B,<)$ este bine ordonată.
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ rezultă că $b_{n+1} < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, submulțimea nevidă

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Am obținut o contradicție. $\square$

APLICAȚIE A TEOREMEI DE COMPACITATE LA TEORIA RAMSEY

Teoria Ramsey

Teoria Ramsey este o ramură a combinatoricii, a cărei temă principală este:

"Complete disorder is impossible." (T.S. Motzkin)

O structură mare, oricât de haotică ar fi, conține substructuri cu regularități.

Problemă tipică

O anumită structură este partiționată într-un număr finit de clase. Ce tip de substructură rămâne intactă în cel puțin una din clase?

- Rezultatele din teoria Ramsey sunt foarte puternice, deoarece ele sunt generale, se obțin presupunând ipoteze foarte slabe.
- Graham, Rothschild, Sperner, Ramsey Theory, 1990.

X mulțime, $\mathcal{G}$ colecție de submulțimi bune ale lui X, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiția 3.94

O r-colorare a lui X este o funcție $c : X \to \{1, 2, \ldots, r\}$. Pentru $x \in X$, $c(x)$ este culoarea lui x. O submulțime $A \subseteq X$ se numește monocromatică dacă toate elementele din A au aceeași culoare.

Definiția 3.95

O familie de mulțimi $C_1, \ldots, C_r$ se numește partiție a lui X dacă

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} C_i \text{ și } C_i \cap C_j = \emptyset \text{ pentru orice } i \neq j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- Pentru orice partiție $X = \cup_{i=1}^{r} C_i$ a lui X, există $i \in \{1, \ldots, r\}$ și $G \in \mathcal{G}$ a.î. $G \subseteq C_i$.
- Pentru orice r-colorare a lui X există o mulțime $G \in \mathcal{G}$ monocromatică.

Teorema Schur (1916)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Atunci există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î.

$$\{x, y, x+y\} \subseteq C_i \quad \text{pentru } x, y \in \mathbb{N}.$$

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \{\{x, y, x+y\} \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Versiunea cu colorări: Pentru orice r-colorare a lui $\mathbb{N}$ există $x, y \in \mathbb{N}$ a.î. mulțimea $\{x, y, x+y\}$ este monocromatică.

Teorema van der Waerden (1927)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î. C_i conține progresii aritmetice de lungime k.

- rezultat central în teoria Ramsey
- una din cele trei perle în teoria numerelor Khintchin (1948)
- demonstrație combinatorială prin inducție dublă după r și k.

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \text{ mulțimea progresiilor aritmetice de lungime } k.$$

Versiunea cu colorări: Orice colorare finită a lui $\mathbb{N}$ conține progresii aritmetice monocromatice de lungime finită arbitrară.

Y mulțime, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notăm cu $[Y]^k$ mulțimea submulțimilor lui Y cu k elemente: $[Y]^k = \{A \subseteq Y \mid |A| = k\}$.
Putem să ne gândim la $[Y]^2$ ca fiind mulțimea muchiilor grafului complet peste Y.

Teorema 3.96 (Teorema Ramsey)

Fie Y o mulțime infinită, $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și $[Y]^k = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $[Y]^k$. Atunci există $i \in \{1, \ldots, r\}$ și o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k \subseteq C_i$.

- rezultat structural general, nu depinde de proprietățile aritmetice ale lui $\mathbb{N}$;
- articolul lui Ramsey: On a problem of formal logic (1930);
- teorema lui Ramsey a fost popularizată de Erdös și Szekeres, care au redescoperit-o într-un articol clasic din 1935.

Teorema 3.97 (Teorema Ramsey - versiunea cu colorări)

Fie Y o mulțime infinită și $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui $[Y]^k$, există o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Versiune echivalentă

Teorema 3.98 (Teorema Ramsey - versiunea cu colorări)

Fie $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui $[\mathbb{N}]^k$, există o submulțime infinită B a lui $\mathbb{N}$ a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Consecință: Principiul cutiei - varianta infinită (Infinite Pigeonhole Principle)

Fie Y o mulțime infinită și $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui Y, există o submulțime infinită monocromatică B a lui Y.

Notăm $[n] := \{1, \ldots, n\}$ și $[n]^k = \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\}$.

Teorema 3.99 (Teorema Ramsey finitară)

Fie $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice r-colorare a lui $[n]^k$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m cu proprietatea că $[D]^k$ este monocromatică.

Generalizare a Principiului cutiei (Pigeonhole Principle): Dacă avem r cutii și $r + 1$ obiecte, atunci cel puțin într-o cutie vor fi două obiecte. $\Longleftrightarrow$ Dacă colorăm $r + 1$ obiecte cu r culori, atunci există două obiecte care au aceeași culoare.

