

Seminar 1

1 Breviar

1.1 Numărabilitate

Corolarul 1.10. Fie A o mulțime numărabilă și B o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.

Propoziția 1.13.

- (i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.
- (ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabilă.
- (iii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.

1.2 Logica propozițională

Fie $\varphi, \psi \in Form$.

Pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, notăm cu $e \models \varphi$ (și spunem că e **satisface** φ sau e este **model** pentru φ) dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notăm cu $\models \varphi$ (și spunem că φ este **tautologie**) dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem că $e \models \varphi$. Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$ și **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$, i.e. pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem că $e \not\models \varphi$. Notăm $\varphi \models \psi$ (și spunem că **din** φ **se deduce semantic** ψ sau că ψ **este consecință semantică a lui** φ) dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$ avem $e \models \psi$. Notăm cu $\varphi \sim \psi$ dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e \models \varphi$ dacă și numai dacă $e \models \psi$, i.e. pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$.

2 Exerciții

(S1.1)

- (i) Demonstrați că mulțimea $Expr$ a expresiilor logicii propoziționale este numărabilă.
- (ii) Demonstrați că mulțimea $Form$ a formulelor logicii propoziționale este numărabilă.

(S1.2) Arătați că pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in Form$, avem:

- (i) $\psi \models (\varphi \rightarrow \psi)$;
- (ii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$.

(S1.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

- (i) $v_0 \rightarrow v_2$;
- (ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

(S1.4) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ , $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă φ este tautologie.