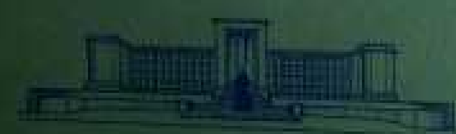
ACADEMIA MILITARĂ

Lector GEORGE GEORGESCU

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ



BUCUREȘTI — 1978

CAPITOLUL I

Elemente de teoria mulţimilor

In paragraful întîi al acestui capitol prezentăm cîteva noţiuni şi proprietăţi ale calculului propoziţional,absolut necesar pentru demonstrarea propoziţiilor de teoria mulţimilor referitoare la operaţiile finite cu mulţimi. Paragraful al doilea conţine definirea operaţiilor cu mulţimi (reuniune, intersecţie, complementară,etc.) şi proprietăţile lor principale.

Elemente foarte sumare ale calculului predicatelor sînt expuse în § 3, pentru a fi folosite în continuare în stabilirea proprietăţilor operaţiilor infinite cu mulţimi.

Relaţiile şi funcţiile sînt subiectul paragrafului 4, iar produsul cartezian infinit şi proprietatea sa de universalitate sînt prezentate în § 5.

Am considerat necesar să introducem un paragraf privind operaţiile cu cardinali, insistînd asupra mulţimilor numărabile. Ultimul paragraf se ocupă cu relaţiile de ordine şi preordine. Plasarea acestui paragraf în acest capitol este necesară pentru enunţarea axiomei lui Zorn, care este o axiomă a teoriei mulţimilor.

Nu am dezvoltat extensiv acest capitol, prezentînd numai un minim necesar pentru tratarea capitolelor următoare. O serie de proprietăţi au fost date sub formă de exerciţii. Precizăm că punctul de vedere adoptat este acela al „teoriei naive a mulţimilor".

§ 1. CALCULUL PROPOZIŢIONAL

In calculul propoziţional se studiază propoziţiile[1)] din punctul de vedere al adevărului sau falsităţii lor, neluîndu-se în considerare conţinutul lor. Fără îndoială, legile logicii sînt expresii ale unor legi naturale obiective, încît neconsiderarea conţinutului este necesară pentru a surprinde relaţiile logice ale fenomenelor naturale în toată generalitatea lor.

Vom nota propoziţiile prin literele $p, q, r, \ldots$. Pentru orice propoziţie p, definim valoarea ei logică $v(p)$ prin:

$$v(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă propoziţia } p \text{ este adevărată} \\ 0, & \text{dacă propoziţia } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Deci, pentru noi, o propoziţie p este perfect determinată dacă fi cunoaştem valoarea logică $v(p)$.

Dacă p,q sînt două propoziţii oarecare, atunci conjuncţia lor $p \wedge q$ este propoziţia „p şi q", iar valoarea ei de adevăr este dată de

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p,\ q \text{ sînt simultan adevărate} \\ 0, & \text{dacă cel puţin una din propoziţiile } p,\ q \text{ este falsă} \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, $v(p \wedge q) = 1$ dacă şi numai dacă $v(p) = 1$ şi $v(q) = 1$.

Disjuncţia $p \vee q$ a propoziţiilor p,q este propoziţia „p sau q", iar valoarea ei logică este definită prin:

$v(p \vee q) = 1$ dacă şi numai dacă $v(p) = 1$ sau $v(q) = 1$.

Negaţia $\neg p$ a unei propoziţii p are următoarea valoare de adevăr:

1). In acest capitol conceptul de „propoziţie" este cel uzual.

$$v(\neg p) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \text{ este adevărată} \\ 1, & \text{dacă } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Date două propoziţii p,q, implicaţia $p \Rightarrow q$ este propoziţia „p implică q" a cărei valoare de adevăr este

$$v(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v(p) = 1 \text{ şi } v(q) = 0 \\ 1, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Echivalenţa $p \Leftrightarrow q$ a două propoziţii p,q este propoziţia „p echivalent cu q" a cărei valoare de adevăr este dată de

$v(p \Leftrightarrow q) = 1$ dacă şi numai dacă $v(p) = v(q)$.

Aceste definiţii pot fi concentrate în următoarele tabele de adevăr.

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

conjuncţia $\wedge$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

disjuncţia $\vee$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implicaţia $\Rightarrow$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

echivalenţa $\Leftrightarrow$

$v(p)$	$v(\neg p)$
1	0
0	1

negația

Următoarele propoziții sînt adevărate, pentru orice propoziții p, q, r:

1. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$; $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$;
2. $[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$; $[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$;
3. $(p \vee p) \Longleftrightarrow p$; $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$;
4. $[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$; $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$;
5. $[p \vee (p \wedge q)] \Longleftrightarrow p$; $[p \wedge (p \vee q)] \Longleftrightarrow p$;
6. $p \vee \neg p$; $\neg(p \wedge \neg p)$;
7. $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$; $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
8. $(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$; $(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$;
9. $\neg\neg p \Longleftrightarrow p$;
10. $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$
11. $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)]$
12. $\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$

Vom arăta, de exemplu, că prima propoziție de la 7 este adevărată. Calculăm valoarea logică a propoziției $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, pentru orice valoare 0 sau 1 pe care o pot lua propozițiile componente p,q, . Sistematizăm acest calcul prin următorul tabel:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \wedge q)$	$v(\neg(p \wedge q))$	$v(\neg p)$	$v(\neg q)$	$v(\neg p \vee \neg q)$	$v(\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

În toate cazurile am obținut valoarea 1.

Demonstrația se face în aceeași manieră pentru toate proprietățile 1 - 12.

§ 2. MULȚIMI. OPERAȚII CU MULȚIMI

Pentru noi, conceptul de mulțime va avea semnificația uzuală de colecție, grămadă etc. Vom nota mulțimile prin literele A, B, C, X, Y, Z etc. Obiectele din care este formată o mulțime se vor numi elemente. Elementele unei mulțimi vor fi notate a,b,c,x,y, z,etc.

Faptul că elementul x face parte din mulțimea A va fi notat $x \in A$ și se va citi:„x aparține mulțimii A ".

Vom extinde conceptul de mulțime prin considerarea mulțimii vide $\emptyset$, care este „mulțimea fără nici un element".

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B, dacă orice element al lui A este și element al lui B. Scriem aceasta prescurtat $A \subset B$. Definiția incluziunii $A \subset B$ poate fi dată și astfel:

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea $A \cup B$ definită de

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B]$$

Un alt mod de-a scrie această definiție este

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

În cele ce urmează vom omite parantezele, scriind astfel

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

<u>Intersecţia</u> a două mulţimi A şi B este mulţimea $A \cap B$ definită de

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Această definiţie poate fi dată sub forma

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

<u>Diferenţa</u> a două mulţimi A şi B este definită astfel

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

<u>OBSERVAŢIE</u>. Prin $x \notin B$ am notat propoziţia $\neg(x \in B)$.

Dacă $A \subset B$ se spune că A este o <u>parte</u> (sau o <u>submulţime</u>) a lui B. Prin convenţie, $\emptyset$ este submulţime a oricărei mulţimi. Pentru orice mulţime A, vom nota cu $\mathscr{P}(A)$ mulţimea tuturor părţilor lui A.

$$\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Fiind dată o mulţime A şi o parte a sa B, definim „<u>complementara</u> $C_A(B)$ <u>a lui B în raport cu A</u>" prin

$$C_A(B) = A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

În teoria mulţimilor, concepută astfel, se pot ivi paradoxuri de următorul tip.

<u>Paradoxul lui Russell</u>: Presupunem că $A = \{x \mid x \notin x\}$ este o mulţime. Atunci pentru orice x, vom avea

$$x \in A \Longleftrightarrow x \notin x.$$

În particular, pentru $x = A$ vom avea

$$A \in A \Longleftrightarrow A \notin A,$$

ceea ce este evident contradictoriu.

Din cauza paradoxurilor, sîntem conduşi la a considera colecţii care nu sînt neapărat mulţimi, numite <u>clase</u>. Spre exemplu, vom vorbi de „clasa tuturor mulţimilor", care nu mai este o mulţime.

<u>PROPOZIŢIA 1</u>: Pentru orice mulţimi A, B, C sînt verificate următoarele relaţii:

(1) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(4) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

(5) $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$;

(6) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(7) $A = B \Longleftrightarrow [A \subset B] \wedge [B \subset A]$;

(8) $A \subset A$;

(9) $[A \subset B] \wedge [B \subset C] \Rightarrow A \subset C$;

(10) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$; $A - B \subset A$;

(11) $[A \subset B] \wedge [C \subset D] \Rightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup D)] \wedge [(A \cap C) \subset (B \cap D)]$

(12) $[A \subset B] \Longleftrightarrow [A \cup B = B] \Longleftrightarrow [A \cap B = A]$;

(13) $A \cap B = A - (A - B)$;

(14) $A \cup (B - A) = A \cup B$;

(15) $A - (A \cap B) = A - B$

(16) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

<u>Demonstraţie</u>: Vom stabili, de exemplu, prima din relaţiile (3):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aplicînd propoziţia 4, § 1, rezultă echivalenţele:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Longleftrightarrow (x \in A) \vee [x \in B \cap C] \\ &\Longleftrightarrow (x \in A) \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)] \\ &\Longleftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)] \\ &\Longleftrightarrow [x \in A \cup B] \wedge [x \in A \cup C] \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

A rezultat: $x \in A \cup (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ceea ce este acelaşi lucru cu egalitatea ce trebuie demonstrată.

In acelaşi mod se demonstrează toate relaţiile enumerate mai sus.

<u>PROPOZITIA 2</u>. Dacă B, C sînt submulţimi ale lui A, atunci avem relaţiile:

(17) $B \subset C \Longrightarrow \complement_A(C) \subset \complement_A(B)$;

(18) $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_B(C)$;

(19) $\complement_A(B \cap C) = \complement_A(B) \cup \complement_A(C)$; (relaţiile lui de Morgan)

(20) $\complement_A(A) = \emptyset$; $\complement_A(\emptyset) = A$.

Lăsăm demonstraţia acestor relaţii pe seama cititorului.

Dacă sînt date mulţimile $A_1, \dots, A_n$, atunci definim <u>intersecţia</u> şi <u>reuniunea</u> lor astfel:

$$A_1 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \dots \wedge (x \in A_n)\}$$

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \{x \in (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \dots \vee (x \in A_n)\}$$

se mai folosesc şi notaţiile:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n; \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Menţionăm următoarele proprietăţi:

(21) $\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} \left[A_i \cup B\right]$;

(22) $\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \left[A_i \cap B\right]$;

(23) $\complement_A\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcap_{i=1}^{n} \complement_A(A_i)$;

(24) $\complement_A\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} \complement_A(A_i)$.

Fie A, B două mulţimi oarecare. <u>Produsul cartezian</u> al mulţimilor A şi B este mulţimea A x B definită astfel:

$$A \times B = \{(x,y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\} .$$

In general, produsul cartezian a n mulţimi $A_1, \dots, A_n$ este

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \dots \wedge (x_n \in A_n)\}.$$

Se folosesc notaţiile:

$$\prod_{i=1}^{n} A_n = A_1 \times \dots \times A_n.$$

$A^n = A_1 \times \dots \times A_n$, dacă $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$.

Produsul cartezian are următoarele proprietăţi:

(25) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$;

(26) $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$;

(27) $(A_1 - A_2) \times B = (A_1 \times B) - (A_2 \times B)$;

(28) Dacă A_1, A_2, B_1, B_2 sînt nevide, atunci

$$\left[A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2\right] \Longrightarrow \left[A_1 = A_2\right] \wedge \left[B_1 = B_2\right] ;$$

(29) $A \times B = \emptyset$, dacă $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset$.

§ 3. <u>CALCULUL PREDICATELOR</u>

In calculul propoziţional nu ne-am interesat de structura propoziţiilor, care au fost considerate ca nişte întregi, preocupîndu-ne numai de valoarea lor logică.

Considerînd propoziţia „Socrate este muritor", observăm în alcătuirea lui un individ, „Socrate" şi o proprietate „muritor". Propoziţiile „Platon este muritor" şi „Aristotel este muritor" au aceeaşi formă şi diferă doar individul despre care se afirmă că este muritor.

Toate aceste propoziţii au forma „x este muritor". In general, vom considera expresii de forma „x are proprietatea P", pe care le vom nota $P(x)$.

Aceste expresii le vom numi <u>predicate</u> (Hilbert şi Bernays, Grundlagen der Mathematik, vol.I, 1934) sau funcţii <u>propoziţionale</u> (Russel şi Whitehead, Principia Mathematica, vol.I, 1910).

In Principia Mathematica, acest concept este definit astfel: „printr-o funcţie propoziţională înţelegem ceva care conţine o variabilă x şi exprimă o propoziţie de îndată ce lui x i se atribuie o valoare".

Cu alte cuvinte, <u>un predicat $P(x)$ devine o propoziţie $P(a)$ dacă se atribuie lui x o valoare determinată a.</u> Propoziţia $P(a)$ poate fi adevărată sau falsă.

Vom presupune că x ia valori într-o mulţime A de indivizi, astfel încît pentru orice $a \in A$, $P(a)$ este o propoziţie cu sens.

Pentru exemplificare, să luăm predicatul „x este muritor". Propoziţia „Socrate este muritor" are sens, pe cînd „numărul 7 este muritor" este fără sens.

Toate aceste consideraţii au fost luate din „Logica polivalentă", de A. Dumitriu (pag.74 - 75).

Fie $P(x)$ un predicat oarecare. Din predicatul $P(x)$ putem forma următoarele propoziţii:

$(\exists x)\, P(x)$: există x care are proprietatea P.

$(\forall x)\, P(x)$: pentru orice x are loc proprietatea P.

$\forall$ se numeşte <u>cuantificator universal</u>, iar $\exists$ <u>cuantificator existenţial</u>.

Vom spune că propoziţia $(\exists x)\, P(x)$ este <u>adevărată în mulţimea</u> A, dacă există $a \in A$, astfel încît $P(a)$ este o propoziţie adevărată.

Propoziţia $(\forall x)\, P(x)$ este <u>adevărată în mulţimea A</u> dacă pentru orice $a \in A$, propoziţia $P(a)$ este adevărată.

In mod analog, pot fi considerate predicate $P(x_1, \ldots, x_n)$ care depind de n variabile. Aceste predicate se numesc <u>predicate n-are</u>; $x_1, \ldots, x_n$ se vor numi <u>variabile</u>.

Dacă $P(x,y)$ este un predicat binar, atunci <u>$(\forall x)\, P(x,y)$ şi $(\exists x)\, P(x,y)$ sînt predicate unare în variabila y.</u> Vom spune că în aceste predicate variabila x este <u>legată</u>, iar variabila y este <u>liberă</u>.

Aceste definiţii se pot generaliza pentru predicate în oricîte variabile. In scrierea predicatelor <u>orice variabilă liberă trebuie notată diferit de orice variabilă legată</u>.

De exemplu, nu putem avea $(\exists x)(\forall x)\, P(x,y)$, însă scrierea $(\exists y)(\forall y)\, P(x,y)$ este corectă.

Dacă P, Q sînt predicate, atunci

$$P,\ P \vee Q,\ P \wedge Q,\ P \Longrightarrow Q,\ P \Longleftrightarrow Q,$$

sînt de asemenea predicate.

<u>Un predicat în care toate variabilele sînt legate se va numi predicat constant sau enunţ.</u>

Pentru orice predicate $P(x)$, $Q(x)$ şi pentru orice mulţime A, în A sînt adevărate următoarele enunţuri:

(a) $\neg(\forall x)\, P(x) \Longleftrightarrow (\exists x) \neg P(x)$

(b) $\neg(\exists x)\, P(x) \Longleftrightarrow (\forall x) \neg P(x)$

(c) $(\forall x)\, P(x) \Longrightarrow (\exists x)\, P(x)$

(d) $[(\forall x)(P(x) \Longrightarrow Q(x))] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Longrightarrow (\forall x)Q(x)]$

(e) $[(\exists x)\, P(x) \Longrightarrow (\exists x)Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)(P(x) \Longrightarrow Q(x))]$

(f) $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)] \Longleftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)]$

(g) $\exists x\, [P(x) \vee Q(x)] \Longleftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)]$

Dacă $P(x,y)$ este un predicat binar, atunci în A sînt adevărate enunţurile:

(h) $(\forall x)(\forall y)\ P(x,y) \Longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)\ P(x,y)$

(i) $(\exists x)(\exists y)\ P(x,y) \Longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)\ P(x,y)$

(j) $(\exists x)(\forall y)\ P(x,y) \Longleftrightarrow (\forall y)(\exists x)\ P(x,y)$

§ 4. RELAŢII ŞI FUNCŢII

Fie A o mulţime. O relaţie n-ară pe A este o submulţime R a lui A^n.

Definiţia 1. Fie A,B două mulţimi oarecare. O funcţie definită pe A cu valori în B este o relaţie unară pe A x B (adică $\Gamma \subset A \times B$) cu proprietatea că pentru orice $x \in A$ există un element $y \in B$ şi numai unul, astfel încît $(x,y) \in \Gamma$.

Vom nota o funcţie $\Gamma \subset A \times B$ prin $f: A \longrightarrow B$, simbolul f avînd semnificaţia următoare: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ astfel încît $(x,f(x)) \in \Gamma$.

A se numeşte domeniul de definiţie al funcţiei $f: A \longrightarrow B$ şi B se numeşte domeniul valorilor lui f.

Date funcţiile $f: A \longrightarrow B$ şi $g: B \longrightarrow C$, prin compunerea lor se înţelege funcţia $g\circ f: A \longrightarrow C$, definită de $(g\circ f)(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in A$.

Compunerea funcţiilor este asociativă: pentru funcţiile $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$, avem relaţia $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

Pentru orice mulţime A, funcţia identică $1_A: A \longrightarrow A$ este definită de $1_A(x) = x$, pentru orice $x \in A$.

Vom spune, că diagramele următoare

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

sînt comutative, dacă $g\circ f = h$, respectiv $h\circ f = k\circ g$.

În general, o configuraţie compusă din diagrame de tipul de mai sus este o diagramă comutativă, dacă diagramele componente sînt comutative.

Funcţia $f: A \longrightarrow B$ este injectivă dacă pentru orice $x,y \in A$, avem:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Evident, această relaţie este echivalentă cu

$$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

Funcţia $f: A \longrightarrow B$ este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$, există $x \in A$, astfel încît $f(x) = y$.

O funcţie injectivă şi surjectivă se numeşte bijectivă. Pentru aceste trei categorii de funcţii se folosesc şi denumirile: injecţie, surjecţie şi bijecţie.

O funcţie $f: A \longrightarrow B$ este inversabilă, dacă există o funcţie $g: B \longrightarrow A$ cu proprietăţile $g\circ f = 1$ şi $f\circ g = 1$.

Exerciţiu. Dacă $f: A \longrightarrow B$ este inversabilă, să se arate că există o singură funcţie $g: B \longrightarrow A$ cu proprietăţile $g\circ f = 1$ şi $f\circ g = 1$.

Funcţia $g: B \longrightarrow A$ cu aceste proprietăţi se numeşte inversa lui f şi se notează f^{-1}. Deci avem relaţiile

$$f^{-1}\circ f = 1_A\ ,\quad f\circ f^{-1} = 1_B\ .$$

PROPOZIŢIA 1. Pentru o funcţie $f: A \longrightarrow B$, sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) f este bijectivă.

(ii) f este inversabilă.

Demonstraţie (i) $\Longrightarrow$ (ii). Presupunem că f este bijectivă. Fie $y \in B$. Cum f este surjectivă, există $x \in A$, astfel încît $f(x) = y$.

f fiind injectivă, acest element este unic, deci putem defini o funcţie $g: B \longrightarrow A$ prin $g(y) = x$. Rezultă imediat că această funcţie este inversa lui f.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Este un simplu exerciţiu pentru cititor.

Fie $f: A \longrightarrow B$ o funcţie oarecare. Dacă $X \subset A$ şi $Y \subset B$, atunci notăm:

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$: imaginea directă a lui X prin f.

$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$: imaginea reciprocă a lui Y prin f.

PROPOZITIA 2. Fie $f: A \longrightarrow B$ o funcţie oarecare şi $X_1, X_2 \subset A$, $Y_1, Y_2 \subset B$. Atunci avem următoarele relaţii:

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$
$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$$
$$f(X_1) - f(X_2) \subset f(X_1 - X_2)$$
$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$
$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$$
$$f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$$

Fie I o mulţime nevidă. Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulţime A_i spunem că avem o familie de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ indexată de mulţimea I.