Pentru k, r, m date, notăm cel mai mic n cu proprietatea de mai sus cu $R(k, r, m)$. Atunci $R(1, r, 2) = r + 1$.

Vom demonstra folosind Teorema de compacitate că Teorema Ramsey implică Teorema Ramsey finitară.
Pentru simplitate, considerăm $r = 2, k = 2$.

Teorema 3.100 (Teorema Ramsey finitară)

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că teorema nu are loc. Atunci există $M \in \mathbb{N}$ cu următoarea proprietate:

(*) pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o 2-colorare a lui $[n]^2$ a.î. $[n]$ nu are submulțimi D de cardinal M cu proprietatea că $[D]^2$ este monocromatică.

În continuare, fixăm M ca mai sus.

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare)

Pentru orice mulțime nevidă D,

- oricărei 2-colorări c a lui $[D]^2$, îi asociem relația binară R_c pe D definită astfel:

$$R_c = \{(a, b) \in D^2 \mid c(\{a, b\}) = 1\}.$$

- oricărei relații binare R pe D îi asociem 2-colorarea c_R a lui $[D]^2$ definită astfel: pentru orice $\{a, b\} \subseteq D$,

$$c_R(\{a, b\}) = 1 \iff (a, b) \in R.$$

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie $\mathcal{L}$ limbajul de ordinul întâi care conține simbolurile de constantă $\{c_k \mid k \geq 1\}$ și un simbol U de relație binară. Pentru orice $n \geq M$, definim un enunț φ_n din $\mathcal{L}$ cu următoarea proprietate: pentru orice $\mathcal{A} = (A, \{c_k^{\mathcal{A}} \mid k \geq 1\}, U^{\mathcal{A}})$,

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} \vDash \varphi_n & \iff & c_i^{\mathcal{A}} \neq c_j^{\mathcal{A}} \text{ pentru orice } i \neq j \in \{1, \ldots, n\} \\ & & \text{și pentru orice } D \subseteq \{c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_n^{\mathcal{A}}\} \text{ de cardinal } M, \\ & & [D]^2 \text{ nu este monocromatică relativ la 2-colorarea } c_{U^{\mathcal{A}}}. \end{array}$$

$$\varphi_n = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(c_i = c_j) \ \wedge \bigwedge_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_M \leq n} \psi_{i_1,\ldots,i_M}, \text{ unde}$$

$$\psi_{i_1,\ldots,i_M} = \bigvee_{\substack{1 \leq j,k,p,q \leq M, \\ j \neq k, p \neq q, (j,k) \neq (p,q)}} U(c_{i_j}, c_{i_k}) \wedge \neg U(c_{i_p}, c_{i_q}).$$

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Evident, pentru $m \geq p$, avem că $\varphi_m \vDash \varphi_p$. Fie

$$\Gamma := \{\varphi_n \mid n \geq M\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 = \{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}\}, \quad \text{unde } n_1, \ldots, n_k \geq M.$$

Fie $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci orice model al lui φ_{n_0} este model al lui Γ. Aplicând (*) pentru n_0, rezultă că există o 2-colorare c_{n_0} a lui $[n_0]^2$ a.î. $[D]^2$ nu este monocromatică pentru nicio submulțime $D \subseteq [n_0]$ de cardinal M.

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{A}$ definită astfel:

- $|\mathcal{A}| = [n_0]$;
- pentru orice $i = 1, \ldots, n_0$, $c_i^{\mathcal{A}} = i$ și $c_k^{\mathcal{A}}$ arbitrar pentru $k > n_0$;
- $U^{\mathcal{A}} = R_{c_{n_0}}$.

Atunci $\mathcal{A} \vDash \varphi_{n_0}$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{B} = (B, \{c_n^{\mathcal{B}} \mid n \geq 1\}, U^{\mathcal{B}}).$$

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie

$$C = \{c_n^{\mathcal{B}} \mid n \geq 1\} \subseteq B.$$

Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, avem că $c_n^{\mathcal{B}} \neq c_m^{\mathcal{B}}$ pentru $n \neq m$. Prin urmare, $|C| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Aplicând Teorema Ramsey 3.97 pentru mulțimea infinită C și 2-colorarea $c_{U^{\mathcal{B}}}$ a lui $[B]^2$ (deci și a lui $[C]^2$), rezultă că C are o submulțime infinită D a.î. $[D]^2$ este monocromatică. Deoarece D este infinită, există N a.î. mulțimea $D_N := D \cap \{c_1^{\mathcal{B}}, \ldots, c_N^{\mathcal{B}}\}$ are cardinal M. Cum $[D_N]^2 \subseteq [D]^2$ este monocromatică, am obținut o contradicție cu faptul că $\mathcal{B} \vDash \varphi_N$.

$\square$