FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 7

Pentru primele două exerciţii, fixăm $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I care conţine:

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

(S7.1) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

(i) $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y(\forall x P(x, y) \to \exists z Q(x, z))$;

(iii) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z))$;

(iv) $\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$.

Demonstraţie:

(i)

$$\begin{aligned}
\forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y, z) = d) &\;\mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}}\; \forall x(f(x) = c) \wedge \exists z \neg(g(y, z) = d)\\
&\;\mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}}\; \forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(y, z) = d)).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\forall y(\forall x P(x, y) \to \exists z Q(x, z)) &\;\mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}}\; \forall y \exists z(\forall x P(x, y) \to Q(x, z))\\
&\;\mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}}\; \forall y \exists z(\forall u P(u, y) \to Q(x, z))\\
&\;\mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}}\; \forall y \exists z \exists u(P(u, y) \to Q(x, z)).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\exists x\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y(S(y)\to\forall z R(z)) &\ \text{H}\!\!\!\text{=}\ \exists x(\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y\forall z(S(y)\to R(z))\\
&\ \text{H}\!\!\!\text{=}\ \exists x(\forall y P(x,y) \vee \forall y\exists z\neg(S(y)\to R(z))\\
&\ \text{H}\!\!\!\text{=}\ \exists x(\forall u P(x,u) \vee \forall y\exists z\neg(S(y)\to R(z))\\
&\ \text{H}\!\!\!\text{=}\ \exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y)\to R(z)).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\exists z(\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x\exists z Q(z,x)) &\ \text{H}\!\!\!\text{=}\\
\exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to (\neg\neg\exists x R(x) \vee \neg\forall x\exists z Q(z,x)) &\ \text{H}\!\!\!\text{=}\\
\exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to (\exists x R(x) \vee \exists x\forall z\neg Q(z,x)) &\ \text{H}\!\!\!\text{=}\\
\exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists x(R(x) \vee \forall z\neg Q(z,x)) &\ \text{H}\!\!\!\text{=}\\
\exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists x\forall z(R(x) \vee \neg Q(z,x)) &\ \text{H}\!\!\!\text{=}\\
\exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists u\forall v(R(u) \vee \neg Q(v,u)) &\ \text{H}\!\!\!\text{=}\\
\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u))). &
\end{aligned}$$

$\square$

(S7.2) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x\exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d))$;

(ii) $\forall y\exists z\exists u(P(u,y) \to Q(y,z))$;

(iii) $\exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))$;

(iv) $\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u)))$.

Demonstraţie:

(i) Avem $\varphi^1 = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d)_z(h(x)) = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,h(x)) = d)$, unde h este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(ii) Avem $\varphi^1 = \forall y\exists u(P(u,y) \to Q(y,z))_z(p(y)) = \forall y\exists u(P(u,y) \to Q(y,p(y)))$, unde p este un nou simbol de operaţie unară, şi $\varphi^2 = \forall y(P(u,y) \to Q(y,p(y)))_u(j(y)) = \forall y(P(j(y),y) \to Q(y,p(y)))$, unde j este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z (P(x,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, şi $\varphi^2 = \forall u \forall y (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_z(k(u,y)) = \forall u \forall y (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(k(u,y))))$, unde k este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall z \forall x \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u)))_u(n(z,x)) \\ &= \forall z \forall x \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(n(z,x)) \vee \neg Q(v, n(z,x)))),\end{aligned}$$

unde n este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

$\square$

Se notează cu $\mathcal{L}_{Graf}$ limbajul care conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat aici cu $\dot{E}$. Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned}(IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x,x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x,y) \to \dot{E}(y,x)).\end{aligned}$$

Atunci clasa tuturor grafurilor este axiomatizată de Γ, adică este egală cu $Mod(\Gamma)$.

(S7.3) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(iii) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3.

Demonstraţie:

(i) Fie $\mathcal{K}_1$ clasa grafurilor complete. Considerăm enunţul

$$\varphi_1 := \forall v_1 \forall v_2 (\neg(v_1 = v_2) \to \dot{E}(v_1, v_2)).$$

Atunci $\mathcal{K}_1 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_1\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_1)$.

(ii) Fie $\mathcal{K}_2$ clasa grafurilor care au proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă. Considerăm enunţul

$$\varphi_2 := \forall v_1 \exists v_2 \dot{E}(v_1, v_2) \wedge \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 (\dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_1, v_3) \to v_2 = v_3).$$

Atunci $\mathcal{K}_2 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_2\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_2)$.

(iii) Fie $\mathcal{K}_3$ clasa grafurilor care au cel puţin un ciclu de lungime 3. Considerăm enunţul

$$\varphi_3 := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \left(\dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_1) \right).$$

Atunci $\mathcal{K}_3 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_3\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_3)$.

□

Teorema 1 (Teorema de compacitate pentru logica de ordinul I)**.** *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I şi Γ o mulţime de $\mathcal{L}$-enunţuri. Dacă orice submulţime finită a lui Γ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.*

(S7.4) Să se arate că clasa grafurilor conexe nu este axiomatizabilă.
Demonstraţie: Presupunem că ar fi axiomatizată de o mulţime de enunţuri Σ.

Fie $\mathcal{L}'$ limbajul ce extinde $\mathcal{L}_{Graf}$ prin adăugarea a două noi constante notate cu c, d. Considerăm $\mathcal{L}'$-enunţurile:

$$\varphi_0 := \neg(c = d),$$

$$\varphi_1 := \neg(c\dot{E}d),$$

$$\varphi_2 := \neg\exists v_1(c\dot{E}v_1 \wedge v_1\dot{E}d),$$

iar pentru orice $n \geq 3$,

$$\varphi_n := \neg\exists v_1 \ldots \exists v_{n-1} \left(c\dot{E}v_1 \wedge v_{n-1}\dot{E}d \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-2} v_i\dot{E}v_{i+1} \right).$$

Se observă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, φ_n exprimă faptul că nu există un drum de lungime n între nodurile care interpretează constantele c şi d.
Fie $\Gamma := \Sigma \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Arătăm că orice submulţime finită a lui Γ este satisfiabilă. Fie $\Delta \subseteq \Gamma$ finită. Atunci există $N \in \mathbb{N}$ cu $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_n \mid n \leq N\}$. Fie graful a cărui mulţime suport este $V = \{0, \ldots, N+1\}$, iar pentru orice i, $j \in V$, punem iEj dacă şi numai dacă $|i - j| = 1$. Acest graf este conex. Interpretând în acest graf constanta c prin 0, iar d prin $N+1$, obţinem o $\mathcal{L}'$-structură care satisface $\Sigma \cup \{\varphi_n \mid n \leq N\}$, deci şi Δ.
Din teorema de compacitate, rezultă că Γ este satisfiabilă, i.e. admite un model. Dar aceasta duce la o contradicţie, deoarece, pe de-o parte, avem că modelul trebuie să fie conex (fiindcă $\Sigma \subseteq \Gamma$), iar, pe de altă parte, nodurile care interpretează constantele c şi d nu pot fi legate printr-un drum de nicio lungime (fiindcă $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Gamma$). □