Reuniunea şi intersecţia familiei $(A_i)_{i \in I}$ sînt definite astfel

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{există } i \in I, \text{ astfel încît } x \in A_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ pentru orice } i \in I\}$$

PROPOZITIA 3. Pentru orice familie $(A_i)_{i \in I}$ de mulţimi şi pentru orice mulţime B, avem relaţiile următoare:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B); \quad \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B);$$

PROPOZITIA 4. Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de părţi ale unei mulţimi X, atunci

$$C_X\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} C_X(A_i); \quad C_X\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} C_X(A_i)$$

Demonstraţia acestor două propoziţii este simplă. Spre exemplificare, să demonstrăm a doua relaţie a Propoziţiei 4:

$$\begin{aligned} x \in C_X\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \neg\Big(x \in \bigcap_{i \in I} A_i\Big) \\ &\Longleftrightarrow \neg(\forall i \in I)[x \in A_i] \\ &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)[\neg(x \in A_i)] \\ &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)[x \in C_X(A_i)] \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} C_X(A_i), \end{aligned}$$

folosind relaţia (a), § 3.

Fie acum R o relaţie binară pe mulţimea A ($R \subset A^2$). R se numeşte relaţie de echivalenţă pe A dacă pentru orice $x, y, z \in A$ sînt satisfăcute proprietăţile:

$(x,x) \in R$	(reflexivitate)
$(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$	(simetrie)
$(x,y) \in R,\ (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$	(tranzitivitate)

Vom folosi următoarea notaţie: $x \sim y \Longleftrightarrow (x,y) \in R$. Proprietăţile de mai sus se transcriu astfel

$$x \sim x$$
$$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$$
$$x \sim y,\ y \sim z \Longrightarrow x \sim z.$$

Pentru orice $x \in A$, vom nota $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$. $\hat{x}$ se numeşte clasa de echivalenţă a lui x. Sînt imediate proprietăţile

$$x \sim y \iff \hat{x} = \hat{y}$$
$$x \not\sim y \implies \hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$$

O familie $(A_i)_{i\in I}$ se submulţimi ale lui A se numeşte <u>partiţie</u> dacă:

$$i,\ j \in I,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset;$$
$$\bigcup_{i\in I} A_i = A.$$

Orice partiţie $(A_i)_{i\in I}$ defineşte o relaţie de echivalenţă pe A:

$$x \sim y \iff \text{există } i\in I, \text{ astfel încît } x,\ y \in A_i.$$

Reciproc, orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe A pune în evidenţă o partiţie, dată de mulţimea claselor de echivalenţă.

Se poate arăta că această corespondenţă este bijectivă.

Dată relaţia de echivalenţă $\sim$ pe A, mulţimea claselor de echivalenţă ale elementelor lui A se numeşte <u>mulţimea cît a lui A prin $\sim$</u> şi se notează prin $A/\sim$.

Funcţia $p: A \longrightarrow A/\sim$ definită de $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x\in A$, este surjectivă.

§ 5. <u>PRODUS CARTEZIAN AL UNEI FAMILII DE MULŢIMI</u>

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi indexată de mulţimea I. Prin <u>produsul cartezian</u> al familiei $(A_i)_{i\in I}$ înţelegem mulţimea următoare

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; f(i)\in A_i, \text{ pentru orice } i\in I \right\}.$$

In general, printr-o familie $(x_i)_{i\in I}$ de elemente ale unei mulţimi X se înţelege că fiecărui $i\in I$ îi este asociat un singur element x_i al lui X. I se numeşte mulţimea de indici a familiei $(x_i)_{i\in I}$.

Orice funcţie $f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ este perfect determinată de familia $(f(i))_{i\in I}$, deci definiţia produsului cartezian $\prod_{i\in I} A_i$ mai poate fi dată astfel:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \;\middle|\; x_i \in A_i, \text{ pentru orice } i\in I \right\}.$$

Pentru orice $j\in I$, aplicaţia $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ definită de

$$\pi_j\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_j$$

este surjectivă $\{\pi_j \mid j\in I\}$ se numesc <u>proiecţiile canonice</u> ale lui $\prod_{i\in I} A_i$.

<u>PROPOZIŢIA 1.</u> Considerăm produsul cartezian $\prod_{i\in I} A_i$ şi proiecţiile canonice π_j, $j\in I$. Atunci pentru orice mulţime B şi pentru orice familie de aplicaţii $\{f_j: B \longrightarrow A_j \mid j\in I\}$, există o funcţie $g: B \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ şi una singură, astfel încît diagramele următoare sînt comutative.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_i \arrow[rr, "\pi_j"] & & A_j \\
& B \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}, \quad j\in I$$

Cu alte cuvinte, pentru orice $j\in I$, avem $\pi_j \circ g = f_j$.

<u>Demonstraţie</u>. (Existenţă). Pentru orice $x\in B$, vom pune prin definiţie

$$g(x) = \left(f_i(x)\right)_{i\in I}.$$

Pentru orice $i\in I$, avem $f_i(x)\in A_i$, deci $\left(f_i(x)\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. Dacă $j\in I$ şi $x\in B$, atunci

$$\pi_j(g(x)) = \pi_j\left(\left(f_i(x)\right)_{i\in I}\right) = f_j(x),$$

ceea ce arată că $\pi_j \circ g = f_j$, pentru orice $j\in I$.

(Unicitate) fie $h: B \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ astfel încît $\pi_j \circ h = f_j$ pentru orice $j\in I$. Vom arăta că h coincide cu g. Pentru orice $x\in B$, vom avea $h(x) = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, deci

$$f_j(x) = \pi_j(h(x)) = \pi_j\left((y_i)_{i\in I}\right) = y_j, \text{ pentru orice } j\in I.$$

De aici rezultă

$$g(x) = \left(f_i(x)\right)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} = h(x),$$

deci $g = h$. Propoziţia a fost demonstrată.

Corolar. Fie două familii de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ şi o familie de funcţii $(f_i: A_i \longrightarrow B_i)_{i\in I}$. Atunci există o aplicaţie

$$g: \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i$$

şi una singură astfel încît sînt comutative următoarele diagrame.

$$\begin{tikzcd}
\prod A_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \prod B_i \arrow[d, "\pi'_j"] \\
A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j
\end{tikzcd}$$

π_j, π'_j fiind proiecţiile canonice.

§ 6. MULŢIMI ECHIPOTENTE. CARDINALI

Pentru orice mulţime finită, numărul său de elemente este o noţiune bine precizată. Numărul natural n este reprezentarea abstractă a tuturor mulţimilor „cu n elemente". Conceptul de număr natural permite compararea mulţimilor finite.

Este evident că a spune că două mulţimi finite au acelaşi număr de elemente este echivalent cu faptul că ele se pot pune în

corespondenţă bijectivă.

Această observaţie sugerează introducerea unui concept care să reprezinte „numărul de elemente ale unei mulţimi oarecare".

Vom spune că două mulţimi A şi B sînt echipotente sau că au aceeaşi putere dacă există o bijecţie $f: A \longrightarrow B$. Se scrie acest lucru simbolic: $A \sim B$.

PROPOZIŢIA 1. Echipotenţa este o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Demonstraţie. Aplicaţia identică $1_A: A \longrightarrow A$ este bijectivă, deci $A\sim A$. Dacă $A\sim B$, atunci există o bijecţie $f: A \longrightarrow B$. Inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$ este bijectivă, deci $B\sim A$. Presupunînd că $A\sim B$ şi $B\sim C$, rezultă bijecţiile $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$. Funcţia compusă $g\circ f: A \longrightarrow B$ este bijectivă, deci $A\sim C$.

OBSERVAŢIE. Echipotenţa este o „relaţie de echivalenţă" definită pe clasa tuturor mulţimilor.

Pentru orice mulţime A, vom nota cu $\overline{\overline{A}}$ sau card A clasa de echivalenţă a mulţimilor echipotente cu A:

$$\text{card } A = \overline{\overline{A}} = \left\{B \;\middle|\; \text{există } f: A \longrightarrow B \text{ bijectivă}\right\}.$$

Vom spune că $\overline{\overline{A}}$ este cardinalul mulţimii A.

OBSERVAŢIE. In cazul cînd A este o mulţime finită, $\overline{\overline{A}}$ poate fi asimilat cu numărul n al elementelor lui A, în sensul că n reprezintă toate mulţimile din $\overline{\overline{A}}$, identificate din punctul de vedere al „numărului lor de elemente".

Mulţimi numărabile. O mulţime A este numărabilă dacă este echipotentă cu mulţimea N a numerelor naturale. Vom nota cardinalul lui N cu $\aleph_0$ (aleph zero).

Cu alte cuvinte, o mulţime este numărabilă dacă elementele sale se pot aşeza sub forma unui şir.

Este evident că mulţimea Z a numerelor întregi este numărabilă.

PROPOZIŢIA 2. Orice reuniune numărabilă de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie. Fie $(A_n)_{n\in N}$ o familie numărabilă de mulţimi numărabile.

Dacă $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}, \dots\}$ pentru orice $n\in N$, atunci vom scrie elementele reuniunii $\bigcup_{n\in N} A_n$ sub forma unui tablou:

$$\begin{array}{lccccc}
n=1 & a_{11} \to & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \cdots \\
n=2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \cdots \\
n=3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \cdots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
n=n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \cdots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Elementele acestui tablou pot fi puse sub forma unui şir conform ordinii indicată prin săgeţi:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots$$

Corolar 1: Orice reuniune finită de mulţimi numărabile este numărabilă.

Corolar 2: Produsul cartezian a două mulţimi numărabile A,B este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie: $A \times B = \bigcup_{x\in A} (\{x\} \times B)$.

Corolar 3: Produsul cartezian a n mulţimi numărabile $A_1, \dots, A_n$ este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie: Prin inducţie, aplicînd corolarul 2.

Corolar 4: Mulţimea Q a numerelor raţionale este numărabilă.

Demonstraţie: Dacă $A_n = \left\{\frac{m}{n} : m\in Z\right\}$, pentru orice $n = 1,2,\dots$, atunci

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Corolar 5. Mulţimea şirurilor finite ai căror termeni aparţin unei mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie: Fie A o mulţime numărabilă şi A_m mulţimea şirurilor cu m elemente din A. Atunci mulţimea menţionată în corolarul 5 este $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup \dots$

Corolar 6. Mulţimea $Q[X]$ a polinoamelor cu coeficienţi raţionali este numărabilă.

Demonstraţie. Orice polinom $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ este definit de şirul finit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, deci mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în Q poate fi pusă în corespondenţă bijectivă cu mulţimea şirurilor finite de numere raţionale.

Corolar 7. Mulţimea numerelor algebrice este numărabilă.

Demonstraţie. Reamintim că un număr algebric este o rădăcină a unui polinom din $Q[X]$. Conform corolarului 6, $Q[X]$ este o mulţime numărabilă:

$$Q[X] = \{P_1(X), P_2(X), \dots, P_m(X), \dots\}.$$

Pentru orice $m = 1, 2, \dots$, mulţimea A_m a rădăcinilor lui $P_m(X)$ este finită. Observînd că mulţimea numerelor algebrice este $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, demonstraţia este încheiată.

Propoziţia 3. Mulţimea (0,1) nu este numărabilă.

Demonstraţie. Presupunem că intervalul (0,1) este numărabil, deci putem aranja elementele sale într-un şir:

$$\begin{array}{l}
a_1 = 0,\ a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \dots \\
a_2 = 0,\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \dots \\
\dots \\
a_n = 0,\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \dots \\
\dots
\end{array}$$

Notînd

$$e_n = \begin{cases} o, & \text{dacă } a_{nn} \neq o \\ 1, & \text{dacă } a_{nn} = o, \end{cases}$$

se obţine un număr $o, e_1e_2, \dots, e_n \dots$ din intervalul $(o,1)$ care este diferit de toţi termenii şirului considerat. Contradicţia este evidentă.

Corolar 1. Mulţimea R a numerelor reale este nenumărabilă.

OBSERVAŢIE. Din faptul că R este nenumărabilă, iar mulţimea numerelor algebrice este numărabilă, rezultă existenţa numerelor transcendente (numere reale care nu sînt algebrice).

Operaţii cu cardinali

Fie A, B două mulţimi oarecare. Atunci putem găsi două mulţimi A_1, B_1 astfel încît $A \sim A_1$, $B \sim B_1$ şi $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Intr-adevăr, luînd două elemente $a \neq b$ şi punînd $A_1 = \{a\} \times A$, $B_1 = \{b\} \times B$, vom avea:

$A \sim A_1$: prin funcţia bijectivă $f: A \longrightarrow A_1$ dată de $f(x) = (a,x)$, pentru orice $x \in A$;

$B \sim B_1$: prin funcţia bijectivă $g: B \longrightarrow B_1$ dată de $g(y) = (b,y)$, pentru orice $y \in B$;

$A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

Prin definiţie, suma cardinalilor $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ este

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A_1 \cup B_1}}$$

Este necesar să arătăm că această definiţie nu depinde de reprezentanţi, adică:

$$\left.\begin{array}{l} A \sim A_1,\ B \sim B_1,\ A_1 \cap B_1 = \emptyset \\ A \sim A_2,\ B \sim B_2,\ A_2 \cap B_2 = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2.$$

Conform ipotezei din stînga implicaţiei, există bijecţiile:

$$f_1: A \longrightarrow A_1,\quad g_1: B \longrightarrow B_1;$$
$$f_2: A \longrightarrow A_2,\quad g_2: B \longrightarrow B_2.$$

Notînd $f = f_2 \circ f_1^{-1}: A_1 \longrightarrow A_2$, şi $g_2 \circ g_1^{-1}: B_1 \longrightarrow B_2$, rezultă că f, g sînt bijective. Considerînd funcţia $h: A_1 \cup B_1 \longrightarrow A_2 \cup B_2$ definită astfel

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A_1 \\ g(x), & \text{dacă } x \in B_1, \end{cases}$$

şi ţinînd seama $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, se poate arăta uşor că h este o bijectivă. Rezultă $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$.

Pentru orice două mulţimi A, B, definim produsul cardinalilor $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ prin

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$$

Se poate arăta (exerciţiu) că definiţia nu depinde de alegerea reprezentanţilor A, B ai claselor $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$, adică

$$A \sim A',\ B \sim B' \Longrightarrow A \times B \sim A' \times B'.$$

Tot pe seama cititorului lăsăm să arate şi faptul că în cazul mulţimilor finite, cele două definiţii corespund adunării şi înmulţirii a două numere naturale.

Aceste definiţii se generalizează pentru o familie oarecare de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$.

Se poate găsi la fel ca mai sus, o familie $(A_i')_{i \in I}$ de mulţimi cu proprietăţile:

$$A_i \sim A_i', \quad \text{pentru orice } i \in I.$$

$$A_i' \cap A_j' = \emptyset, \text{ pentru orice } i, j \in I,\ i \neq j.$$

Atunci suma cardinalilor $(\overline{\overline{A_i}})_{i \in I}$ este

$$\sum_{i \in I} \overline{\overline{A_i}} = \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} A_i'}}.$$

<u>Produsul</u> familiei $(\overline{\overline{A}}_i)_{i\in I}$ de cardinali va fi:

$$\prod_{i\in I} \overline{\overline{A}}_i = \overline{\overline{\prod_{i\in I} A_i}}$$

Fie acum A, B două mulţimi oarecare. Dacă notăm A^B mulţimea funcţiilor $f: B \to A$, atunci cardinalul $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$ este, prin definiţie, $\overline{\overline{A^B}}$.

Menţionăm următoarele proprietăţi ale operaţiilor cu cardinali:

(1) $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A}}$; $(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}) + \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}} + (\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}})$

(2) $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$; $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$; $\overline{\overline{A}} + n = \overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{A}} \cdot n = \overline{\overline{A}}$,

unde n este un număr natural oarecare.

(3) $\overline{\overline{A}} \cdot (\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}) = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{C}}$

(4) $\overline{\overline{A}} \cdot n = \underbrace{\overline{\overline{A}} + \cdots + \overline{\overline{A}}}_{\text{de n- ori}}$,

unde n este un număr de natural oarecare.

(5) $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} \cdot \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{C}}}$

(6) $(\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}})^{\overline{\overline{C}}} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{C}}} \cdot \overline{\overline{B}}^{\overline{\overline{C}}}$.

(7) $(\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}})^{\overline{\overline{C}}} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}}}$

(8) $\overline{\overline{A}}^{n} = \overline{\overline{A}} \cdot \underbrace{\overline{\overline{A}} \cdot \cdots \cdot \overline{\overline{A}}}_{\text{de n-ori}}$, unde $n \in N$.

Demonstrarea acestor relaţii este un exerciţiu util pentru cititor.

<u>PROPOZITIA 4</u>. Pentru orice mulţime A, $\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$.

<u>Demonstraţie</u>. Considerînd o mulţime oarecare cu două elemente, fie ea $\{0,1\}$, va trebui să arătăm că $\mathscr{P}(A) \sim \{0,1\}^A$.

Pentru orice $B \subset A$, definim <u>funcţia sa caracteristică</u> χ_B: $A \to \{0,1\}$ prin

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in B \\ 0, \text{ dacă } x \notin B. \end{cases}$$

Considerăm funcţia $\Phi : \mathscr{P}(A) \to \{0,1\}^A$ dată de

$$\Phi(B) = \chi_B, \text{ pentru orice } B \in \mathscr{P}(A).$$

Definim, acum o altă funcţie $\Psi : \{0,1\}^A \to \mathscr{P}(A)$ prin

$$\Psi(f) = f^{-1}(\{1\}) = \{x \in A \mid f(x) = 1\},$$

pentru orice $f \in \{0,1\}^A$.

Se poate arăta că

$$\Psi \circ \Phi = 1_{\mathscr{P}(A)};\ \Phi \circ \Psi = 1_{\{0,1\}^A}.$$

deci $\mathscr{P}(A) \sim \{0,1\}^A$.

<u>PROPOZITIA 5</u>. (Cantor). Pentru orice mulţime A, avem $\overline{\overline{A}} \neq 2^{\overline{\overline{A}}}$

<u>Demonstraţie</u>: Vom arăta că orice funcţie $F : A \to \mathscr{P}(A)$ nu este surjectivă, de unde va rezulta că $A \not\sim \mathscr{P}(A)$. Presupunem că F este surjectivă.

Fie submulţimea lui A definită astfel

$$Z = \{x \in A \mid x \notin F(x)\}.$$

Cum am presupus că F este surjectivă, va exista $x_0 \in A$, astfel încît $F(x_0) = Z$. Din definiţia lui Z rezultă echivalenţa

$$x \in Z \iff x \notin F(x),$$

deci

$$x \in F(x_0) \iff x \notin F(x).$$

Pentru $x = x_0$, obţinem contradicţia

$$x_0 \in F(x_0) \iff x_0 \notin F(x_0).$$

Cu aceasta, demonstrația s-a terminat.

Pentru orice doi cardinali $\overline{\overline{A}}$ și $\overline{\overline{B}}$, vom spune că $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ dacă există o injecție $f: A \longrightarrow B$.

Definiția nu depinde de reprezentanți: dacă $A \sim A'$, $B \sim B'$ și $f: A \longrightarrow B$ este o injecție, atunci putem defini o injecție $g: A' \longrightarrow B'$.

Cum $A \sim A'$, $B \sim B'$ există bijecțiile $h_1: A \longrightarrow A'$, $h_2: B \longrightarrow B'$. Definim pe g prin

$$g = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$$

Dacă $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ și $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$, atunci vom scrie $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

Pentru $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ finiți, relația $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ revine la relația obișnuită de ordine între două numere naturale.

Relația $\leqslant$ are proprietățile următoare

(9) $A \subset B \Longrightarrow \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;

(10) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A}}$;

(11) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$;

(12) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{C}} \leqslant \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}$ și $\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{C}} \leqslant \overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}$

(13) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{C}}} \leqslant \overline{\overline{B}}^{\overline{\overline{C}}}$ și $\overline{\overline{C}}^{\overline{\overline{A}}} \leqslant \overline{\overline{C}}^{\overline{\overline{B}}}$

<u>OBSERVAȚIE</u>

(i) Din Corolarul Propoziției 3, rezultă $\aleph_0 = \overline{\overline{N}} < \overline{\overline{R}}$.

(ii) Teorema lui Cantor (Propoziția 5) se poate formula astfel:

$$\overline{\overline{A}} < 2^{\overline{\overline{A}}}\text{, pentru orice mulțime } A.$$

<u>Teorema Cantor - Bernstein</u> : $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Pentru demonstrație, se poate consulta K. Kuratowski, <u>Introducere în teoria mulțimilor și în topologie</u>, Ed. Tehnică, 1969, pag. 79-80.

§ 7. <u>RELAȚII DE ORDINE</u>

O relație binară R pe o mulțime nevidă A se numește <u>relație de preordine</u> dacă pentru orice $x, y, z \in A$ avem:

(P_1) $\quad x\,R\,x$ $\qquad$ (reflexivitate)

(P_2) $\quad x\,R\,y,\ y\,R\,z \Longrightarrow x\,R\,z$ $\qquad$ (tranzitivitate)

Mulțimea A înzestrată cu o relație de preordine R se numește <u>mulțime preordonată</u>.

