

Seminar 1

1 Breviar

1.1 Numărabilitate

Corolarul 1.10. Fie A o mulțime numărabilă și B o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.

Propoziția 1.13.

- (i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.
- (ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabilă.
- (iii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.

1.2 Logica propozițională

Fie $\varphi, \psi \in Form$.

Pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, notăm cu $e \models \varphi$ (și spunem că e **satisfacă** φ sau e este **model** pentru φ) dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notăm cu $\models \varphi$ (și spunem că φ este **tautologie**) dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem că $e \models \varphi$. Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$ și **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$, i.e. pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem că $e \not\models \varphi$. Notăm $\varphi \models \psi$ (și spunem că **din** φ **se deduce semantic** ψ sau că ψ **este consecință semantică a lui** φ) dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$ avem $e \models \psi$. Notăm cu $\varphi \sim \psi$ dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e \models \varphi$ dacă și numai dacă $e \models \psi$, i.e. pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$.

2 Exerciții

(S1.1)

- (i) Demonstrați că mulțimea $Expr$ a expresiilor logicii propoziționale este numărabilă.
- (ii) Demonstrați că mulțimea $Form$ a formulelor logicii propoziționale este numărabilă.

Demonstrație:

- (i) Avem că $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup Sim \cup \bigcup_{n \geq 2} Sim^n = A \cup B$, unde $A = \{\lambda\} \cup Sim$ și $B = \bigcup_{n \geq 2} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ și V este numărabilă, obținem, din Corolarul 1.10, că Sim este numărabilă. Aplicând încă o dată Corolarul 1.10, rezultă că A este numărabilă.

Conform Propoziției 1.13.(iii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 2$. Este evident că $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ este numărabilă (se poate verifica imediat că $h : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(n) = n - 2$ este bijecție). Putem aplica Propoziția 1.13.(i) pentru a concluziona că B este cel mult numărabilă. Evident, B este nevidă.

Aplicând din nou Corolarul 1.10, obținem că $Expr$ este numărabilă.

- (ii) Cum $Form \subseteq Expr$, iar $Expr$ este numărabilă, rezultă că $Form$ este o mulțime cel mult numărabilă.

Cum $V \subseteq Form$, iar V este infinită, rezultă că $Form$ este numărabilă.

□

(S1.2) Arătați că pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in Form$, avem:

- (i) $\psi \models (\varphi \rightarrow \psi)$;
- (ii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$.

Demonstrație: Vom folosi în demonstrații următoarele: pentru orice $a \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow a &= a, & a \rightarrow 1 &= 1, \\ 0 \rightarrow a &= 1, & a \rightarrow 0 &= \neg a, \\ 1 \wedge a &= a, & 0 \wedge a &= 0. \end{aligned}$$

(i) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\varphi) \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = 1 \text{ dacă și numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$.

Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) &= e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi), \end{aligned}$$

deci trebuie arătat că

$$e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 0 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 1 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

□

(S1.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

(i) $v_0 \rightarrow v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstrație:

(i) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_2, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \rightarrow v_2) = e^+(v_0) \rightarrow e^+(v_2) = e(v_0) \rightarrow e(v_2) = 0 \rightarrow 1 = 1,$$

deci $e \models v_0 \rightarrow v_2$.

(ii) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_4, \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

deci $e \models v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

□

(S1.4) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ , $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă φ este tautologie.

Demonstrație:

Avem:

$$\begin{aligned} \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă} &\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\ &\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\ &\iff \text{nu avem că există } e : V \rightarrow \{0, 1\} \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) \neq 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \neg e^+(\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \varphi \text{ este tautologie.} \end{aligned}$$

□