FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 6

(S6.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că pentru orice $\mathcal{L}$-formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

(i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{╡}}\!\models \varphi \wedge \forall x\psi$;

(ii) $\varphi \mathrel{\text{╡}}\!\models \exists x\varphi$;

(iii) $\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{╡}}\!\models \forall x\psi \to \varphi$.

(S6.2) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat cu $\sim$. Să se scrie un $\mathcal{L}$-enunţ φ ce spune că relaţia asociată simbolului este o relaţie de echivalenţă cu proprietatea că fiecare clasă a sa are exact două elemente. Să se determine mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o $\mathcal{L}$-structură cu n elemente care satisface φ.

(S6.3) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_r$ ce conţine doar două simboluri, anume două simboluri de operaţie de aritate 2, notate cu $\dot{+}$ şi $\dot{\times}$, şi $\mathcal{L}_r$-structura $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_r$-formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R} \models \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

(S6.4) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$.

(S6.5) (Exerciţiu suplimentar) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de funcţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \not\models \varphi$ (în ultima sa apariţie, simbolul $+$ denotă operaţia de adunare pe componente pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).