Relația de preordine R se numește <u>relație de ordine</u> dacă verifică relația

(P_3) $\quad x\,R\,y;\ y\,R\,x \Longrightarrow x = y$ $\qquad$ (antisimetrie)

pentru orice $x, y \in A$.

O relație de ordine se notează în mod uzual cu $\leqslant$, deci cele trei relații ce o definesc se transcriu astfel:

$$x \leqslant x$$

$$x \leqslant y,\ y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$$

$$x \leqslant y,\ y \leqslant x \Longrightarrow x = y$$

O <u>mulțime ordonată</u> este o mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leqslant$. Vom nota: $x < y \Longleftrightarrow x \leqslant y$ și $x \neq y$.

<u>Exemplu de relație de preordine care nu este relație de ordine</u>. Considerăm o mulțime $A = \{x, y, z\}$ în care relația R este definită prin graful următor:

$(x \neq y \neq z)$.

și anume: $\quad x\,R\,x,\ \ y\,R\,y,\ \ z\,R\,z$

$\qquad\qquad\quad x\,R\,y,\ \ y\,R\,z,\ \ z\,R\,y,\ x\,R\,z.$

Se observă că R este reflexivă și tranzitivă, dar nu este antisimetrică:

$$y R z,\ z R y \not\Rightarrow y = z$$

O mulţime parţial ordonată $(A, \leq)$ se numeşte <u>mulţime total ordonată</u> dacă

(P_4) pentru orice $x, y \in A$, avem $x R y$ sau $y R x$.

<u>Exemplu de mulţime parţial ordonată care nu este total ordonată.</u> In mulţimea Z a numerelor întregi considerăm relaţia:

$$x R y \Longleftrightarrow x \text{ divide pe } y$$

Este evident că R este o relaţie de ordine care nu este totală.

Mulţimea R a numerelor reale înzestrată cu relaţia de ordine naturală este o mulţime total ordonată.

Dacă (A, R) şi (A', R') sînt două mulţimi preordonate, atunci o funcţie $f: A \longrightarrow A'$ se numeşte <u>izotonă</u> dacă pentru orice $x, y \in A$ avem:

$$x R y \Longrightarrow f(x) R' f(y).$$

In cazul cînd $(A,\leq)$, $(A',\leq)$ sînt două mulţimi parţial ordonate, $f: A \longrightarrow A'$ este izotonă dacă

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

<u>PROPOZIŢIA 1</u>. Fie (A,R) o mulţime parţial ordonată. Atunci există o mulţime parţial ordonată $(\tilde{A}, \leq)$ şi o funcţie izotonă $\lambda: A \longrightarrow \tilde{A}$ cu proprietatea următoare:

(*) Pentru orice mulţime parţial ordonată $(B, \leq)$ şi pentru orice funcţie izotonă $f: A \longrightarrow B$ există o <u>unică</u> funcţie izotonă $\bar{f}: \tilde{A} \longrightarrow B$, astfel încît următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & & \tilde{A} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

<u>Demonstraţie</u>. In A introducem următoarea relaţie:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x R y \text{ şi } y R x.$$

Se deduce imediat că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe A. Considerăm mulţimea cît $\tilde{A} = A/\sim$ şi $\lambda: A \longrightarrow \tilde{A}$ surjecţia canonică:

$$\lambda(x) = \hat{x}, \text{ pentru orice } x \in A.$$

In A definim relaţia:

$$\hat{x} \leq \hat{y} \Longleftrightarrow x R y.$$

Definiţia lui $\leq$ nu depinde de reprezentanţi: dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci

$$x R y \Longleftrightarrow x' R y'$$

Intr-adevăr, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x R x'$, $x' R x$, $y R y'$ şi $y' R y$, deci

$$x R y \Longrightarrow x' R y \qquad (\text{deoarece } x' R x)$$

$$\Longrightarrow x' R y' \qquad (\text{deoarece } y R y')$$

Implicaţia cealaltă rezultă identic.

Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine pe A.

$$\hat{x} \leq \hat{x} \qquad (\text{deoarece } x R x)$$

$$\hat{x} \leq \hat{y},\ \hat{y} \leq \hat{z} \Longrightarrow x R y,\ y R z \Longrightarrow x R z \Longrightarrow \hat{x} \leq \hat{z}.$$

$$\hat{x} \leq \hat{y},\ \hat{y} \leq \hat{x} \Longrightarrow x R y,\ y R x \Longrightarrow x \sim y \Longrightarrow \hat{x} = \hat{y}.$$

Aplicaţia λ este izotonă: $x R y \Longrightarrow \hat{x} \leq \hat{y} \Longrightarrow \lambda(x) \leq \lambda(y)$.

Definim aplicaţia $\bar{f}$ în modul următor:

$$\bar{f}(\hat{x}) = f(x), \text{ pentru orice } \hat{x} \in \tilde{A}.$$

Definiţia lui $\bar{f}$ nu depinde de reprezentanţi.

$$x \sim y \Longrightarrow x R y,\ y R x \Longrightarrow f(x) \leq f(y),\ f(y) \leq f(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(y).$$

deoarece, în B, $\leq$ este o relaţie de ordine parţială (deci antisimetrică).

$\bar{f}$ este o aplicaţie izotonă:

$$\hat{x} \leq \hat{y} \Rightarrow x \, R \, y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Diagrama din teoremă este comutativă:

$$(\bar{f} \circ \lambda)(x) = \bar{f}(\lambda(x)) = \bar{f}(\hat{x}) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A.$$

Să arătăm acum unicitatea lui $\bar{f}$. Propunem, prin absurd, că ar mai exista o funcţie izotonă $g: \tilde{A} \longrightarrow B$ astfel încît $g \circ \lambda = f$. Atunci avem:

$$g(\hat{x}) = g(\lambda(x)) = f(x) = \bar{f}(\hat{x}), \text{ pentru orice } \hat{x} \in \tilde{A}.$$

Rezultă $g = \bar{f}$, deci $\bar{f}$ este unică. Demonstraţia este terminată.

Fie acum $(x_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de elemente ale unei mulţimi parţial ordonate $(A, \leq)$.

Un element $y \in A$ este un *majorant* al familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă $x_i \leq y$ pentru orice $i \in I$. Dual, $y \in A$ este un *minorant* al familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă $y \leq x_i$ pentru orice $i \in I$.

$y \in A$ este *supremumul* familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă pentru orice majorant z al familiei $(x_i)_{i \in I}$ avem $y \leq z$. Supremumul familiei $(x_i)_{i \in I}$ va fi notat

$$\bigvee_{i \in I} x_i$$

Deci elementul $\bigvee_{i \in I} x_i$ al lui A este caracterizat de următoarele două relaţii:

(i) $x_i \leq \bigvee_{i \in I} x_i$, pentru orice $i \in I$.

(ii) Dacă $x_i \leq y$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigvee_{i \in I} x_i \leq y$.

Dual, $y \in A$ este *infimumul* familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă pentru orice minorant z al familiei $(x_i)_{i \in I}$ avem $z \leq y$. Infimumul familiei $(x_i)_{i \in I}$ va fi notat

$$\bigwedge_{i \in I} x_i$$

şi este caracterizat de

(a) $\bigwedge_{i \in I} x_i \leq x_i$, pentru orice $i \in I$.

(b) Dacă $y \leq x_i$ pentru orice $i \in I$, atunci $y \leq \bigwedge_{i \in I} x_i$.

Supremumul (respectiv infimumul) familiei $\{x_1, \dots, x_n\}$ se va nota $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ (respectiv $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$). Pentru mulţimea $\{x, y\}$, notăm

$x \vee y$: supremumul mulţimii $\{x, y\}$.

$x \wedge y$: infimumul mulţimii $\{x, y\}$.

Definiţia 1. O mulţime ordonată $(A, \leq)$ se numeşte *latice* dacă pentru orice $x, y \in A$ există $x \vee y$ şi $y \wedge x$. $(A, \leq)$ se numeşte *latice completă* dacă pentru orice familie $(x_i)_{i \in I}$ de elemente ale lui A, există $\bigvee_{i \in I} x_i$ şi $\bigwedge_{i \in I} x_i$.

O mulţime parţial ordonată $(A, \leq)$ se numeşte *inductivă* dacă orice submulţime total ordonată a sa admite cel puţin un majorant.

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Un element $x \in A$ se numeşte *maximal* dacă nu există nici un element $y \in A$ astfel încît $x < y$; cu alte cuvinte, dacă din $x \leq y$ rezultă $x = y$.

Axioma lui Zorn: Orice mulţime parţial ordonată inductivă admite un element maximal.

OBSERVAŢIE: Această axiomă a fost impusă de o serie de construcţii ale matematicii care vizează mulţimile infinite. Cunoscută mai ales sub o formă echivalentă (axioma alegerii), ea a generat multe controverse în matematică şi în filosofia matematicii. In prezent, situaţia este următoarea:

Pentru teoria mulţimilor s-au propus mai multe sisteme de axiome, mai cunoscute fiind sistemul Zermelo - Fraenkel şi sistemul Gödel - Bernays. Nu s-a reuşit pînă acum să se demonstreze pentru nici unul din aceste sisteme că este necontradictoriu.

Presupunîndu-se că sistemul de axiome Zermelo - Fraenkel este necontradictoriu, Kurt Gödel[1] a demonstrat în 1940 că prin adăugarea axiomei lui Zorn se obţine încă un sistem necontradictoriu. Ulterior s-a demonstrat că dacă adăugăm la sistemul Zermelo - Fraenkel negaţia axiomei lui Zorn se obţine încă un sistem necontradictoriu (A. Mostowski, P. Cohen).

Cu alte cuvinte, axioma lui Zorn este <u>independentă</u> de celelalte axiome ale teoriei mulţimilor. Independenţa axiomei lui Zorn este unul din rezultatele de vîrf ale matematicii secolului XX.

Se cuvine a preciza că cea mai mare parte a matematicienilor contemporani presupun în cercetările lor că axioma lui Zorn este verificată.

1) Este o părere unanimă aceea că K. Gödel este cel mai mare logician în viaţă.

EXERCIŢII LA CAPITOLUL I

1. Pentru orice submulţimi A, B, C, ale unei mulţimi X să se arate că

a) $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

b) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

c) $A - (A-B) = A \cap B$

d) $A - B = A - (A \cap B)$

e) $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

f) $(A-B) - C = (A-C) - (B-C) = A - (B \cup C)$

g) $A \cup B = A \cup (B-A)$

h) $(A \cap B) \cup (A \cap \complement_X(B)) = (A \cup B) \cap (A \cup \complement_X(B)) = A$

i) $A \cap \left[\complement_X(A) \cup B\right] = A \cap B$

j) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

2. Să se stabilească următoarele echivalenţe:

a) $A \cup B \subset C \iff A \subset C$ şi $B \subset C$

b) $A \subset B \cap C \iff A \subset B$ ~~sau~~ şi $A \subset C$

c) $A \cap B \subset C \iff A \subset C_X(B) \cup C$

d) $A \subset B \cup C \iff A \cap C_X(B) \subset C$

e) $(A-B) \cup B = A \iff B \subset A$

f) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subset A$

3. Să se demonstreze că o mulţime formată din n elemente are 2^n submulţimi.

4. Este valabilă implicaţia:

$A \neq B,\ B \neq C \Rightarrow A \neq C$? NU

5. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$A \cap X = B$

$A \cup X = C,$

unde A, B, C sînt mulţimi date şi $B \subset A \subset C$.

6. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$A - X = B$

$X - A = C,$

unde A, B, C sînt mulţimi date şi $B \subset A$, $A \cap C = \emptyset$.

7. Fie şirul descrescător:

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$$

Să se arate că intersecţia oricărui subşir infinit al acestui şir coincide cu intersecţia întregului şir.

8. Fie şirul crescător:

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots$$

Să se arate că reuniunea oricărui subşir infinit al acestui şir coincide cu reuniunea întregului şir.

9. Să se demonstreze următoarele relaţii:

a) $\bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{e\in L} A_{ke}\right) = \bigcup_{e\in L}\left(\bigcup_{k\in K} A_{ke}\right)$

b) $\bigcap_{k\in K}\left(\bigcap_{e\in L} A_{ke}\right) = \bigcap_{e\in L}\left(\bigcap_{k\in K} A_{ke}\right)$

c) $X - \bigcup_{k\in K} A_k = \bigcap_{k\in K} (X - A_k)$

d) $X - \bigcap_{k\in K} A_k = \bigcup_{k\in K} (X - A_k)$

e) $\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \cup \left(\bigcup_{t\in T} B_t\right) = \bigcup_{t\in T} (A_t \cup B_t)$

f) $\bigcup_{t\in T} (B \cap A_t) = B \cap \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)$

g) $\bigcap_{t\in T} (B \cup A_t) = B \cup \left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)$

h) $\bigcup_{k\in K} \bigcap_{e\in L} A_{ke} \subset \bigcap_{e\in L} \bigcup_{k\in K} A_{ke}$

10. Să se arate că $A_t \subset B_t$, pentru orice $t \in T$, atunci

$$\bigcup_{t\in T} A_t \subset \bigcup_{t\in T} B_t \text{ şi } \bigcap_{t\in T} A_t \subset \bigcap_{t\in T} B_t.$$

11. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ un şir oarecare de mulţimi. Formăm şirul:

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 - A_2$

. . . .

$B_n = A_n - (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$

. . . .

Să se arate că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

12. Fie $A, B \subset X$. Definim <u>diferenţa simetrică</u> a submulţimilor A, B prin

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Să se stabilească proprietăţile următoare:

a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

b) $A \triangle B = B \triangle A$

c) $A \triangle (A \triangle C) = C$

d) $A \triangle B = C \Rightarrow B = A \triangle C$

e) $A \Delta B = A \Delta C \Longrightarrow B = C$

f) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$

g) $\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \Delta \left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \Delta B_i)$

h) $\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] \Delta \left[\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right] \subset \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \Delta B_i)$

13. Găsiţi patru mulţimi A, B, C, D astfel încît

$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$

14. Să se stabilească relaţiile:

a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$

b) $(A-B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

c) $A \subset B$ şi $C \subset D \Longrightarrow A \times C \subset B \times D$

d) $A \subset X,\ B \subset Y \Longrightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (\ \times B)$

e) $A \times B = C \times D \Longrightarrow A = C$ şi $B = D$ (pentru A,B,C,D nevide)

15. Dacă $(A_s)_{s \in S}$, $(B_t)_{t \in T}$ sînt două familii de mulţimi, atunci avem:

$$\left[\bigcup_{s \in S} A_s\right] \times \left[\bigcup_{t \in T} B_t\right] = \bigcup_{(s,t) \in S \times T} (A_s \times B_t)$$

$$\left[\bigcap_{s \in T} A_s\right] \times \left[\bigcap_{t \in T} B_t\right] = \bigcap_{(s,t) \in S \times T} (A_s \times B_t)$$

16. Să se stabilească relaţiile:

$$\bigcup_{i \in I} \left[\bigcap_{j \in J_i} A_{ij}\right] = \bigcap_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \left[\bigcup_{i \in I} A_{if(i)}\right]$$

$$\bigcap_{i \in I} \left[\bigcup_{j \in J_i} A_{ij}\right] = \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \left[\bigcap_{i \in I} A_{if(i)}\right]$$

17. Dacă $R_1, R_2 \subset A^2$ sînt relaţii binare, atunci definim compunerea lor:

$$R_1 \circ R_2 = \left\{(x,y) \in A^2 \,\middle|\, \text{există } z \in A,\ (x,z) \in R_1, (z,y) \in R_2\right\}$$

Să se arate că compunerea relaţiilor este asociativă, dar nu comutativă

18. Dacă $R \subset A^2$, atunci relaţia inversă R^{-1} este definită prin

$$R^{-1} = \left\{(x,y) \in A^2 \,\middle|\, (y,x) \in R\right\}$$

Să se arate că

a) $R \cup R = R \cap R = R$

b) $(R^{-1})^{-1} = R$

c) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

d) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

19. Pentru orice relaţii binare R_1, R_2, Q pe mulţimea A, sînt verificate relaţiile:

a) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

b) $R_1 \subset R_2 \Longrightarrow Q \circ R_1 \subset Q \circ R_2$

c) $R_1 \subset R_2 \Longrightarrow R_1 \circ Q \subset R_2 \circ Q$

20. Dacă Q, R_i, $i \in I$ sînt relaţii pe A, atunci

a $\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) \circ Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q)$

b) $Q \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i)$

21. Să se stabilească o corespondenţă bijectivă între mulţimile:

a) $A \times B$ şi $B \times A$

b) $A \times (B \times C)$ şi $(A \times B) \times C$

c) $(A \times B)^C$ şi $A^C \times B^C$

d) $(A^B)^C$ şi $A^{B \times C}$

e) $A^{B \cup C}$ şi $A^B \times A^C$, dacă $B \cap C = \emptyset$.

22. Fie A o mulţime oarecare. Pentru orice mulţime $B \subset A$, considerăm funcţia caracteristică $\chi_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ a mulţimii B.

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin B \\ 1, & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Să se demonstreze că

a) $\chi_A(x) = 1$, $\chi_{\emptyset}(x) = 0$, pentru orice $x \in A$.

b) $\chi_{B \cap B'}(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_{B'}(x)$

c) $\chi_{\complement_A(B)}(x) = 1 - \chi_B(x)$

d) $\chi_{B-B'}(x) = \chi_B(x) - \chi_{B \cap B'}(x)$

e) Dacă $B = \bigcup_{i \in I} B_i$, atunci $\chi_B(x) = \max_{i \in I} \chi_{B_i}(x)$

f) Dacă $B = \bigcap_{i \in I} B_i$, atunci $\chi_B(x) = \inf_{i \in I} \chi_{B_i}(x)$.

23. Presupunînd că R, R_1, R_2 sînt relaţii de echivalenţă pe A, atunci avem

a) R^{-1} este relaţie de echivalenţă.

b) $R_1 \circ R_2 = A^2 \Longleftrightarrow R_1 = A^2$

c $R_1 \circ R_2 = A^2 \Longrightarrow R_2 \circ R_1 = A^2$

24. Să se demonstreze că orice intersecţie de relaţii de echivalenţă este o relaţie de echivalenţă.

25. Pentru orice funcţie $f: A \longrightarrow B$, considerăm funcţiile

$$f_* : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B): \quad f_*(M) = f(M),\ M \subset A$$
$$f^* : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A): \quad f^*(N) = f^{-1}(N),\ N \subset B.$$

Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(a) f este injectivă;

(b) f_* este injectivă;

(c) f^* este surjectivă;

(d) $f(M \cap M') = f(M) \cap f(M')$, pentru orice $M, M' \subset A$;

(e) $f(\complement_A(M)) \subset \complement_B f(M)$, pentru orice $M \subset C$.

26. In condiţiile problemei 25, sînt echivalente afirmaţiile

(a) f este surjectivă;

(b) f_* este surjectivă;

(c) f^* este injectivă.

27. Pentru orice funcţie $f: A \longrightarrow B$ sînt echivalente afirmaţiile:

(a) f este injectivă;

(b) Dacă $g, h: X \longrightarrow A$ sînt două funcţii cu proprietatea $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$.

28. Pentru orice funcţie $f: A \longrightarrow B$ sînt echivalente afirmaţiile:

(a) f este surjectivă;

(b) Dacă $g, h: B \longrightarrow C$ sînt două funcţii astfel încît $g \circ f = h \circ f$, atunci $g = h$.

29. In condiţiile problemei 25, sînt echivalente afirmaţiile:

(a) f este bijectivă;

(b) f_* şi f^* sînt surjective;

(c) f_* şi f^* sînt injective;

(d) f_* este bijectivă;

(e) f^* este bijectivă;

(f) $f(C_A(M)) = C_B(f(M))$, pentru orice $M \subset A$.

30. Dacă card $A = m$, card $B = n$, să se determine cîte funcţii sînt de la A în B.

31. Să se demonstreze că proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate sînt independente.

32. Să se arate că orice mulţime finită poate fi ordonată total.

33. Dacă $A, B \subset X$, să se arate că

$$(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$$

$$C \times (A \triangle B) = (C \times A) \triangle (C \times B)$$

34. Notăm cu $N(X)$ numărul elementelor unei mulţimi finite X. Pentru orice mulţimi finite $A, B, C, A_1, \ldots, A_n$ să se arate că

(a) $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$;

(b) $N(A \cup B) = N(A) + N(B) \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

(c) $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$

(d) $$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{i<j} N(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

35. Folosind exerciţiul anterior să se arate că numărul numerelor naturale mai mici decît n şi prime cu n este dat de formula:

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

unde $p_1, \ldots, p_n$ sînt toţi divizorii primi, distincţi, ai lui n.

