FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 3

(S3.1) Să se deriveze prin rezoluţie clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \rightarrow v_2) \wedge (v_0 \rightarrow v_1)$$

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile şi aplicând legile de Morgan, obţinem că:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1)\\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1),\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ', a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ şi $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 şi C_2. Cum C_1 şi C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem aşadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ', formulă în FNC echivalentă semantic cu φ. □

(S3.2) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$i := 1$$
$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$$
$P1.1.$ $\quad x_1 := v_0$
$$T_1^1 := \{\{v_0\}\}$$
$$T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\}$$
$P1.2.$ $\quad U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$
$P1.3.$ $\quad \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$
$P1.4.$ $\quad i := 2;$ goto $P2.1$
$P2.1.$ $\quad x_2 := v_1$
$$T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\}$$
$$T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\}$$
$P2.2.$ $\quad U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
$P2.3.$ $\quad \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
$P2.4.$ $\quad i := 3;$ goto $P3.1$
$P3.1.$ $\quad x_3 := v_2$
$$T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$$
$$T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$$
$P3.2.$ $\quad U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
$P3.3.$ $\quad \mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
$P3.4.$ $\quad i := 4;$ goto $P4.1$
$P4.1.$ $\quad x_4 := v_3$
$$T_4^1 := \{\{v_3\}\}$$
$$T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$$
$P4.2.$ $\quad U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
$P4.3.$ $\quad \mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
$P4.4.$ $\quad i := 5;$ goto $P5.1$

$P5.1.$	$x_5 := v_4$
	$T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
	$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
$P5.4.$	$i := 6$; goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7$; goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$

(S3.3) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$	(A3) şi Propoziţia 2.54.(i)
(4)	Γ	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \varphi \to \varphi$	Propoziţiile 2.61 şi 2.55.(ii)
(6)	Γ	$\vdash \psi$	(MP): (4), (5).

$\square$

(S3.4) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice $\Gamma \subseteq Form$,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ şi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$;

(iv) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(v) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3) şi Propoziţia 2.54.(i)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	se aplică (i)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei.

Punctul (iii) se obţine în felul următor:

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	se aplică (ii) şi Prop. 2.55.(ii)
(2)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Ipoteză
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	Ipoteză
(5)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (4)
(6)	Γ	$\vdash \varphi$	(S4.2) pentru (5).

Demonstrăm în continuare (iv).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	se aplică (i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(S3.3) pentru (1)
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (v):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	se aplică (iv) cu $\varphi \mapsto \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

$\square$

(S3.5) Să se arate că pentru orice formulă φ,

$$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi.$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(2)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \varphi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(3)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg\varphi \to \varphi\}$	$\vdash \varphi$	(S3.4).(iii) pentru (1) şi (3)
(5)		$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	Teorema deducţiei.

□

(S3.6) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi).$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$	Propoziţia 2.54.(ii)
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	(S3.4).(iv) şi Prop. 2.55.(ii)
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \to \varphi)$	(S3.4).(iii) pentru (2) şi (6).

□

(S3.7) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demonstraţie:

(1)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S3.4).(iv) şi Propoziţia 2.55.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(S3.4).(iii) pentru (2) şi (6)
(8)	$\{\varphi \to \psi\}$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	Teorema deducţiei
(9)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Teorema deducţiei.

$\square$