FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 7

Pentru primele două exerciţii, fixăm $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I care conţine:

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

(S7.1) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

(i) $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z))$;

(iii) $\exists x\forall y P(x, y) \vee \neg\exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z))$;

(iv) $\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x\exists z Q(z, x))$.

(S7.2) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x\exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$;

(ii) $\forall y\exists z\exists u(P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;

(iii) $\exists x\forall u\forall y\exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;

(iv) $\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.

Se notează cu $\mathcal{L}_{Graf}$ limbajul care conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat aici cu $\dot{E}$. Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x\neg\dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x\forall y(\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Atunci clasa tuturor grafurilor este axiomatizată de Γ, adică este egală cu $Mod(\Gamma)$.

(S7.3) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(iii) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3.

Teorema 1 (Teorema de compacitate pentru logica de ordinul I)**.** *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I şi Γ o mulţime de $\mathcal{L}$-enunţuri. Dacă orice submulţime finită a lui Γ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.*

(S7.4) Să se arate că clasa grafurilor conexe nu este axiomatizabilă.