36. Pe mulţimea Z a numerelor întregi definim relaţia binară :

$$x \mid y \Longleftrightarrow (\exists z)(z \in Z \wedge y = z\,x)$$

Să se arate că $\mid$ este o relaţie reflexivă şi tranzitivă, dar nu este simetrică.

37. Definim următoarele relaţii binare:

$x \rho y \Longleftrightarrow x^2 = y^2$; pe mulţimea Z.

$x \rho' y \Longleftrightarrow |x| = |y|$; pe mulţimea R a numerelor reale

Să se arate că ρ şi ρ' sînt relaţii de echivalenţă şi să se determine mulţimile cît.

38. Să se determine toate relaţiile de echivalenţă pe mulţimea $\{1, 2, 3\}$ şi apoi mulţimile cît corespunzătoare.

39. Să se arate că singura relaţie de echivalenţă care este şi relaţia de ordine este egalitatea.

40. Fie X o mulţime finită cu n elemente. Să se arate că numărul relaţiilor de echivalenţă $\sim$ pe X, pentru care $X/\sim$ are exact două elemente este egal cu $2^{n-1} - 1$.

41. Fie funcţia $f: Z \longrightarrow N$ definită de

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{dacă } z \geqslant 0 \\ 2|z| - 1, & \text{dacă } z < 0. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi deci Z este numărabilă.

42. Să se arate că funcţia $f: N \times N \longrightarrow N$

$$f(m,n) = \begin{cases} C^2_{m+n+1} + m, & \text{pentru } m + n \geqslant 1 \\ 0 & \text{, în rest} \end{cases}$$

este o bijecţie.

43. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primele k numere prime ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, etc.).

Să se arate că funcţia $f: N^k \longrightarrow N$, definită de

$$f(x_1, \ldots, x_k) = p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

este injectivă.

CAPITOLUL I

Algebre Boole

Teoria algebrelor Boole s-a născut ca urmare a descoperirii că între legile logicii şi anumite legi ale calculului algebric există o perfectă analogie. Această descoperire este unanim atribuită lui George Boole (An investigation into the laws of thought, 1854).

Dintre matematicienii care au adus contribuţii mari în dezvoltarea teoriei algebrelor Boole trebuie menţionat în primul rînd M.H. Stone pentru celebra sa teoremă de reprezentare (The theory of representation for Boolean algebras, Trans. A.M.S., 40, 1936, p. 37 - 111) şi pentru teoria dualităţii a algebrelor Boole(Applications of the theory of Boolean rings to general topology,Trans. A.M.S., 41, 1937, p.375-481). De asemenea, A.Tarski a obţinut rezultate remarcabile atît pe linia algebrică a acestui domeniu,cît mai ales pe linia legăturilor sale cu logica.

Algebrele Boole constituie reflectarea algebrică a calculului propoziţional, fiind modelele algebrice ale calculului propoziţional. Afirmaţia va fi precizată în capitolul următor prin teorema următoare: algebra Lindenbaum-Tarski a sistemului formal al calculului propoziţional este o algebră Boole. In Capitolul IV, metodele folosite pentru demonstrarea completitudinii sistemului formal al calculului predicatelor se vor baza în întregime pe algebrele Boole.

Astăzi, teoria algebrelor Boole se prezintă ca un fragment important al algebrei, avînd puternice conexiuni cu logica, dar fiind un capitol de sine stătător, atît prin rezultatele obţinute în interiorul său cît şi prin aplicaţiile sale în topologie, analiză, calculul probabilităţilor,etc.

Este notoriu însă faptul că cele mai spectaculoase aplicaţii ale algebrelor Boole s-au obţinut în domeniul calculatoarelor electronice şi al disciplinelor învecinate (vezi [7] şi [19]).

Paragraful 1 al acestui capitol prezintă o serie de proprietăţi generale ale laticilor, care sînt structuri mai generale decît algebrele Boole.

In § 2 se dau o serie de definiţii legate de algebrele Boole, se studiază legătura cu inelele Boole, precum şi cîteva proprietăţi ale morfismelor de algebre Boole.

Congruenţele, filtrele şi algebrele Boole cît fac obiectul paragrafului 3. Paragraful 4 este foarte important, conţinînd teoria ultrafiltrelor şi demonstraţia teoremei lui Stone.

Algebrele Boole finite şi produsele directe de algebre Boole sînt prezentate în următoarele două paragrafe. In § 7 se demonstrează că orice două algebre Boole numărabile şi fără atomi sînt izomorfe, iar în § 8 se demonstrează teorema Rasiowa-Sikorski, care va fi folosită în demonstrarea teoremei de completitudine a lui Gödel (vezi Capitolul IV).

§ 1. LATICI

In acest paragraf vom stabili o serie de proprietăţi generale ale laticilor şi ale laticilor distributive.

PROPOZITIA 1. Intr-o latice oarecare L sînt verificate următoarele proprietăţi:

(L_1)	$a \wedge a = a,\ a \vee a = a$	(idempotenţa)
(L_2)	$a \wedge b = b \wedge a,\ a \vee b = b \vee a$	(comutativitate)
(L_3)	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	(asociativitate)
(L_4)	$a \wedge (a \vee b) = a,\ a \vee (a \wedge b) = a$	(absorbţie)

<u>Demonstrație</u>. Aceste relații sînt imediate, pe baza definiției infimumului și supremumului. Spre exemplu, să arătăm că $a \wedge (a \vee b) = a$. Conform definiției infimumului, va trebui să demonstrăm că:

$$a \leqslant a, \quad a \leqslant a \vee b$$

$$x \leqslant a, \quad x \leqslant a \vee b \Longrightarrow x \leqslant a \wedge (a \vee b)$$

Se observă însă că aceste relații sînt evidente.

Vom stabili acum un rezultat care arată egalitățile (L_1) - (L_4) caracterizează o latice.

<u>PROPOZIȚIA 2</u>: Fie L o mulțime nevidă carecare înzestrată cu două operații binare $\vee$, $\wedge$ astfel încît orice elemente $a, b, c \in L$ verifică egalitățile (L_1) - (L_4). Atunci pe mulțimea L se poate defini o relație de ordine parțială $\leqslant$ prin

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a,$$

astfel încît $a \wedge b$ (respectiv $a \vee b$) este infimumul (respectiv supremumul) mulțimii $\{a, b\}$ în sensul ordinii astfel definite.

<u>Demonstrație</u>. Verificăm întîi că $\leqslant$ este o relație de ordine parțială:

$a \leqslant a$ rezultă din $a \wedge a = a$

$$a \leqslant b, \; b \leqslant a \Longrightarrow a = a \wedge b, \; b = b \wedge a \Longrightarrow a = b$$

$$a \leqslant b, \; b \leqslant c \Longrightarrow a = a \wedge b, \; b = b \wedge c$$

$$\Longrightarrow a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$$

$$\Longrightarrow a \leqslant c$$

Pentru a arăta că $a \wedge b$ este infimumul mulțimii $\{a, b\}$ va trebui să stabilim relațiile:

$$a \wedge b \leqslant a, \quad a \wedge b \leqslant b$$

$$x \leqslant a, \; x \leqslant b \Longrightarrow x \leqslant a \wedge b.$$

Primele două relații rezultă din

$$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

Cealaltă relație rezultă conform implicației

$$x \wedge a = x, \; x \wedge b = x \Longrightarrow x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a) \wedge b = x \wedge b = x$$

Vom arăta acum că $a \vee b$ este ~~infimumul~~ supremumul mulțimii $\{a, b\}$.

$a \leqslant a \vee b$ rezultă din (L_4) : $a \wedge (a \vee b) = a$ și analog se deduce și $b \leqslant a \vee b$.

Restul rezultă conform implicațiilor:

$$a \leqslant x, \; b \leqslant x \Longrightarrow a \wedge x = a, \; b \wedge x = b$$

$$\Longrightarrow a \vee x = \underbrace{(a \wedge x)}_{a} \vee x = x, \; b \vee x = (b \wedge x) \vee x = x$$

$$\Longrightarrow (a \vee b) \wedge x = (a \vee b) \wedge (a \vee x) = (a \vee b) \wedge [a \vee (b \vee x)] =$$

$$= (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee x] = a \vee b \Longrightarrow a \vee b \leqslant x.$$

Cu aceasta, demonstrația este terminată.

Indicăm cititorului să pună în evidență toate punctele demonstrației în care am folosit relațiile (L_1) - (L_4).

<u>OBSERVAȚIE</u>. Relația de ordine din propoziția precedentă poate fi definită în mod echivalent și prin

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \vee b = b.$$

Intr-o latice avem <u>implicațiile</u>:

$$x \leqslant y \Longrightarrow a \wedge x \leqslant a \wedge y \text{ și } a \vee x \leqslant a \vee y$$

$$x \leqslant y, \; a \leqslant b \Longrightarrow x \wedge a \leqslant y \wedge b \text{ și } x \vee a \leqslant y \vee b$$

Stabilirea lor este imediată.

Operațiile unei latici finite pot fi descrise prin tabele. Spre exemplu, în mulțimea

$$L = \{o, a, b, 1\}$$

putem defini două operaţii de latice în felul următor:

$\wedge$	o	a	b	1
o	o	o	o	o
a	o	a	o	a
b	o	o	b	b
1	o	a	b	1

$\vee$	o	a	b	1
o	o	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Fie L_1, L_2 două latici. O funcţie $f: L_1 \longrightarrow L_2$ se numeşte <u>morfism de latici</u> dacă pentru orice $x,y \in L_1$, avem

$$f(x\vee y) = f(x)\vee f(y)$$

$$f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$$

Un morfism bijectiv de latici $f: L_1 \longrightarrow L_2$ se numeşte <u>izomorfism de latici</u>. Se mai spune în acest caz că laticile L_1, L_2 sînt izomorfe.

Un element 0 al unei latici L se numeşte <u>element prim</u> dacă $o \leqslant x$, pentru orice $x \in L$. Dual, un <u>element ultim</u> al lui L este definit de: $x \leqslant 1$, pentru orice $x \in L$.

<u>PROPOZIŢIA 3</u>. Intr-o latice L sînt echivalente următoarele trei relaţii

(i) $(x\wedge y)\vee(x\wedge z) = x\wedge(y\vee z)$, pentru orice $x,y,z \in L$.

(ii) $(x\vee y)\wedge(x\vee z) = x\vee(y\wedge z)$, pentru orice $x,y,z \in L$.

(iii) $(x\vee y)\wedge z \leqslant x\vee(y\wedge z)$, pentru orice $x,y,z \in L$.

<u>Demonstraţie:</u> <u>(i)$\Longrightarrow$(ii)</u>. Vom arăta că orice elemente $a,b,c \in L$ verifică (ii).

In (i) vom pune $x = a\vee b$, $y = a$, $z = c$:

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge(a\vee c) &= [(a\vee b)\wedge a]\vee[(a\vee b)\wedge c]\\ &= a\vee[(a\vee b)\wedge c] &&(\text{conform } L_4)\\ &= a\vee[(a\wedge c)\vee(b\wedge c)] &&(\text{conform (i)})\\ &= [a\vee(a\wedge c)]\vee(b\wedge c)\\ &= a\vee(b\wedge c) &&(\text{conform } L_4)\end{aligned}$$

<u>(ii)$\Longrightarrow$(iii)</u>. Din $z \leqslant x\vee z$ rezultă

$(x\vee y)\wedge z \leqslant (x\vee y)\wedge(x\vee z) = x\vee(y\wedge z)$

<u>(iii)$\Longrightarrow$(i)</u>. Fie $a, b, c \in L$ oarecare. In (iii) facem $x = a$, $y = b$, $z = a\vee c$:

$(a\vee b)\wedge(a\vee c) \leqslant a\vee[b\wedge(a\vee c)] = a\vee[(a\vee c)\wedge b]$

Punînd în (iii) $x = a$, $y = c$, $z = b$ rezultă

$$(a\vee c)\wedge b \leqslant a\vee(c\wedge b)$$

deci

$a\vee[(a\vee c)\wedge b] \leqslant a\vee[a\vee(c\wedge b)] = (a\vee a)\vee(b\wedge c) = a\vee(b\wedge c)$

Din inegalităţile stabilite mai sus obţinem

$(a\vee b)\wedge(a\vee c) \leqslant a\vee(b\wedge c)$

Va fi suficient să stabilim inegalitatea inversă, care este valabilă în orice latice:

$a\vee(b\wedge c) \leqslant (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

Din $a \leqslant a\vee b$ şi $a \leqslant a\vee c$ rezultă

$a \leqslant (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

De asemenea, din $b \leqslant a\vee b$ şi $c \leqslant a\vee c$, rezultă

$b\wedge c \leqslant (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

Din aceste două inegalităţi se obţine, conform definiţiei supremumului, exact inegalitatea căutată. Demonstraţia este terminată.

<u>Definiţia 1</u>. O latice L care satisface una din condiţiile echivalente (i) - (iii) se numeşte <u>latice distributivă</u>.

Fie L o latice cu element prim o şi cu element ultim 1. Un element $a \in L$ este un <u>complement</u> al lui $b \in L$ dacă

$a\wedge b = o$ şi $a\vee b = 1$.

cu prim şi ultim element

<u>PROPOZIŢIA 4.</u> Intr-o latice distributivă L orice element poate avea cel mult un complement.

Demonstrație. Presupunem că b, c sînt două elemente ale lui L care verifică egalitățile:

$$a \vee b = 1, \quad a \wedge b = o$$
$$a \vee c = 1, \quad a \wedge c = o\ .$$

Atunci avem

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = o \vee (b \wedge c) = b \wedge c.$$

Analog se arată că $c = b \wedge c$, deci $b = c$.

Intr-o latice distributivă (cu element prim o și cu element ultim 1) L vom nota cu $\neg a$ complementul unui element $a \in L$.

PROPOZIȚIA 5. Presupunem că în laticea distributivă L, pentru elementele a și b există $\neg a$ și $\neg b$. Atunci există și $\neg(a \wedge b)$, $\neg(a \vee b)$ și care sînt dați de

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b;\quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$$

Demonstrație: Conform Propoziției 4, pentru verificarea primei relații este suficient să arătăm că

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = o$$

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1.$$

Aceste relații se obțin astfel:

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) = o \vee o = o$$

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = (a \vee \neg a \vee \neg b) \vee (b \vee \neg a \vee \neg b) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Egalitatea a doua a propoziției se obține în mod dual.

OBSERVAȚIE. Pentru cunoașterea în adîncime a problemelor fundamentale ale teoriei laticilor, indicăm următoarele cărți de referință: G. Birkhoff, Lattice theory, American Math. Soc., 1967, (ediția a III-a) și G. Grätzer, Lattice theory (First concepts and distributive lattices), San Francisco, 1971.

In cele ce urmează vom nota

$$x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$x \wedge y \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$$

pentru orice elemente x, y, z ale unei latici L.

§ 2. ALGEBRE BOOLE. PROPRIETATI GENERALE

Definiția 1. O algebră Boole este o latice distributivă B cu element prin 0 și cu element ultim 1, astfel încît orice element $x \in B$ are un complement $\neg x$.

EXEMPLE (1). Mulțimea $L_2 = \{o,1\}$ este o algebră Boole pentru ordinea naturală:

$$o \leqslant o,\ o \leqslant 1,\ 1 \leqslant 1.$$

Operațiile lui L_2 sînt date de

$\wedge$	o	1
o	o	o
1	o	1

$\vee$	o	1
o	o	1
1	1	1

; $\neg o = 1$, $\neg 1 = o$.

(2) Mulțimea $\mathscr{P}(X)$ a părților unei mulțimi nevide X este o algebră Boole în care relația de ordine $\leqslant$ este incluziunea $\subset$. Operațiile lui $\mathscr{P}(X)$ vor fi

$$A \vee B = A \cup B$$
$$A \wedge B = A \cap B$$
$$\neg A = C_X(A).$$

pentru orice $A, B \in \mathscr{P}(X)$. $\emptyset$ este element prim și X este elementul ultim al lui $\mathscr{P}(X)$. Dacă B, B' sînt două algebre Boole, atunci un morfism de algebre Boole este o funcție $f: B \longrightarrow B'$ care satisface proprietățile următoare, pentru orice $x, y \in B$:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$
$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$
$$f(\neg x) = \neg f(x)$$

<u>OBSERVAȚIE</u>. (1) Orice morfism de algebre Boole $f: B \longrightarrow B'$ verifică relațiile:

$$f(o) = o; \quad f(1) = 1.$$

Cum $B \neq \emptyset$, atunci există $x \in B$, deci vom putea scrie:

$$f(o) = f(x \wedge \neg x) = f(x) \wedge \neg f(x) = o$$

$$f(1) = f(x \vee \neg x) = f(x) \vee \neg f(x) = 1$$

(2) Orice morfism de algebre Boole este o aplicație izotonă:

$$x \leqslant y \Rightarrow x \wedge y = y \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(y) \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

In cele ce urmează vom arăta că algebre Boole sînt echivalente cu o clasă de inele comutative, numite inele Boole.

<u>Definiția 2</u>. Se numește <u>inel Boole</u> orice inel unitar $(A, +, \cdot, o, 1)$ cu proprietatea că

$$x^2 = x, \text{ pentru orice } x \in A.$$

<u>Lema 1</u>. Pentru orice două elemente x, y ale unui inel Boole A, avem relațiile:

$$x + x = o$$

$$xy = yx \qquad \text{(comutativitate)}$$

<u>Demonstrație</u>. Din

$$x + y = (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 =$$
$$= x + xy + yx + y$$

rezultă

$$xy + yx = o.$$

Făcînd $y = x$, se obține $x^2 + x^2 = o$, deci $x + x = o$. Pentru orice $z \in A$, vom avea deci $z + z = o$, adică $z = -z$. Luînd $z = xy$, din relația stabilită mai sus avem

$$xy = -yx = yx.$$

Dacă A, A' sînt două inele Boole, atunci un <u>morfism de inele Boole</u> $g: A \longrightarrow A'$ este o funcție $g: A \longrightarrow A'$ cu proprietățile următoare:

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

$$g(x.y) = g(x).g(y)$$

$$g(1) = 1,$$

pentru orice $x, y \in A$. Cu alte cuvinte, este un morfism de inele unitare.

<u>PROPOZITIA 1</u>. Dacă A este un inel Boole, atunci A poate fi organizat ca o algebră Boole $F(A)$:

$$x \vee y = x + y + xy$$

$$x \wedge y = xy$$

$$\neg x = x + 1$$

o este elementul prim al lui $F(A)$

1 este elementul ultim al lui $F(A)$

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow xy = x.$$

LATICE <u>Demonstrație</u>. Operațiile astfel definite verifică axiomele (L_1) - (L_4) din § 1. Spre exemplu, să arătăm că $x \vee (x \wedge y) = x$, pentru orice $x \in A$.

$$x \vee (x \wedge y) = x + xy + x\,xy = x + xy + x^2 y = x + (xy + xy) = x + o = x$$

conform Lemei 1. Deci $F(A)$ este o <u>latice</u>. Printr-un calcul simplu se poate arăta că $F(A)$ este <u>distributivă</u> și că

$$o \leqslant x, \; x \leqslant 1, \text{ pentru orice } x \in A.$$

Să arătăm că $x + 1$ verifică proprietățile <u>complementului</u>

$$x \vee (x + 1) = x + x + 1 + x(x + 1) = 2x + 1 + x^2 + x = o + 1 + (x+x)$$
$$= 1 + o = 1$$

$$x \wedge (x + 1) = x(x + 1) = x^2 + x = x + x = o$$

PROPOZIŢIA 2. Dacă B este o algebră Boole, atunci B poate fi organizată ca un inel Boole G(B) punînd

$$x + y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$$

$$x.y = x \wedge y$$

pentru orice $x, y \in B$. o şi 1 vor avea semnificaţia naturală.

Demonstraţia este calculatorie şi o lăsăm pe seama cititorului.

PROPOZIŢIA 3. (i) Dacă $f: A \longrightarrow A'$ este un morfism de inele Boole, atunci f este şi un morfism de algebre Boole $f: F(A) \longrightarrow F(A')$.

(ii) Dacă $g: B \longrightarrow B'$ este un morfism de algebre Boole, atunci g este şi un morfism de inele Boole $g: G(B) \longrightarrow G(B')$.

PROPOZIŢIA 4. Dacă A este un inel Boole şi B este algebră Boole, atunci

(i) A şi G(F(A)) coincid ca inele Boole.

(ii) B şi F(G(B)) coincid ca algebre Boole.

Demonstraţia celor două propoziţii este un exerciţiu util.

