FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 8

Se notează cu $\mathcal{L}_{Graf}$ limbajul care conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat aici cu $\dot{E}$. Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x,x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x,y) \rightarrow \dot{E}(y,x)). \end{aligned}$$

Atunci clasa tuturor grafurilor (neorientate) este axiomatizată de Γ, adică este egală cu $Mod(\Gamma)$.

(S8.1) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(iii) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3.

Teorema 1 (Teorema de compacitate pentru logica de ordinul I)**.** *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I şi Γ o mulţime de $\mathcal{L}$-enunţuri. Dacă orice submulţime finită a lui Γ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.*

(S8.2) Să se arate că clasa grafurilor conexe nu este axiomatizabilă.

(S8.3) Fie $\mathcal{K}$ o clasă de $\mathcal{L}$-structuri şi $\mathcal{K}^c$ complementul său în clasa tuturor $\mathcal{L}$-structurilor. Dacă atât $\mathcal{K}$ cât şi $\mathcal{K}^c$ sunt axiomatizabile, atunci amândouă sunt finit axiomatizabile.

(S8.4) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi şi şi Γ o mulţime de enunţuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea că

$$(*) \quad \text{pentru orice } m \in \mathbb{N},\ \Gamma \text{ are un model finit de cardinal } \geq m.$$

Notăm cu $\mathcal{M}$ clasa modelelor finite ale lui Γ. Demonstraţi că $\mathcal{M}$ nu este axiomatizabilă.