FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 5

(S5.1) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

(i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, şi $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \to \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$.

(ii) Fie $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \to (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

(S5.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Notaţia 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu universul notat cu A, orice $e : V \to A$ şi orice a, $b \in A$, avem că:*

$$(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a} = (e_{x \mapsto a})_{y \mapsto b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \mapsto a, y \mapsto b}$. Aşadar,

$$e_{x \mapsto a, y \mapsto b} : V \to A, \quad e_{x \mapsto a, y \mapsto b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ şi } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S5.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$;

(ii) $\exists y \forall x \varphi \vDash \forall x \exists y \varphi$;

(iii) $\forall x \varphi \vDash \exists x \varphi$;

(iv) $\forall x(\varphi \to \psi) \vDash \exists x\varphi \to \exists x\psi$.

(S5.4) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \nvDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;

(ii) $\forall x\exists y\varphi \nvDash \exists y\forall x\varphi$.

(S5.5) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$,

(i) $\mathcal{N} \vDash \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;

(ii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;

(iii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.