Intr-o algebră Boole B se defineşte operaţia de *implicaţie booleană*:

$$\boxed{x \longrightarrow y = \neg x \vee y,} \quad x, y \in B$$

şi operaţia de *echivalenţă booleană*:

$$x \longleftrightarrow y = (x \longrightarrow y) \wedge (y \longrightarrow x), \quad x, y \in B.$$

Se poate arăta că $x \longrightarrow y = 1$ dacă şi numai dacă $x \leq y$.

Aceste două operaţii au proprietăţile următoare:

$$x \longrightarrow (y \longrightarrow x) = 1$$

$$(x \longrightarrow (x \longrightarrow y)) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x \longrightarrow y) \longrightarrow ((y \longrightarrow z) \longrightarrow (x \longrightarrow z)) = 1$$

$$(x \longleftrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x \longleftrightarrow y) \longrightarrow (y \longrightarrow x) = 1$$

$$(x \longrightarrow y) \longrightarrow ((y \longrightarrow x) \longrightarrow (x \longleftrightarrow y)) = 1$$

$$(\neg y \longrightarrow \neg x) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x \vee y) \longleftrightarrow (\neg x \longrightarrow y) = 1$$

$$(x \wedge y) \longleftrightarrow \neg(\neg x \vee \neg y) = 1.$$

$$(x \longleftrightarrow y) = 1 \Longleftrightarrow x = y.$$

Să stabilim, de exemplu, proprietatea a doua:

$$(x \longrightarrow (x \longrightarrow y)) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = \neg(x \longrightarrow (x \longrightarrow y)) \vee (x \longrightarrow y)$$

$$= \neg(\neg x \vee \neg x \vee y) \vee (\neg x \vee y)$$

$$= \neg(\neg x \vee y) \vee (\neg x \vee y) = 1.$$

Lema 2. In orice algebră Boole B avem

(i) $\neg\neg x = x$

(ii) $x \leq y \Longleftrightarrow \neg y \leq \neg x$

(iii) $x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge \neg y = o.$

Demonstraţie

(i) Rezultă din unicitatea complementului: $\neg x \vee x = 1$, $\neg x \wedge x = o$.

(ii) $x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow \neg x \vee \neg y = \neg x \Rightarrow \neg y \leq \neg x$

$\neg y \leq \neg x \Rightarrow \neg\neg x \leq \neg\neg y$ (conform celor demonstrate)

$\Rightarrow x \leq y$ (conform (i))

(iii) $x \leq y \Rightarrow x \wedge \neg y \leq y \wedge \neg y = o \Rightarrow x \wedge \neg y = o$

$x \wedge \neg y = o \Rightarrow x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee \neg y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$

$= (x \wedge y) \vee o = x \wedge y$

$\Rightarrow x \leq y$

Un morfism de algebre Boole $f: B \longrightarrow B'$ se numeşte *izomorfism de algebre Boole* dacă este bijectiv.

OBSERVATIE. Compunerea a două morfisme (respectiv izomorfisme) de algebre Boole este încă un morfism (respectiv, izomorfism) de algebre Boole. Pentru orice algebră Boole B, aplicaţia $1_B: B \to B$ este un izomorfism de algebre Boole.

PROPOZITIA 5. Fie $f: B \to B'$ un morfism de algebre Boole. Sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) f este izomorfism ;

(ii) f este surjectiv şi pentru orice $x,y \in B$, avem $x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$;

(iii) f este inversabilă şi f^{-1} este un morfism de algebre Boole.

Demonstraţie (i) $\Rightarrow$ (ii). Amintim că orice morfism de algebre Boole este o aplicaţie izotonă.

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Presupunem $f(x) \leq f(y)$, deci:

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(x) \Rightarrow f(x \wedge y) = f(x) \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow x \leq y.$$

Am aplicat injectivitatea lui f.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Trebuie să arătăm că f este injectivă:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ şi } f(y) \leq f(x) \Rightarrow x \leq y \text{ şi } y \leq y \Rightarrow x = y.$$

(i) $\Rightarrow$ (iii). Este suficient să arătăm că f^{-1} este morfism de algebre Boole.

Fie $y,y' \in B'$ şi $x = f^{-1}(y) \in B$, $x' = f^{-1}(y') \in B$. Cum f este morfism, rezultă:

$$f(x \vee x') = f(x) \vee f(x')$$

Dar $f(x) = y$, $f(x') = y'$, deci $f(x \vee x') = y \vee y'$, de unde prin aplicarea lui f^{-1} rezultă:

$$f^{-1}(f(x \vee x')) = f^{-1}(y \vee y'), \text{ deci}$$

$$f^{-1}(y \vee y') = x \vee x' = f^{-1}(y) \vee f^{-1}(y')$$

Analog se arată că

$$f^{-1}(y \wedge y') = f^{-1}(y) \wedge f^{-1}(y')$$

$$f^{-1}(\neg y) = \neg f^{-1}(y).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Evidentă.

Definiţia 3. O submulţime nevidă B' a unei algebre Boole B se numeşte subalgebră Boole a lui B dacă:

$$x,y \in B' \Rightarrow x \vee y \in B' \text{ şi } x \wedge y \in B'$$

$$x \in B' \Rightarrow \neg x \in B'.$$

OBSERVATIE. Dacă B' este subalgebră Boole a lui B, atunci $0 \in B'$ şi $1 \in B'$.

Intr-adevăr, cum $B' \neq \emptyset$, există $x \in B'$, deci:

$$0 = x \wedge \neg x \in B'; \; 1 = x \vee \neg x \in B'.$$

PROPOZITIA 6. Dacă $f: B \to B'$ este un morfism de algebre Boole şi B_1 este o subalgebră Boole a lui B, atunci $f(B_1)$ este o subalgebră Boole a lui B'. In particular, imaginea f(B) a lui B prin f este o subalgebră Boole a lui B'.

Demonstraţia este imediată.

OBSERVATIE. Dacă $f: B \to B'$ este un morfism de algebre Boole injectiv atunci B este izomorfă cu subalgebra Boole f(B) a lui B'.

Este util să observăm că un morfism de algebre Boole $f: B \to B'$ verifică relaţiile:

$$f(x \to y) = f(x) \to f(y),$$

$$f(x \leftrightarrow y) = f(x) \leftrightarrow f(y),$$

pentru orice $x, y \in B$.

<u>Exercițiu</u>. Pentru ca funcția $f: B \longrightarrow B'$ să fie morfism de algebre Boole este necesar și suficient ca să avem

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad , \quad x, y \in B$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad , \quad x, y \in B$$

$$f(1) = 1; \ f(o) = o.$$

§ 3. <u>FILTRE. ALGEBRE BOOLE CIT</u>.

<u>Definiția 1</u>. Fie B o algebră Boole oarecare. O submulțime <u>nevidă</u> F a lui B se numește <u>filtru</u>, dacă pentru orice $x, y \in B$ avem:

(a) $x, y \in F \Longrightarrow x \wedge y \in F$

(b) $x \in F, \ x \leqslant y \Longrightarrow y \in F$

Dual, un <u>ideal</u> I al lui B este o submulțime nevidă I a lui B pentru care:

(a') $x, y \in I \Longrightarrow x \vee y \in I$

(b') $y \in I, \ x \leqslant y \Longrightarrow x \in I$

<u>OBSERVAȚIE</u>: Pentru orice filtru F, $1 \in F$.

Filtrele unei algebre Boole B se pot pune în corespondență bijectivă cu idealele sale. Unui filtru F i se asociază idealul

$$I_F = \{x \in B \mid \neg x \in F\},$$

iar idealului I i se asociază filtrul.

$$F_I = \{y \in B \mid \neg y \in I\}.$$

Se observă cu ușurință că funcțiile $F \longmapsto I_F$ și $I \longmapsto F_I$ sînt inverse una celeilalte.

Conform acestei observații, vom studia numai filtrele unei algebre Boole. Pentru ideale, proprietățile respective se vor enunța prin <u>dualizare</u>.

<u>Definiția 2.</u> Fie B o algebră Boole. O relație de echivalență $\sim$ pe B se numește <u>congruență</u> dacă

$$x \sim y, \ x' \sim y' \Longrightarrow x \vee x' \sim y \vee y'$$

$$x \sim y, \ x' \sim y' \Longrightarrow x \wedge x' \sim y \wedge y'$$

$$x \sim y \quad \Longrightarrow \quad \neg x \sim \neg y.$$

<u>OBSERVAȚIE</u>: Dacă $\sim$ este o congruență pe B atunci

$$x \sim y, \ x' \sim y' \Longrightarrow \begin{cases} (x \longrightarrow x') \sim (y \longrightarrow y') \\ (x \longleftrightarrow x') \sim (y \longleftrightarrow y') \end{cases}$$

<u>PROPOZIȚIA 1</u>. Filtrele unei algebre Boole B sînt în corespondență bijectivă cu congruențele sale.

<u>Demonstrație</u>: Fiecărui filtru F al lui B îi asociem următoarea relație binară pe B:

$$x \sim_F y \Longleftrightarrow (x \longleftrightarrow y) \in F.$$

Această relație se poate scrie echivalent

$$x \sim_F y \Longleftrightarrow (x \longrightarrow y) \in F \text{ și } (y \longrightarrow x) \in F.$$

Intr-adevăr, aplicăm proprietățile filtrului și $x \longleftrightarrow y = (x \longrightarrow y) \wedge (y \longrightarrow x)$:

$$(x \longrightarrow y) \in F, \ (y \longrightarrow x) \in F \Longrightarrow (x \longrightarrow y) \wedge (y \longrightarrow x) \in F \Longrightarrow (x \longleftrightarrow y) \in F$$

$$(x \longleftrightarrow y) \in F, \ (x \longleftrightarrow y) \leqslant (x \longrightarrow y) \Longrightarrow (x \longrightarrow y) \in F$$

și analog

$$(x \longleftrightarrow y) \in F \Longrightarrow (y \longrightarrow x) \in F.$$

Vom arăta că $\sim_F$ este o relație de echivalență:

$x \sim_F x$: deoarece $(x \longleftrightarrow x) = 1 \in F$.

$x \sim_F y \Longrightarrow (x \longleftrightarrow y) \in F \Longrightarrow (y \longleftrightarrow x) \in F \Longrightarrow y \sim_F x$,

folosind egalitatea evidentă $(x \longleftrightarrow y) = (y \longleftrightarrow x)$.

$$x \sim_F y, \ y \sim_F z \Longrightarrow (x \longleftrightarrow y) \in F \text{ și } (y \longleftrightarrow z) \in F$$

$$\Longrightarrow (x \longleftrightarrow y) \wedge (y \longleftrightarrow z) \in F$$

Dar

$$\neg x \vee z = \neg x \vee (y \wedge \neg y) \vee z$$

$$= (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \geqslant (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z),$$

deci avem

$$(x \to z) \geqslant (x \to y) \wedge (y \to z)$$

In mod analog obţinem

$$(z \to x) \geqslant (z \to y) \wedge (y \to x).$$

Din ultimile două relaţii se obţine

$$(x \to z) \wedge (z \to x) \geqslant (x \to y) \wedge (y \to z) \wedge (z \to y) \wedge (y \to x)$$

sau

$$x \leftrightarrow z \geqslant (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z) \in F$$

Rezultă $(x \leftrightarrow z) \in F$, deci $x \sim_F z$.

Relaţia de echivalenţă $\sim_F$ este o congruenţă:

$$\left.\begin{matrix} x \sim_F y \\ x' \sim_F y' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} x \vee x' \sim_F y \vee y' \\ x \wedge x' \sim_F y \wedge y' \end{matrix}\right.$$

$$x \sim_F y \Longrightarrow \neg x \sim_F \neg y$$

Presupunînd că $x \sim_F y$, $x' \sim_F y'$, avem $(x \leftrightarrow y) \in F$, $(x' \leftrightarrow y') \in F$, deci $(x \leftrightarrow y) \wedge (x' \leftrightarrow y') \in F$.

Avem inegalităţile:

$$(x \to y) \wedge (x' \to y') = (\neg x \vee y) \wedge (\neg x' \vee y') \leqslant$$

$$\leqslant (\neg x \vee y \vee y') \wedge (\neg x' \vee y \vee y') = (\neg x \wedge \neg x') \vee (y \vee y') =$$

$$= \neg(x \vee x') \vee (y \vee y') = (x \vee x') \to (y \vee y')$$

şi analog

$$(y \to x) \wedge (y' \to x') \leqslant (y \vee y') \to (x \vee x')$$

Din aceste două inegalităţi rezultă:

$$(x \to y) \wedge (y \to x) \wedge (x' \to y') \wedge (y' \to x')$$

$$\leqslant [(x \vee x') \to (y \vee y')] \wedge [(y \vee y') \to (x \vee x')]$$

adică

$$(x \leftrightarrow y) \wedge (x' \leftrightarrow y') \leqslant (x \vee \cancel{y}\,x') \leftrightarrow (\cancel{x'}\,y \vee y').$$

Va rezulta $[(x \vee y) \leftrightarrow (x' \vee y')] \in F$, deci $x \vee \cancel{y}\,x' \sim_F \cancel{x'}\,y \vee y'$.

Presupunem acum că $x \sim_F y$, deci $(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x) =$ $= (x \leftrightarrow y) \in F$, de unde rezultă

$$(\neg x \leftrightarrow \neg y) = (\neg\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg\neg y \vee \neg x) = (x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg x) =$$

$$= (x \leftrightarrow y) \in F.$$

Aşadar am arătat că $\neg x \sim_F \neg y$.

Fie $x \sim_F y$ şi $x' \sim_F y'$. Conform celor arătate, $\neg x \sim_F \neg y$ şi $\neg x' \sim_F \neg y'$, deci

$$(\neg x \vee \neg x') \sim_F (\neg y \vee \neg y')$$

$$\neg(x \wedge x') \sim_F \neg(y \wedge y')$$

Din aceasta se obţine $\neg\neg(x \wedge x') \sim_F \neg\neg(y \wedge y')$, adică $x \wedge x' \sim_F y \wedge y'$. Cu aceasta, am stabilit că $\sim_F$ este o congruenţă.

Reciproc, unei congruenţe $\sim$ îi asociem filtrul

$$\tilde{F} = \{x \in B \mid x \sim 1\}.$$

Intr-adevăr, $\tilde{F}$ este filtru:

$$x, y \in \tilde{F} \Rightarrow x \sim 1,\ y \sim 1 \Rightarrow x \wedge y \sim 1 \wedge 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \wedge y \sim 1 \Rightarrow x \wedge y \in \tilde{F}$$

$$x \leqslant y,\ x \in \tilde{F} \Rightarrow x \vee y = y,\ x \sim 1.$$

$$\Rightarrow y = x \vee y \sim 1 \vee y = 1 \quad \text{(pentru că } y \sim y\text{)}$$

$$\Rightarrow y \in \tilde{F}.$$

Observăm că $F \neq \emptyset$, deoarece $1 \sim 1 \Rightarrow 1 \in \tilde{F}$.

Dacă $\mathcal{F}_B$ este mulţimea filtrelor lui B şi $\mathcal{C}_B$ este mulţimea congruenţelor lui B, atunci considerăm aplicaţiile :
$\Phi: \mathcal{F}_B \to \mathcal{C}_B$, $\psi : \mathcal{C}_B \to \mathcal{F}_B$ definite astfel:

$\Phi(F) = \sim_F$, pentru orice $F \in \mathcal{F}_B$

$\psi(\sim) = \tilde{F}$, pentru orice $\sim$ din $\mathcal{C}_B$.

Vom arăta că Φ, ψ sînt inverse una celeilalte:

$$\psi(\Phi(F)) = F$$

$$\Phi(\psi(\sim)) = \sim$$

Intr-adevăr, avem relaţiile:

$$\psi(\Phi(F)) = \psi(\sim_F) = \{x \mid x \sim_F 1\}$$
$$= \{x \mid (x \to 1) \in F\}$$
$$= \{x \mid x \in F\} = F,$$

deoarece $(x \to 1) = (\neg x \vee 1) \wedge (o \vee x) = 1 \wedge x = x$

Pentru stabilirea celeilalte relaţii, observăm că $\Phi(\psi(\sim)) = \sim_{\tilde{F}}$, deci

$$x \sim_{\tilde{F}} y \Longleftrightarrow (x \leftrightarrow y) \in \tilde{F}$$

Dacă $(x \leftrightarrow y) \in \tilde{F}$, atunci $(x \to y) \in \tilde{F}$ şi $(y \to x) \in \tilde{F}$. Conform proprietăţilor congruenţelor avem:

$$(x \to y) \in \tilde{F} \Rightarrow \neg x \vee y \sim 1$$
$$\Rightarrow (\neg x \vee y) \wedge x \sim 1 \wedge x$$
$$\Rightarrow (\neg x \wedge x) \vee (x \wedge y) \sim x$$
$$\Rightarrow x \wedge y \sim x$$

şi analog

$$(y \to x) \in \tilde{F} \Rightarrow x \wedge y \sim y$$

Din $x \wedge y \sim x$, $x \wedge y \sim y$, rezultă $x \sim y$. Aşadar a rezultat

$$x \sim_{\tilde{F}} y \Rightarrow x \sim y$$

Reciproc,

$$x \sim y \Rightarrow (x \to y) \sim (y \to y) \Rightarrow (x \to y) \sim 1 \Rightarrow (x \to y) \in \tilde{F} \Rightarrow x \sim_{\tilde{F}} y,$$

deoarece $y \to y = (\neg y \vee y) = 1$.

Am arătat că

$$x \sim_{\tilde{F}} y \Longleftrightarrow x \sim y,$$

adică $\Phi(\psi(\sim)) = \sim$. Demonstraţia este încheiată.

Fie F un filtru în algebra Boole B. Considerăm mulţimea cît $B/\sim_F$ înzestrată cu operaţiile

$$\hat{x} \vee \hat{y} = \widehat{x \vee y}$$
$$\hat{x} \wedge \hat{y} = \widehat{x \wedge y}$$
$$\neg \hat{x} = \widehat{\neg x}$$

şi cu elementul $\hat{0}$ şi $\hat{1}$.

Conform proprietăţilor congruenţei, aceste definiţii nu depind de reprezentanţi:

$$\left.\begin{array}{l} x \sim_F x' \\ y \sim_F y' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x \vee y) \sim_F (x' \vee y') \\ (x \wedge y) \sim_F (x' \wedge y') \end{array}\right.$$

$$x \sim_F x' \Rightarrow \neg x \sim_F \neg x'$$

<u>PROPOZIŢIA 2</u>. Mulţimea $B/_F = B/\sim_F$ înzestrată cu operaţiile de mai sus este o algebră Boole.

<u>Demonstraţie</u>: Direct din definiţia operaţiilor lui $B_{/F}$ şi din proprietăţile de algebră Boole ale lui B.

$B_{/F}$ se numeşte <u>algebra Boole cît a lui B prin filtrul F</u>.

Se poate arăta că surjecţia canonică $p: B \to B_{/F}$ definită după cum ştim: $x \mapsto \hat{x}$, este un morfism de algebre Boole.

<u>PROPOZIŢIA 3</u>. Fie $f: B \to B'$ un morfism de algebre Boole.

(a) $F_f = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$ este un filtru al lui B.

(b) f este injectivă $\iff F_f = \{1\} \iff \{x \mid f(x) = o\} = \{o\}$.

(c) f(B) este o subalgebră Boole a lui B' izomorfă cu $B_{/F_f}$

<u>Demonstrație</u>: (a) F_f are proprietățile filtrului:

$x, y \in F_f \Rightarrow f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 1 \wedge 1 = 1 \Rightarrow x \wedge y \in F_f$.

$x \leqslant y,\ x \in F_f \Rightarrow 1 = f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow f(y) = 1 \Rightarrow y \in F_f$.

$f(1) = 1 \Rightarrow 1 \in F_f \Rightarrow F_f \neq \emptyset$.

(b) Presupunem f injectivă. Implicațiile

$x \in F_f \Rightarrow f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow x = 1$

ne dau incluziunea $F_f \subset \{1\}$. Cealaltă incluziune este evidentă.

Dacă $F_f = \{1\}$, atunci avem

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x \vee \neg y) = f(x) \vee \neg f(y) = 1 \\ &\Rightarrow x \vee \neg y = 1 \\ &\Rightarrow \neg x \wedge y = \neg(x \wedge \neg y) = o \\ &\Rightarrow y \leqslant x \end{aligned}$$

Analog se arată că

$f(x) = f(y) \Rightarrow x \leqslant y$,

deci $x = y$. Am demonstrat că f este injectivă. Cealaltă echivalență este evidentă.

(c) Considerăm aplicația $g\colon B/_{F_f} \rightarrow f(B)$ definită astfel:

$g(\hat{x}) = f(x) \in f(B)$, pentru orice $\hat{x} \in B/_{F_f}$.

Definiția lui g nu depinde de reprezentanți:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow (x \rightarrow y) \in F_f \\ &\Rightarrow (f(x) \rightarrow f(y)) = f(x \rightarrow y) = 1 \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \end{aligned}$$

g este un morfism de algebre Boole:

$$g(\hat{x} \vee \hat{y}) = g(\widehat{x \vee y}) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = g(\hat{x}) \vee g(\hat{y})$$

Analog se arată că

$$g(\hat{x} \wedge \hat{y}) = g(\hat{x}) \wedge \hat{g}(y); \quad g(\neg \hat{x}) = \neg g(\hat{x}),$$

g este injectivă:

Conform (b), este suficient să arătăm că $F_g = \{\hat{1}\}$

$$\begin{aligned} x \in F_g &\Rightarrow g(\hat{x}) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow x \in F_f \\ &\Rightarrow (x \rightarrow 1) = x \in F_f \Rightarrow x \sim_{F_f} 1 \Rightarrow \hat{x} = \hat{1} \end{aligned}$$

Am arătat că $F_g \subset \{\hat{1}\}$, deci $F_g = \{\hat{1}\}$.

g este în mod evident și surjectivă: pentru orice $y = f(x) \in f(B)$, avem elementul $\hat{x} \in B_{/F_f}$ pentru care

$$g(\hat{x}) = f(x) = y.$$

<u>Corolar</u>: Dacă $f\colon B \rightarrow B'$ este un morfism surjectiv de algebre Boole, atunci B' este izomorfă cu $B/_{F_f}$.

§ 4. <u>TEOREMA DE REPREZENTARE A LUI STONE</u>

Scopul acestui paragraf este de-a demonstra că <u>orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole ale cărei elemente sînt părți ale unei mulțimi</u>. Acest rezultat ocupă un loc central în teoria algebrelor Boole și are importante aplicații în logică, calculul probabilităților (vezi [6]), în topologie etc. Instrumentul principal folosit în demonstrația acestei teoreme va fi conceptul de <u>ultrafiltru</u>.

Fie B o algebră Boole, fixată pentru întreg paragraful. Un filtru F al lui B este <u>propriu</u> dacă $F \neq B$.

<u>OBSERVAȚIE</u>. F este propriu $\iff o \notin F$.

PROPOZIȚIA 1. Dacă $(F_i)_{i\in I}$ este o familie de filtre ale lui B, atunci $\bigcap_{i\in I} F_i$ este un filtru al lui B.

Demonstrație: $x,y\in\bigcap_{i\in I} F_i \Rightarrow x,y\in F_i$, pentru orice $i\in I$

$\Rightarrow x\wedge y\in F_i$, pentru orice $i\in I$

$\Rightarrow x\wedge y\in\bigcap_{i\in I} F_i$

Analog se stabilește și cealaltă proprietate din definiția unui filtru.

Definiția 1. Dacă X este o submulțime, atunci filtrul generat de X este intersecția tuturor filtrelor ce includ pe X:

$$\{F \mid F \text{ filtru},\ X\subset F\}$$

Filtrul generat de X va fi notat (X).

PROPOZIȚIA 2. Dacă $X\neq\emptyset$, atunci

$(X) = \{y\in B \mid \text{există } x_1,\ldots,x_n\in X, \text{ astfel încît } x_1\wedge\ldots\wedge x_n\leq y\}$

Demonstrație: Dacă F_o este mulțimea din dreapta, va trebui să arătăm că

(i) F_o este filtru

(ii) $X\subset F_o$

(iii) Pentru orice filtru F al lui B, avem

$$X\subset F \Rightarrow F_o\subset F.$$

Dacă

$y_1, y_2\in F_o$, atunci există

$x_1,\ldots,x_n\in X$ și $z_1,\ldots,z_n\in X$

astfel încît

$x_1\wedge\ldots\wedge x_n\leq y_1$ și $z_1\wedge\ldots\wedge z_n\leq y_2$

Rezultă

$x_1\wedge\ldots\wedge x_n\wedge z_1\wedge\ldots\wedge z_n\leq y_1\wedge y_2$,

deci $y_1\wedge y_2\in F_o$. Analog se arată că:

$$y_1\leq y_2,\ y_1\in F_o \Rightarrow y_2\in F_o,$$

deci F_o este filtru.

Proprietatea (ii) este evidentă. Presupunem acum că F este un filtru astfel încît $X\subset F$, deci

$y\in F_o \Rightarrow$ există $x_1,\ldots,x_n\in X$, $x_1\wedge\ldots\wedge x_n\leq y$

$\Rightarrow$ există $x_1\wedge\ldots\wedge x_n\in F$, $x_1\wedge\ldots\wedge x_n\leq y$

$\Rightarrow y\in F$,

ceea ce arată că $F_o\subset F$. Propoziția este demonstrată.

Fie $\mathscr{F}(B)$ mulțimea filtrelor proprii ale lui B. $\mathscr{F}(B)$ este o mulțime parțial ordonată în raport cu incluziunea $\subset$.

Definiția 2: Un element maximal al mulțimii parțial ordonate $(\mathscr{F}(B),\subset)$ se numește ultrafiltru.

Cu alte cuvinte, un ultrafiltru este un filtru propriu F al lui B cu proprietatea că pentru orice filtru propriu F', avem

$$F\subset F' \Rightarrow F = F'.$$

PROPOZIȚIA 3. Pentru orice filtru propriu F există un ultrafiltru F_o astfel încît $F\subset F_o$.

Demonstrație. Fie Σ mulțimea filtrelor proprii ale lui B ce includ pe F.

$$\Sigma = \{F' \mid F' \text{ filtru propriu și } F\subset F'\}$$

Cum $F\subset F$, avem $F\in\Sigma$, deci $\Sigma\neq\emptyset$. Considerăm mulțimea parțial ordonată $(\Sigma,\subset)$. Vom arăta că $(\Sigma,\subset)$ este inductivă. Pentru aceasta, fie $(F_i)_{i\in I}$ o familie total ordonată de filtre din Σ:

pentru orice $i,j\in I$, $F_i\subset F_j$ sau $F_j\subset F_i$.

Demonstrăm că familia $(F_i)_{i\in I}$ admite un majorant.

Fie $F' = \bigcup_{i\in I} F_i$. Atunci F' este filtru:

$x, y \in F' \Rightarrow \exists\, i, j \in I$, astfel încît $x \in F_i, y \in F_j$.

Presupunînd, de exemplu, $F_i \subset F_j$, rezultă $x, y \in F_j$, deci $x \wedge y \in F_j$. Se deduce că $x \wedge y \in \bigcup_{i \in I} F_i = F'$.

Analog se stabilește cealaltă proprietate din definiția filtrului. Observăm că $F \subset F'$, deci $F' \in \Sigma$. Însă

$F_i \subset F'$, pentru orice $i \in I$,

deci F' este un majorant al familiei total ordonate $(F_i)_{i \in I}$. Așadar $(\Sigma, \subset)$ este inductivă.

Aplicînd <u>axioma lui Zorn</u>, rezultă existența unui element maximal al lui $(\Sigma, \subset)$, adică a unui ultrafiltru $F_0 \supset F$.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Este primul exemplu în care am folosit explicit axioma lui Zorn.

<u>Corolar</u>: Dacă $x \neq o$, atunci există un ultrafiltru F_0 astfel încît $x \in F_0$.

<u>Demonstrație</u>: $F = \{y \in B \mid x \leq y\}$ este un filtru propriu al lui B.

<u>Definiția 3</u>. Un filtru propriu F al lui B se numește <u>prim</u> dacă:

$$x \vee y \in F \Rightarrow x \in F \text{ sau } y \in F.$$

Teorema următoare caracterizează ultrafiltrele algebrei Boole B.

<u>PROPOZIȚIA 4</u>. Fie F un filtru propriu al lui B. Sînt echivalente următoarele afirmații:

(i) F este ultrafiltru;

(ii) F este filtru prim;

(iii) Pentru orice $x \in B$, avem $x \in F$ sau $\neg x \in F$;

(iV) Algebra Boole cît $B_{/F}$ este izomorfă cu $L_2 = \{o, 1\}$.

<u>Demonstrație</u> <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Presupunem prin absurd că F nu este prim, deci există $x, y \in B$, astfel încît $x \vee y \in F$, dar $x \notin F$, $y \notin F$. Atunci

$$F \subsetneqq (F \cup \{x\}) \Rightarrow (F \cup \{x\}) = B \Rightarrow o \in (F \cup \{x\})$$

și analog $o \in (F \cup \{y\})$.

Aplicînd propoziția 2, din $o \in (F \cup \{x\})$ se deduce existența unui element $a \in F$, astfel încît $a \wedge x \leq o$, deci $a \wedge x = o$. Analog, există $b \in F$, astfel încît $b \wedge y = o$. Rezultă

$$o = (a \wedge x) \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee b) \wedge (x \vee y)$$

Însă din relațiile

$a \in F$, $\cancel{b \in F}$ $a \leq a \vee b$ $\Rightarrow a \vee b \in F$

$a \in F$, $a \leq a \vee y \Rightarrow a \vee y \in F$

$b \in F$, $b \leq x \vee b \Rightarrow x \vee b \in F$

$x \vee y \in F$

se obține

$$(a \vee b) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee b) \wedge (x \vee y) \in F,$$

deci $o \in F$, ceea ce contrazice faptul că F este propriu. Deci F este ~~propriu~~ prim.

(ii) ⇒ (iii) Din $x \vee \neg x = 1 \in F$, rezultă $x \in F$ sau $\neg x \in F$.

(iii) ⇒ (iV) Aplicația $f: B \to L_2$, definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in F \\ 0, & \text{dacă } x \notin F \end{cases}$$

este un morfism de algebre Boole. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) = 1 &\Leftrightarrow x \wedge y \in F \\ &\Leftrightarrow x \in F \text{ și } y \in F \qquad (F \text{ este filtru}) \\ &\Leftrightarrow f(x) = 1 \text{ și } f(y) = 1, \end{aligned}$$

deci $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, pentru orice $x, y \in B$.

De asemenea:

$$f(\neg x) = 1 \Longleftrightarrow \neg x \in F$$

$$\Longleftrightarrow x \notin F \qquad \text{(conform (iii)).}$$

$$\Longleftrightarrow f(x) = o$$

$$\Longleftrightarrow \neg f(x) = 1,$$

de unde rezultă $f(\neg x) = \neg f(x)$, pentru orice $x, y \in B$.

Cum $1 \in F$, avem $f(1) = 1$. Din $o \notin F$, rezultă $f(o) = o$. Pentru orice $x, y \in B$, vom avea

$$f(x \vee y) = f(\neg(\neg x \wedge \neg y)) = \neg f(\neg x \wedge \neg y) = \neg(f(\neg x) \wedge f(\neg y)) =$$

$$= \neg(\neg f(x) \wedge \neg f(y)) = f(x) \vee f(y)$$

deci f este morfism de algebre Boole.

Cum $f(1) = 1$, $f(o) = o$, f este surjectiv. Aplicînd corolarul Propoziţiei 2,§3, rezultă că $B/_{F_f}$ este izomorfă cu L_2.

Dar

$$F_f = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$$

$$= \{x \in B \mid x \in F\} = F,$$

deci $B/_F$ şi L_2 sînt izomorfe.

<u>$(iv) \Longrightarrow (i)$</u>. Fie $f: B/_F \longrightarrow L_2$ un izomorfism de algebre Boole. Presupunem prin absurd că F nu este propriu, deci $o \in F$. Cum $(o \longrightarrow 1) = o \in F$, rezultă $o \sim_F 1$, deci

$\hat{o} = \hat{1}$. Am avea $f(\hat{o}) = f(\hat{1})$, deci $o = 1$ în algebra Boole $\{o,1\}$ ceea ce este absurd. Deci F este propriu.

Presupunem că există un filtru propriu F', astfel încît $F \subsetneqq F'$. Fie $x \in F' - F$.

Dacă $f(\hat{x}) = 1 = f(\hat{1})$, atunci $\hat{x} = \hat{1}$, deci

$$x = (x \longrightarrow 1) \in F,$$

ceea ce este o contradicţie. Aşadar $f(\hat{x}) = o = f(\hat{o})$, deci $\hat{x} = \hat{o}$. Rezultă

$$\neg x = (x \longrightarrow o) \in F \subset F'$$

Din $x \in F'$, $\neg x \in F'$ se obţine $o = x \wedge \neg x \in F'$, ceea ce ar fi în contradicţie cu faptul că F' este propriu. Deci F este ultrafiltru.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm teorema de reprezentare a lui Stone.

<u>PROPOZIŢIA 5 (Stone)</u>. Pentru orice algebră Boole B, există o mulţime nevidă X şi un morfism de algebre Boole injectiv $f: B \longrightarrow \mathscr{P}(X)$.

<u>Demonstraţie</u>. Vom nota cu X mulţimea ultrafiltrelor lui B şi cu $f: B \longrightarrow \mathscr{P}(X)$, funcţia definită astfel:

$$f(x) = \{F \in X \mid x \in F\}$$

Pentru orice $x, y \in B$, avem echivalenţele:

$$F \in f(x \vee y) \Longleftrightarrow x \vee y \in F$$

$$\Longleftrightarrow x \in F \text{ sau } y \in F \qquad (F \text{ este prim})$$

$$\Longleftrightarrow F \in f(x) \text{ sau } F \in f(y)$$

$$\Longleftrightarrow F \in f(x) \cup f(y)$$

$$F \in f(x \wedge y) \Longleftrightarrow x \wedge y \in F$$

$$\Longleftrightarrow x \in F \text{ şi } y \in F \qquad (F \text{ este filtru})$$

$$\Longleftrightarrow F \in f(x) \text{ şi } F \in f(y)$$

$$\Longleftrightarrow F \in f(x) \cap f(y)$$

$$F \in f(\neg x) \Longleftrightarrow \neg x \in F$$

$$\Longleftrightarrow x \notin F \qquad \text{(Propoziţia 3,(iii)}$$

$$\Longleftrightarrow F \notin f(x)$$

$$\Longleftrightarrow F \in C_X f(x)$$

Am arătat deci că

$f(x\vee y) = f(x)\cup f(y)$

$f(x\wedge y) = f(x)\cap f(y)$

$f(\neg x) = \complement_X f(x)$

Pentru a arăta că f este injectivă, vom proba că $F_f = \{1\}$ (vezi Propoziția 3, (b), § 3). Presupunem $f(x) = X$, deci $f(\neg x)=\emptyset$.

Dacă $x \neq 1$, atunci $\neg x \neq 0$. Aplicînd corolarul Propoziției 3 rezultă un ultrafiltru F astfel încît $\neg x\in F$, deci $F\in f(\neg x) = \emptyset$, ceea ce este o contradicție. Așadar $x = 1$.

OBSERVAȚIE: Teorema lui Stone se poate enunța și astfel: „Orice algebră Boole B este izomorfă cu o subalgebră Boole a unei algebre Boole de forma $\mathcal{P}(X)$".

§ 5. ALGEBRE BOOLE FINITE

Definiția 1. Fie B o algebră Boole. Un element $x\in B$ se numește atom dacă $x\neq 0$ și dacă pentru orice $y\in B$, avem implicația

$$0\le y\le x \Rightarrow y = 0 \text{ sau } y = x.$$

Algebra Boole B se numește atomică dacă pentru orice $x\in B$ diferit de o există un atom a, astfel încît $a\le x$. B se numește fără atomi dacă nu are nici un atom.

Exemplu: Intr-o algebră Boole de forma $\mathcal{P}(X)$, orice parte de forma $\{x\}$, $x\in X$ este un atom.

Noțiunea de atom ne va fi necesară în caracterizarea algebrelor Boole finite.

PROPOZIȚIA 1. Orice algebră Boole finită este atomică.

Demonstrație. Fie B o algebră Boole finită care nu este atomică, deci există $a_0\in B$, $a_0\neq 0$ și pentru care nu există nici un atom $\le a_0$.

Construim prin inducție un șir strict descrescător

$$a_0 > a_1 > \dots > a_n > \dots > 0.$$

Intr-adevăr, presupunînd că $a_0>a_1>\dots>a_n$, atunci există a_{n+1}, cu proprietatea că $a_n>a_{n+1}>0$ (dacă nu ar exista nici un element a_{n+1} cu această proprietate, ar rezulta că a_n este un atom și $a_n<a_0$, ceea ce contrazice ipoteza făcută). Dar existența șirului strict descrescător $a_0>a_1>\dots>a_n>\dots 0$ contrazice faptul că B este finită. Deci B este atomică.

PROPOZIȚIA 2. Dacă B este o algebră Boole finită cu n atomi $a_1,\dots,a_n$, atunci B este izomorfă cu $\mathcal{P}(\{a_1,\dots,a_n\})$.

Demonstrație: Fie $A=\{a_1,\dots,a_n\}$. Considerăm funcția $f: B\to\mathcal{P}(A)$ definită de

$f(x)=\{a\in A \mid a\le x\}$, pentru orice $x\in B$.

Arătăm că

$$f(x\vee y)=f(x)\cup f(y).$$

Incluziunea $f(x)\cup f(y)\subset f(x\vee y)$ este evidentă:

$a\in f(x)\cup f(y) \Rightarrow a\le x$ sau $a\le y \Rightarrow a\le x\vee y\Rightarrow a\in f(x\vee y)$

Presupunînd prin absurd că incluziunea cealaltă nu are loc, va exista $a\in f(x\vee y)$ și $a\notin f(x)$, $a\notin f(y)$. Atunci avem $a\not\le x$, $a\not\le y$, deci $a\wedge x<a$, $a\wedge y<a$

Cum a este atom, rezultă $a\wedge x=0$ și $a\wedge y=0$, deci

$a\wedge(x\vee y) = (a\wedge x)\vee(a\wedge y)=0$

Din $a\in f(x\vee y)$ rezultă $a\le x\vee y$, deci $a\wedge(x\vee y)=a$. Ar rezulta $a=0$, ceea ce contrazice faptul că a este atom. Deci și incluziunea cealaltă este adevărată.

Vom stabili acum egalitatea $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$:

$a\in f(x\wedge y)\Leftrightarrow a\le x\wedge y$

$\Leftrightarrow a\le x$ și $a\le y$ (conform definiției infimului)

$\Leftrightarrow a\in f(x)$ și $a\in f(y)$

$\Leftrightarrow a\in f(x)\cap f(y)$

Avem și relațiile:

$f(o) = \emptyset$: deoarece nu există nici un atom a astfel încît $a \leqslant o$.

$f(1) = A$: deoarece $a \leqslant 1$, pentru orice $a \in A$.

Am demonstrat că f este morfism de algebre Boole.

Pentru a arăta că f este injectiv este suficient să arătăm că:

$$f(x) = X \Longrightarrow x = 1$$

sau, echivalent,

$$f(x) = \emptyset \Longrightarrow x = o$$

Presupunînd $x \neq o$, atunci, B fiind atomică, există $a \in A$ astfel încît $a \leqslant x$, deci $a \in f(x)$. Cu alte cuvinte, $x \neq o \Longrightarrow f(x) \neq \emptyset$.

A rămas să arătăm surjectivitatea lui f. Fie $X \subset A$, deci X are forma

$$X = \left\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\right\}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

Notăm $x = a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_k}$. Vom arăta că $f(x) = X$.

Din $a_{i_1} \leqslant x, \ldots, a_{i_k} \leqslant x$ rezultă $a_{i_1} \in f(x), \ldots, a_{i_k} \in f(x)$, deci $X \subset f(x)$. Presupunînd $a \in f(x)$, avem $a \leqslant x$, deci

$$a = a \wedge x = a \wedge \left[a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_k}\right] = \left(a \wedge a_{i_1}\right) \vee \ldots \vee \left(a \wedge a_{i_k}\right)$$

Există un indice $j \in \left\{i_1, \ldots, i_k\right\}$, astfel încît $a \wedge a_j \neq 0$. Altfel, am avea

$$a \wedge a_{i_1} = \ldots = a \wedge a_{i_k} = o \Longrightarrow a = o \qquad \text{(absurd)}$$

Cum a, a_j sînt atomi, rezultă $a = a_j$. Intr-adevăr, dacă $a \neq a_j$ am avea $o < a \wedge a_j < a$, ceea ce contrazice faptul că a este atom. Aşadar $a = a_j \in X$, ceea ce stabileşte incluziunea $f(x) \subset X$.

In concluzie, f este un izomorfism.

PROPOZIŢIA 3. Pentru orice algebră Boole B, sînt echivalente afirmaţiile:

(i) B este atomică.

(ii) Pentru orice $a \in B$, avem

$$a = \bigvee \left\{x \mid x \leqslant a,\ x \text{ atom al lui } B\right\}$$

Demonstraţie (i) $\Longrightarrow$ (ii). Fie $a \in B$. Este evident că a este un majorant al familiei

$$X_a = \left\{x \mid x \leqslant a,\ x \text{ atom al lui } B\right\}.$$

Presupunem că b este un alt majorant al acestei familii. Dacă $a \not\leqslant b$, atunci $a \wedge \neg b \neq o$, deci există un atom x cu $x \leqslant a \wedge \neg b$. Atunci $x \leqslant a$, deci $x \in X_a$, de unde rezultă că $x \leqslant b$. Am obţinut contradicţia $x \leqslant b \wedge \neg b = o$, deci $a \leqslant b$.

Am arătat că a este cel mai mic majorant al lui X_a.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Evident.

Corolar. Dacă B este atomică şi are un număr finit de atomi, atunci B este finită.

Demonstraţie. Conform propoziţiei precedente, orice element $a \in B$ este supremumul mulţimii X_a a atomilor $\leqslant a$. Din ipoteză rezultă că X_a este totdeauna o submulţime a unei mulţimi finite, deci B este finită.

Exerciţiu. Fie A, B două algebre Boole finite. Atunci A, B sînt izomorfe dacă şi numai dacă card A = card B.

Indicaţie: Se aplică Propoziţia 2.

§ 6. PRODUS DIRECT DE ALGEBRE BOOLE

Dacă $(B_i)_{i \in I}$ este o familie de algebre Boole, atunci produsul cartezian $\prod_{i \in I} B_i$ poate fi înzestrat cu următoarele operaţii:

$$(x_i)_{i \in I} \vee (y_i)_{i \in I} = (x_i \vee y_i)_{i \in I}$$

$$(x_i)_{i \in I} \wedge (y_i)_{i \in I} = (x_i \wedge y_i)_{i \in I}$$

$$\neg (x_i)_{i \in I} = (\neg x_i)_{i \in I}.$$

Considerăm în $\prod_{i\in I} B_i$ elementele 0 și 1 definite de:

$0 = (x_i)_{i\in I}$, cu $x_i = 0 \in B_i$, pentru orice $i\in I$

$1 = (x_i)_{i\in I}$, cu $x_i = 1 \in B_i$, pentru orice $i\in I$.

<u>PROPOZIȚIA 1</u> $\prod_{i\in I} B_i$ este o algebră Boole față de operațiile introduse mai sus.

<u>Demonstrație</u>: Se verifică foarte simplu proprietățile din definiția algebrei Boole.

$\prod_{i\in I} B_i$ se numește <u>produsul direct</u> al familiei $(B_i)_{i\in I}$.

<u>Observație</u>: Proiecțiile canonice $\pi_i : \prod_{i\in I} B_i \to B_i$, $i\in I$ sînt morfisme de algebre Boole.

<u>PROPOZIȚIA 2</u>. Fie $(B_i)_{i\in I}$ o familie de algebre Boole. Atunci pentru orice algebră Boole A și pentru orice familie de morfisme de algebre Boole $\{f_i : A \to B_i\}_{i\in I}$ există un <u>unic</u> morfism de algebre Boole $f: A \to \prod_{i\in I} B_i$ astfel încît următoarele diagrame sînt comutative.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & B_i \\
& A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd} \quad (i\in I)$$

$f_i = \pi_i \circ f, i\in I$

<u>Demonstrație</u>. Din Cap.I, § 5, Propoziția 1 știm că există o ~~aică~~ unică aplicație $f: A \to \prod_{i\in I} B_i$, definită

$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i$$

care face comutativă diagrama de mai sus.

Rămîne de arătat că f este morfism de algebre Boole. Vom proba numai că

$$f(x\vee y) = f(x)\vee f(y), \text{ pentru orice } x,y\in A.$$

Intr-adevăr, avem:

$$f(x\vee y) = \left(f_i(x\vee y)\right)_{i\in I} = \left(f_i(x)\vee f_i(y)\right)_{i\in I} =$$

$$= \left(f_i(x)\right)_{i\in I} \vee \left(f_i(y)\right)_{i\in I} = f(x)\vee f(y).$$

Rezultatul următor arată că Propoziția 2 caracterizează produsul direct de algebre Boole.

<u>PROPOZIȚIA 3</u>: Fie $(B_i)_{i\in I}$ o familie oarecare de algebre Boole. Considerăm o algebră Boole B și o familie de morfisme de algebre Boole $\{p_i : B \to B_i\}_{i\in I}$ cu următoarea proprietate:

(*) Pentru orice algebră Boole A și pentru orice familie de morfisme de algebre Boole $\{f_i : A \to B_i\}_{i\in I}$ există un ~~aic~~ unic morfism de algebre Boole $f: A \to B$ astfel încît diagrama următoare este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "p_i"] & & B_i \\
& A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

pentru orice $i\in I$.

In aceste condiții, B este izomorfă cu $\prod_{i\in I} B_i$.

$f_i = p_i \circ f$

<u>Demonstrație</u>: Conform Propoziției 2, există un ~~aic~~ unic morfism de algebre Boole $f: B \to \prod_{i\in I} B_i$, astfel încît $\pi_i \circ f = p_i$, pentru orice $i\in I$, iar din (*) rezultă existența unui ~~aic~~ unic morfism de algebre Boole $g: \prod_{i\in I} B_i \to B$ astfel încît $p_i \circ g = \pi_i$ pentru orice $i\in I$:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[dr, shift right, "g"'] & & B_i \\
& B \arrow[ul, shift right, "f"'] \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Vom arăta că f, g sînt inverse unul celuilalt. Observăm că următoarele diagrame sînt comutative:

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & B_i \\ & \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[ul, "f\circ g"] \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "p_i"] & & B_i \\ & B \arrow[ul, "g\circ f"] \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

(I) (II)

pentru orice $i\in I$. Intr-adevăr, avem relaţiile:

$$\pi_i\circ(f\circ g) = (\pi_i\circ f)\circ g = p_i\circ g = \pi_i \quad , \quad i\in I$$

$$p_i\circ(g\circ f) = (p_i\circ g)\circ f = \pi_i\circ f = p_i \quad , \quad i\in I$$

Insă avem şi următoarele diagrame comutative:

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & B_i \\ & \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[ul, "1_{\prod\limits_{i\in I} B_i}"] \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "p_i"] & & B_i \\ & B \arrow[ul, "1_B"] \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

(I') (II')

pentru orice $i\in I$.

Conform unicităţii exprimate în Propoziţia 2, rezultă: $f\circ g = 1_{\prod\limits_{i\in I} B_i}$ şi analog, din (*), rezultă $g\circ f = 1_B$. Deci B şi $\prod\limits_{i\in I} B_i$ sînt izomorfe.

<u>OBSERVAŢIE</u>. Proprietatea (*), care după cum am văzut caracterizează produsul direct de algebre Boole poartă numele de <u>proprietatea de universalitate</u> a <u>produsului cartezian</u>.

Dacă $B_i = B$, pentru orice $i\in I$, atunci vom nota $B^I = \prod\limits_{i\in I} B_i$.

Vom nota cu Hom (B,B') mulţimea morfismelor de algebre Boole $f: B \longrightarrow B'$.

<u>Lema 1</u>. Mulţimea ultrafiltrelor unei algebre Boole B se poate pune în corespondenţă bijectivă cu mulţimea Hom (B, L_2), unde L_2 este algebra Boole $\{0,1\}$.

<u>Demonstraţie</u>: Fiecărui ultrafiltru F al lui B îi asociem morfismul de algebre Boole $f_F: B \longrightarrow L_2$.

$$f_F(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x\in F \\ 0, & \text{dacă } x\notin F \end{cases}$$

Reciproc, fiecărui morfism de algebre Boole $f: B \longrightarrow L_2$ i se asociază

$$M_f = f^{-1}(\{1\}) = \{x\in B \mid f(x) = 1\}.$$

Se poate arăta că M_f este un ultrafiltru al lui B. Funcţiile

$$f \longmapsto M_f, \quad F \longmapsto f_F$$

sînt inverse una celeilalte.

Lăsăm cititorului ca exerciţiu detalierea acestei propoziţii.

Fie acum B o algebră Boole oarecare. Conform proprietăţii de de universalitate a produsului direct rezultă un morfism de algebre Boole

$$\Phi : B \longrightarrow L_2^{\mathrm{Hom}\,(B,L_2)}$$

care face comutative diagramele

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & & L_2^{\mathrm{Hom}\,(B,L_2)} \arrow[dl, "\pi_f"] \\ & L_2 & \end{tikzcd}$$

pentru orice $f\in$ Hom (B,L_2).

PROPOZIŢIA 3 : Φ este injectiv.

Demonstraţie: Vom arăta că: $\Phi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Dacă $\Phi(x) = o$, atunci $f(x) = \pi_f(\Phi(x)) = \pi_f(o) = o$, pentru orice $f \in Hom(B, L_2)$.

Presupunem prin absurd că $x \neq o$, deci există un ultrafiltru F al lui B, astfel încît $x \in F$. Atunci, conform demonstraţiei Lemei 1, avem un morfism $f_F: B \longrightarrow L_2$ astfel încît:

$$f_F(x) = 1 \qquad (\text{deoarece } x \in F).$$

Contradicţia este evidentă.

PROPOZIŢIA 4. Pentru orice mulţime X, L_2^X este o algebră Boole izomorfă cu $\mathscr{P}(X)$.

Demonstraţie: În demonstraţia Propoziţiei 4, § 6, Cap.1 am arătat că funcţia

$$\Phi : \mathscr{P}(X) \longrightarrow L_2^X$$

$$\Phi(B) = \chi_B : X \longrightarrow L_2, \text{ pentru orice } B \in \mathscr{P}(X)$$

este o bijecţie. Relaţiile următoare:

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$$

$$\chi_{C_X}(B) = 1 - \chi_X(B)$$

arată că Φ este un morfism de algebre Boole. Deci Φ este izomorfism.

OBSERVAŢIE. Conform Propoziţiei 4, $L_2^{Hom(B,L_2)}$ şi $\mathscr{P}(Hom(B,L_2))$ sînt izomorfe, deci Propoziţia 3 de mai sus poate fi considerată ca o exprimare echivalentă a teoremei de reprezentare a lui Stone.

Demonstraţia Propoziţiei 3 nu este esenţial diferită de cea a teoremei lui Stone, în ambele demonstraţii intervenind „cam în

acelaşi mod" proprietăţile ultrafiltrelor.

§ 7. ALGEBRE BOOLE NUMARABILE

Fie A o algebră Boole oarecare şi $a \in A$. Vom nota

$$A \upharpoonright a = \{x \in A \mid x \leqslant a\}.$$

Atunci $A \upharpoonright a$ este algebră Boole faţă de operaţiile:

$$x \vee' y = x \vee y$$

$$x \wedge' y = x \wedge y$$

$$\neg' x = a \wedge \neg x$$

$$o' = o$$

$$1' = a$$

PROPOZIŢIA 1. Pentru orice $a \in A$, A este izomorfă cu produsul direct

$$(A \upharpoonright a) \times (A \upharpoonright \neg a)$$

Demonstraţie: Considerăm funcţia $f: A \longrightarrow (A \upharpoonright a) \times (A \upharpoonright \neg a)$ definită astfel:

$$f(x) = (x \wedge a, x \wedge \neg a)$$

f este un morfism de algebre Boole:

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= ((x \vee y) \wedge a, (x \vee y) \wedge \neg a)) \\ &= ((x \wedge a) \vee (y \wedge a), (x \wedge \neg a) \vee (y \wedge \neg a)) \\ &= (x \wedge a, x \wedge \neg a) \vee (x \wedge a, y \wedge \neg a) \\ &= f(x) \vee f(y) \\ f(x \wedge y) &= ((x \wedge y) \wedge a, (x \wedge y) \wedge \neg a) \\ &= ((x \wedge a) \wedge (y \wedge a), (x \wedge \neg a) \vee (y \wedge \neg a)) \\ &= (x \wedge a, x \wedge \neg a) \wedge (y \wedge a, y \wedge \neg a) \\ &= f(x) \vee f(y) \\ f(\neg x) &= (\neg x \wedge a, \neg x \wedge \neg a) = \neg f(x). \end{aligned}$$

$f: B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ injectiv astfel încît pentru orice familie $(x_n)_{n\in N}$ de elemente ale lui B să avem:

$$f\Big(\bigvee_{n\in N} x_n\Big) = \bigcup_{n\in N} f(x_n)$$

$$f\Big(\bigwedge_{n\in N} x_n\Big) = \bigcap_{n\in N} f(x_n)$$

Demonstrația acestei teoreme se face în maniera demonstrației teoremei de reprezentare a lui Stone.

EXERCIŢII LA CAPITOLUL II

1. Fie $(P,\leqslant)$ o mulţime parţial ordonată. Definim relaţia binară $<$ prin:

$$x<y \Longleftrightarrow x\leqslant y \text{ şi } x\neq y.$$

Să se arate că $<$ satisface proprietăţile următoare:

(i) Pentru orice $x\in P$, nu este adevărată relaţia $x<x$.

(ii) $x<y,\ y<z \Longrightarrow x<z$, pentru orice $x, y, z\in P$.

Reciproc, dacă P este o mulţime înzestrată cu o operaţie binară $<$ ce verifică (i) şi (ii), atunci relaţia $\leqslant$ definită prin

$$x\leqslant y \Longleftrightarrow x<y \text{ sau } x=y$$

este o relaţie de ordine pe mulţimea P.

2. Intr-o mulţime parţial ordonată $(P,\leqslant)$ avem:

$$x_1\leqslant x_2\leqslant \dots \leqslant x_n\leqslant x_1 \Longrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n.$$

3. Arătaţi că pe o mulţime cu două elemente există exact trei relaţii de ordine parţială.

4. Fie $G(n)$ numărul relaţiilor de ordine parţială ce se pot defini pe o mulţime cu n elemente. Arătaţi că $G(3)=19$ şi $G(4)=219$. Cercetaţi dacă $G(n)$ este impar pentru orice $n\in N$.

5. Orice produs cartezian de mulţimi total ordonate este o mulţime total ordonată.

6. Orice mulţime finită poate fi înzestrată cu o relaţie de ordine totală.

7. O semilatice este o mulţime A înzestrată cu o operaţie binară cu proprietăţile următoare:

$x\circ x = x$, pentru orice $x\in A$.
$x\circ y = y\circ x$, pentru orice $x, y\in A$
$x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z$, pentru orice $x, y\in A$.

Dacă notăm

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x \circ y = x,$$

atunci $(A, \leqslant)$ este o mulţime parţial ordonată astfel încît pentru orice $x, y \in A$,

$$x \circ y = x \wedge y.$$

8. Să se formuleze şi să se demonstreze reciproca problemei 7.

9. In orice latice L avem inegalitatea:

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge d) \leqslant (a \vee b) \wedge (c \vee d)$$

inegalitatea reciprocă este adevărată?

1o. Să se determine numărul laticilor neizomorfe cu 2,3 şi 4 elemente.

11. Fie Φ o mulţime de funcţii $f: I \longrightarrow I$. Arătaţi că mulţimea

$$\{X \in \mathcal{P}(I) \mid f(X) \subset X, \text{ pentru orice } f \in \Phi\}$$

este o latice completă (există orice supremum şi infimum).

12. O submulţime S a unui spaţiu vectorial V peste un corp K este <u>convexă</u> dacă

$$x, y \in S, \ \lambda, \mu \geqslant 0, \ \lambda + \mu = 1 \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in S.$$

Să se arate că submulţimile convexe ale lui V formează o latice completă.

13. Arătaţi că, pentru orice submulţime S a unei latici L, mulţimea majoranţilor lui S formează o latice completă.

14. Mulţimea N a numerelor naturale este o latice completă faţă de relaţia de ordine definită de divizibilitate.

15. Mulţimea idealelor inelului Z a întregilor poate fi înzestrată ca o structură de latice completă. Această latice este izomorfă cu latice de la exerciţiul 14.

16. Orice mulţime total ordonată este o latice distributivă.

17. In orice latice distributivă L avem:

$$c \wedge x = c \wedge y, \ c \vee x = c \vee y \Longrightarrow x = y.$$

18. O latice L se numeşte <u>modulară</u> dacă pentru orice $x, y, z \in L$, avem:

$$x \leqslant z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

Să se arate că laticea reprezentată prin graful următor

este modulară, dar nu este distributibă.

19. Să se arate că laticea de mai jos nu este modulară:

2o. Fie G un grup abelian aditiv şi S(G) mulţimea subgrupurilor lui G. S(G) este o mulţime parţial ordonată faţă de incluziune. S(G) este o latice modulară pentru operaţiile:

$$M \vee N = M + N = \{x + y \mid x \in M, \ y \in N\}$$

$$M \wedge N = M \cap N.$$

21. Să se arate că o latice L este modulară dacă şi numai dacă pentru orice $x, y, z \in L$, avem

$$x \nleqslant z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) \nleqslant (x \vee y) \wedge z.$$

22. Fie L o latice distributivă şi a, b două elemente ce nu aparţin lui L. Notînd $L^* = L \cup \{a, b\}$ şi punînd prin definiţie $a < x < b$ pentru orice $x \in L$, să se arate că L^* este o latice distributivă cu element prim şi element ultim.

23. Să se găsească o latice ce nu este completă.

24. Să se găsească o latice distributivă fără prim şi ultim element.

25. Să se găsească o latice distributivă cu element prim şi element ultim care nu este algebră Boole.

26. Fie L o latice distributivă cu 0 şi 1. Să se arate că mulţimea

$C(L) = \{x \in L \mid$ există $y \in L$, astfel încît $x \vee y = 1,\ x \wedge y = o\}$

este o algebră Boole.

27. Fie L, L' două latici distributive cu o şi 1. Notăm $i_L: C(L) \to L$, $i_{L'}: C(L') \to L'$ aplicaţiile date de incluziunile $C(L) \subset L$, $C(L') \subset L$. Dacă $f: L \to L'$ este un morfism de latici distributive cu o şi 1 ($f(o) = o$ şi $f(1) = 1$), atunci $f_{C(L)}: C(L) \to C(L')$ este un morfism de algebre Boole, astfel încît următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & L' \\ C(L) \arrow[u, "i_L"] \arrow[r, "f_{C(L)}"'] & C(L') \arrow[u, "i_{L'}"'] \end{tikzcd}$$

28. Să se arate că produsul cartezian a două latici distributive cu o şi 1 este o latice distributivă cu o şi 1.

29. Fie L, L' două latici distributive cu o şi 1. Să se arate că algebra Boole $C(L \times L')$ este izomorfă cu produsul direct de algebre Boole $C(L) \times C(L')$.

30. Fie $f: L \to L'$ un morfism de latici distributive cu element prim şi cu element ultim. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(a) f este injectiv.

(b) $Ker\ (f) = \{x \in L \mid f(x) = o\}$ este sublaticea $\{o\}$ a lui L.

31. Fie A o mulţime înzestrată cu o operaţie binară $\vee$ şi cu o operaţie unară $\neg$. Definim $a \wedge b = (a' \vee b')'$ şi presupunem că

$a \vee b = b \vee a$

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = a$

Să se arate că A este o algebră Boole.

32. Fie A o mulţime înzestrată cu o operaţie unară $|: A \to A$ (simbolul lui Sheffer). Notăm $\neg a = a \mid a$ şi presupunem că sînt verificate proprietăţile:

(I) $(b \mid a) \mid (\neg b \mid a) = a$

(II) $a \mid (b \mid c) = \neg\left[(\neg c \mid a) \mid (\neg b \mid a)\right]$

Să se arate că A este o algebră Boole pentru operaţiile:

(III) $a \vee b = (a \mid b) \mid (a \mid b)$

(IV) $a \wedge b = (a \mid a) \mid (b \mid b)$

şi pentru negaţia $\neg$ introdusă mai sus.

Reciproc, dacă într-o algebră Boole B definim $a \mid b = \neg a \wedge \neg b$, atunci în B sînt verificate relaţiile (I) - (IV).

33. In orice algebră Boole avem relaţia

$x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$.

34. Arătaţi că într-un inel comutativ A de caracteristică 2, mulţimea $\{x \mid x^2 = x\}$ formează un inel Boole care este subinel al lui A.

<u>Notă</u>. A are caracteristica 2, dacă $x + x = o$, pentru orice $x \in A$.

35. Fie B' o submulţime nevidă a unei algebre Boole B. Sînt echivalente afirmaţiile:

(i) B' este subalgebră Boole a lui B.

(ii) B' este închisă la operațiile $\vee$ și $\neg$.

(iii) B' este închisă la operațiile $\wedge$ și $\neg$.

36. Orice intersecție de subalgebre Boole este o subalgebră Boole.

37. Dacă X este o submulțime a unei algebre Boole B, atunci intersecția tuturor subalgebrelor Boole ale lui B ce includ pe X este o subalgebră Boole (numită <u>subalgebra Boole generată de X</u>) care este formată din o,1 și din toate elementele lui A de forma

$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

unde $m, n_i \in N$ și pentru orice $i \leqslant m$, $j \leqslant n_i$, avem $y_{ij} \in X$ sau $\neg y_{ij} \in X$.

38. Să se găsească toate subalgebrele Boole ale următoarelor algebre Boole:

$$\mathscr{P}(\{x,y\}) ; \mathscr{P}(\{x,y,z\}); \mathscr{P}(\{x,y,z,w\}).$$

39. Dacă $X = \{x_1,\dots,x_n\}$, să se determine mulțimea subalgebrelor Boole ale lui $\mathscr{P}(X)$ care sînt neizomorfe. Să se verifice pentru cazul problemei 38.

40. Fie B' o subalgebră Boole a lui B. Dacă F este un filtru al lui B, atunci $F \cap B'$ este un filtru al lui B'.

41. Dacă B' este subalgebră Boole a lui B și B_1' este subalgebră Boole a lui B_1, atunci $B' \times B_1'$ este subalgebră Boole a lui $B \times B_1$.

42. Fie B, B' două algebre Boole și $f: B' \longrightarrow B'$ o aplicație oarecare. Sînt echivalente afirmațiile următoare:

(1) f este morfism de algebre Boole.

(2) $f(\neg x) = \neg f(x)$ și $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, pentru orice $x,y \in B$.

(3) $f(\neg x) = \neg f(x)$ și $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$, pentru orice $x,y \in B$.

(4) $f(o) = o, f(1) = 1$, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ pentru orice $x, y \in B$ și $f(x) \wedge f(y) = o$ atunci cînd $x \wedge y = o$.

43. Fie B o algebră Boole și $x \in B$. Să se arate că mulțimea

$$F_x = \{y \mid y \geqslant x\}$$

este un filtru al lui B. Să se determine $B/_{F_x}$.

44. Fie F un filtru propriu al unei algebre Boole B. Să se arate că intersecția tuturor ultrafiltrelor lui B ce includ pe F este egală cu F. Să se deducă de aici că intersecția tuturor ultrafiltrelor lui B este $\{1\}$.

45. Fie $B/_F$ algebra Boole cît a lui B prin filtrul F și $p: B \longrightarrow B/_F$ morfismul surjectiv canonic: $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x \in B$.

(i) Dacă Γ este un filtru (ultrafiltru) al lui $B/_F$ să se arate că $p^{-1}(\Gamma)$ este un ultrafiltru al lui B ce include pe F.

(ii) Dacă F' este filtru (ultrafiltru) al lui B și $F \subset F'$, atunci $p(F')$ este un filtru (ultrafiltru) al lui $B/_F$.

(iii) Funcțiile $\Gamma \longmapsto p^{-1}(\Gamma)$, $F' \longmapsto p(F')$ determină o corespondență bijectivă între mulțimea filtrelor (ultrafiltrelor) lui $B/_F$ și mulțimea filtrelor (ultrafiltrelor) lui B ce includ pe F.

(iV) Dacă F,F' sînt filtre ale lui B astfel încît $F \subset F'$, atunci algebrele Boole $B/_{F'}$ și $(B/_F)/p(F')$ sînt izomorfe.

46. Să se determine mulțimea ultrafiltrelor următoarelor algebre Boole:

$$L_2 = \{o,1\},\ L_2 \times L_2,\ L_2 \times L_2 \times L_2.$$

47. In algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ notăm, pentru orice $x\in X$,

$$U_x = \{U\subset X \mid x\in U\}$$

Să se arate că U_x este un ultrafiltru al lui $\mathcal{P}(X)$, numit *ultrafiltrul principal* asociat lui x.

48. Intr-o algebră Boole finită, orice ultrafiltru este principal.

49. Să se determine mulţimea ultrafiltrelor unei algebre Boole cu 2^n elemente.

5o. Mulţimea evenimentelor asociate unei experienţe aleatoare este o algebră Boole.

51. Fie $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ un cîmp de probabilitate. Să se arate că

$$\{A\in\mathcal{K} \mid P(A) = 1\}$$

este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{K}$.

52. O submulţime nevidă I a unei algebre Boole se numeşte *ideal* boolean dacă

$$x,\ y\in I \Rightarrow x\vee y\in I$$

$$x\in I,\ y\leqslant x \Rightarrow y\in I$$

Să se arate că orice intersecţie de ideale booleene este un ideal. Dacă $X\subset B$ atunci intersecţia tuturor idealelor booleene lui B ce includ pe X este

$$\bar{X} = \{y\in B \mid \text{există } x_1,\dots,x_n\in X,\ y\leqslant x_1\vee\dots\vee x_n\}$$

Notă. $\bar{X}$ se numeşte idealul boolean generat de X.

53. Fie B o algebră Boole şi G(B) inelul Boole asociat. Atunci o submulţime I a lui B este ideal boolean dacă şi numai dacă este ideal al inelului G(B).

54. Un ideal boolean I al lui B se numeşte *propriu*, dacă $1\notin I$. Un ideal boolean se numeşte *maximal* dacă este un element maximal al mulţimii idealelor proprii ale lui B ordonată de incluziune. Pentru orice ideal boolean propriu I, sînt echivalente afirmaţiile:

(a) I este un ideal boolean maximal.

(b) I este un ideal maximal al inelului Boole G(B).

55. Dacă F este un filtru al algebrei Boole B, atunci

$$F^+ = \{\neg x \mid x\in F\}$$

este un ideal boolean. Dacă I este un ideal boolean al lui B, atunci

$$I_+ = \{\neg x \mid x\in I\}$$

este un filtru al lui B. Funcţiile $F\longmapsto F^+$, $I\longmapsto I_+$ sînt inverse una celeilalte şi realizează o corespondenţă bijectivă între mulţimea idealelor booleene şi mulţimea filtrelor unei algebre Boole.

56. In condiţiile exerciţiului precedent, avem echivalenţele:

F filtru propriu $\Longleftrightarrow$ F^+ ideal boolean propriu;

F ultrafiltru $\Longleftrightarrow$ F^+ ideal boolean maximal

I ideal boolean maximal $\Longleftrightarrow$ I_+ ultrafiltru.

57. Dacă I este un ideal boolean al lui B, atunci relaţia binară $\sim_I$:

$$x\sim y \Longleftrightarrow x + y\in I$$

este o congruenţă a lui B. Să se arate că mulţimea idealelor booleene ale lui B este în corespondenţă bijectivă cu mulţimea congruenţelor sale.

58. In condiţiile exerciţiului precedent, să se arate că $B/\sim_I$ este o algebră Boole izomorfă cu $B/_{I_+}$.

Notă. Algebra Boole $B/\sim_I$ se notează $B/_I$ şi se numeşte *algebra Boole cît a lui B prin idealul boolean I*.

59. Dacă F este un filtru al algebrei Boole B, atunci $B/_F$ şi $B/_{F^+}$ sînt izomorfe.

6o. Să se caracterizeze idealele proprii maximale ale unei algebre Boole.

CAPITOLUL 3

Sistemul formal al calculului propoziţional

Scopul acestui capitol este de-a descrie în detaliu sistemul formal al calculului propoziţional. Acest sistem formal este cel mai simplu sistem formal şi pe el se bazează toate celelalte sisteme formale (care sînt fundamentate de o logică bivalentă).

Paragraful 1 se ocupă cu prezentarea sintaxei acestui sistem formal: simboluri primitive, enunţuri, teoreme formale,etc,iar în paragraful 2 sînt prezentate o serie de teoreme formale ale sistemului. Paragraful 3 studiază semantica sistemului formal al calculului propoziţional, conţinînd cel mai important rezultat al capitolului: teorema de completitudine a lui Gödel.

Proprietăţile conectorilor auxiliari $\vee, \wedge \leftrightarrow$ sînt date în § 4. Paragraful 5 va preciza un adevăr intrat în folclorul ştiinţei: algebrele Boole sînt reflectarea algebrică a calculului propoziţional.

§ 1. PREZENTAREA SISTEMULUI FORMAL AL CALCULULUI PROPOZITIONAL

Alfabetul sistemului formal al calculului propoziţional, adică lista de simboluri primitive ce o vom utiliza, cuprinde următoarele elemente:

1). O mulţime infinită V de variabile propoziţionale, notate u, v, w,...(eventual cu indici sau cu accente).

2). Simbolurile logice (conectori):

$\neg$: numit simbolul de negaţie (va fi citit: non)

$\rightarrow$: numit simbolul de implicaţie (va fi citit:implică)

3). <u>Parantezele</u> (,), [,]

Cu ajutorul acestor simboluri, vom construi <u>cuvinte</u> sau <u>asamblaje</u>. Prin definiţie, un <u>cuvînt</u> este un şir finit de simboluri ale alfabetului dat mai sus, scrise unul după altul.

<u>Exemplu</u>: $u \to uv\neg)$

$u \to \neg v$

Din mulţimea cuvintelor, le vom selecta pe acelea care „au sens", noţiune precizată astfel:

Se numeşte <u>enunţ</u> orice cuvînt φ care verifică una din condiţiile următoare:

(i) φ este o variabilă propoziţională.

(ii) Există un enunţ Ψ, astfel încît $\varphi = \neg\Psi$.

(iii) Există enunţurile Ψ, θ, astfel încît $\varphi = (\Psi \to \theta)$.

<u>OBSERVATIE</u>: Definiţia conceptului de enunţ este dată „din aproape în aproape", trecîndu-se de la un pas la următorul exact ca în cazul inducţiei. Se poate demonstra că într-adevăr aceasta este o definiţie <u>prin inducţie</u>, dar nu insistăm asupra acestui lucru.

Deci variabilele propoziţionale sînt enunţuri, pe care le vom numi <u>enunţuri elementare</u>. Vom nota cu E mulţimea tuturor enunţurilor.

Pentru orice enunţuri φ, Ψ introduce următoarele prescurtări:

$\varphi \vee \Psi = \neg\varphi \to \Psi$ (<u>disjuncţia</u> lui φ şi Ψ)

$\varphi \wedge \Psi = \neg(\varphi \to \neg\Psi)$ (<u>conjuncţia</u> lui φ şi Ψ)

$\varphi \leftrightarrow \Psi = (\varphi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \varphi)$ (<u>echivalenţa logică</u> a lui φ şi Ψ)

<u>OBSERVATIE</u>: În prezentarea sistemului formal al calculului propoziţional, am considerat negaţia şi implicaţia drept conectori primitivi, ceilalţi conectori fiind definiţi cu ajutorul lor. Există alte construcţii ale sistemului formal al calculului propoziţional (echivalente cu cea din acest curs) în care sînt luaţi alţi conectori primitivi.

În cele ce urmează vom detaşa din mulţimea enunţurilor o submulţime a sa care va constitui mulţimea „adevărurilor sintactice" ale sistemului formal prezentat.

O <u>axiomă</u> a sistemului formal al calculului propoziţional este un enunţ care are una din următoarele forme:

(A 1) $\varphi \to (\Psi \to \varphi)$

(A 2) $[\varphi \to (\Psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \Psi) \to (\varphi \to \chi)]$

(A 3) $(\neg\varphi \to \neg\Psi) \to (\Psi \to \varphi)$

unde φ, Ψ şi χ sînt enunţuri arbitrare.

O <u>teoremă</u> a sistemului formal al calculului propoziţional este un enunţ φ care verifică una din condiţiile următoare:

(T 1) φ este o axiomă.

(T 2) Există un enunţ Ψ, astfel încît Ψ şi $\Psi \to \varphi$ sînt teoreme.

Proprietatea (T2) se mai scrie prescurtat

$$\frac{\Psi, \Psi \to \varphi}{\varphi}$$

şi se numeşte regula de deducţie „<u>modus ponens</u>" (m.p.)

Vom nota cu T mulţimea teoremelor, iar faptul că φ este o teoremă cu $\vdash \varphi$.

Prin <u>demonstraţie</u> formală a unui enunţ φ vom înţelege un şir finit $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, de enunţuri astfel încît $\Psi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \leq i \leq n$ se verifică una din condiţiile următoare:

(1) Ψ_i este o axiomă.

(2) Există k, $j < i$, astfel încît $\Psi_k = \Psi_j \to \Psi_i$.

Se observă că $\vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există o demonstraţie formală $\psi_1, \dots, \psi_m$ a lui φ.

m se numeşte <u>lungimea</u> demonstraţiei. O teoremă poate avea demonstraţii de lungimi diferite.

Fie Γ o mulţime de enunţuri şi φ un enunţ. Vom spune că <u>enunţul φ este dedus din ipotezele Γ</u> dacă una din condiţiile următoare este verificată:

(D 1) φ este o axiomă.

(D 2) $\varphi \in \Gamma$.

(D 3) Există un enunţ ψ, astfel încît enunţurile ψ şi $(\psi \to \varphi)$ sînt deduse din ipotezele Γ. D 3 se numeşte tot regula <u>modus ponens</u> (m.p.).

Dacă φ este dedus din ipotezele Γ, vom scrie $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>OBSERVAŢIE</u>

(i) $\emptyset \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi$.

(ii) Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

Cu aceasta, descrierea sistemului formal al calculului propoziţional este terminată. Vom nota cu L acest sistem formal. Observăm că, la nivelul prezentat aici, enunţurile şi teoremele sînt numai nişte <u>şiruri de simboluri</u>.

§ 2. <u>PROPRIETĂŢI SINTACTICE ALE SISTEMULUI FORMAL L AL CALCULULUI PROPOZIŢIONAL</u>

Prin proprietăţile sintactice ale lui L le vom înţelege pe acelea ce se referă la enunţurile lui L ca simple şiruri de simboluri ale alfabetului prezentat în § 1, făcîndu-se abstracţie de orice interpretare a lor.

<u>PROPOZIŢIA 1.</u> Fie $\Gamma, \Delta \subset E$ şi $\varphi, \psi \in E$. Atunci avem

(i) Dacă $\Delta \subset \Gamma$, $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci există $\Sigma \subset \Gamma$ finită, astfel încît $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \chi$, pentru orice $\chi \in \Delta$ şi $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>Demonstraţie</u>: (i) Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci este verificată una din condiţiile (D 1) - (D 3) din § 1.

Le vom lua pe rînd:

- dacă φ este axiomă, atunci avem evident $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă $\varphi \in \Delta$, atunci $\varphi \in \Gamma$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă ~~ψ, $(\psi \to \varphi) \in \Delta$~~, atunci ψ, $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Delta \vdash \psi$, $\Delta \vdash (\psi \to \varphi)$

(ii) Demonstrăm această proprietate din aproape în aproape:

- dacă φ este axiomă, atunci $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \subset \Gamma$ este finită.
- dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci luăm $\Sigma = \{\varphi\}$ şi este evident că $\Sigma \vdash \varphi$.
- presupunînd că $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash (\psi \to \varphi)$ şi că există Σ_1, $\Sigma_2 \subset \Gamma$ finite astfel încît $\Sigma_1 \vdash \psi$, $\Sigma_2 \vdash (\psi \to \varphi)$, atunci luăm $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Gamma$; Σ este finită şi $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash (\psi \to \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Considerăm şi aici toate cazurile:

- dacă φ este o axiomă, atunci este evident că $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă $\varphi \in \Delta$, este clar că $\Gamma \vdash \varphi$, prin ipoteză.
- presupunînd că $\Delta \vdash \psi$. $\Delta \vdash (\psi \to \varphi)$, deci pentru $\psi, \psi \to \varphi$ s-a verificat că $\Gamma \vdash \psi$, $\Gamma \vdash (\psi \to \varphi)$; atunci avem $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>PROPOZIŢIA 2.</u> Pentru orice enunţ φ, avem

$$\vdash (\varphi \to \varphi)$$

<u>Demonstraţie</u>. Următoarea listă de enunţuri este o demonstraţie formală a lui $\vdash \varphi \to \varphi$, în partea dreaptă indicînd argumentarea:

(1)	$[\varphi \to [(\varphi \to \varphi) \to \varphi]] \to [[\varphi \to (\varphi \to \varphi)] \to (\varphi \to \varphi)]$	A 2.
(2)	$\varphi \to [(\varphi \to \varphi) \to \varphi]$	A 1.
(3)	$[\varphi \to (\varphi \to \varphi)] \to (\varphi \to \varphi)$	(1),(2), m.p.

(4) $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ A 1.

(5) $\varphi \to \varphi$ (3),(4), m.p.

<u>PROPOZITIA 3</u>. Fie Γ o mulţime de enunţuri şi $\varphi \in E$. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există un şir finit de enunţuri $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ astfel încît $\Psi_m = \varphi$ şi pentru orice $i \leq m$ este verificată una din condiţiile următoare:

(i) Ψ_i este o axiomă.

(ii) $\Psi_i \in \Gamma$.

(iii) Există $j, k < i$, astfel încît $\Psi_k = \Psi_j \to \Psi_i$.

<u>Demonstraţie</u>: Această condiţie este o retranscriere evidentă a definiţiei lui $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>OBSERVATIE</u>: Vom spune că şirul $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ este o <u>demonstraţie formală din ipotezele Γ</u> sau <u>Γ - demonstraţie</u>.

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de <u>teorema deducţiei</u>:

<u>PROPOZITIA 4</u>. Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \Psi$, atunci $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$

<u>Demonstraţie</u>: Prin inducţie asupra lui m vom arăta că pentru orice $m \in N$ diferit de o, dacă $\chi_1, \ldots, \chi_m$ este o $\Gamma \cup \{\varphi\}$-demonstraţie a lui Ψ, atunci $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$.

Presupunem afirmaţie adevărată pentru orice $n < m$ şi vom considera cazul cînd $\chi_1, \ldots, \chi_m$ este o $\Gamma \cup \{\varphi\}$- demonstraţie a lui Ψ.

Trebuie să luăm în considerare următoarele patru cazuri:

<u>Cazul 1</u>: Ψ este o axiomă.

Cum $\vdash \Psi$ şi $\vdash \Psi \to (\varphi \to \Psi)$ conform A_1, atunci aplicînd modus ponens rezultă $\vdash (\varphi \to \Psi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$.

<u>Cazul 2</u>: $\Psi \in \Gamma$.

Conform A_1, putem scrie $\Gamma \vdash [\Psi \to (\varphi \to \Psi)]$. Cum $\Psi \in \Gamma$, avem $\Gamma \vdash \Psi$, deci aplicînd m.p. rezultă $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$.

<u>Cazul 3</u>: $\Psi = \varphi$

Conform propoziţiei precedente, $\vdash (\varphi \to \varphi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi)$

<u>Cazul 4</u>: Există $j, k < m$, astfel încît $\chi_k = \chi_j \to \Psi$. Prin ipoteza inducţiei rezultă $\Gamma \vdash (\varphi \to \chi_k)$ şi $\Gamma \vdash (\varphi \to \chi_j)$, deci există următoarele Γ - demonstraţii:

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \varphi \to \chi_k$
$\beta_1, \ldots, \beta_s, \varphi \to \chi_j$

Atunci avem următoarea Γ - demonstraţie a lui $\varphi \to \Psi$:

α_1

$\vdots$

α_r

$\varphi \to \chi_k$

β_1

$\vdots$

β_s

$\varphi \to \chi_j$

$[\varphi \to (\chi_j \to \Psi)] \to [(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \Psi)]$ A_2

$(\varphi \to \chi_j) \to (\varphi \to \Psi)$ m.p. $\chi_k = \chi_j \to \Psi$

$\varphi \to \Psi$ m.p.

<u>OBSERVATIE</u>. Teorema de deducţie este formalizarea unui procedeu folosit adeseori în raţionamentele matematice. Atunci cînd vrem să stabilim $\varphi \Rightarrow \Psi$ în anumite condiţii matematice Γ, întîi adăugăm pe φ de la condiţiile Γ şi apoi deducem pe Ψ.

<u>PROPOZITIA 5</u>. $\vdash (\varphi \to \Psi) \to [(\Psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$

<u>Demonstraţie</u>: Vom aplica succesiv m.p. şi apoi teorema deducţiei:

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$$
$$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$$
$$\vdash (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$$

<u>PROPOZITIA 6.</u> $\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\psi \to (\varphi \to \chi)]$

<u>Demonstraţie</u>: Aplicăm m.p. şi teorema deducţiei:

$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to \chi$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi$$
$$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \chi$$
$$\{\psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to \chi$$
$$\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$$
$$\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\psi \to (\varphi \to \chi)]$$

<u>PROPOZITIA 7.</u> $\vdash \varphi \to (\neg \varphi \to \psi)$

<u>Demonstraţie</u>

$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \neg \varphi \to (\neg \psi \to \neg \varphi) \qquad \text{A.1}$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \neg \varphi$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \neg \psi \to \neg \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash (\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi) \qquad \text{A.3}$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \varphi \to \psi \qquad \text{m.p.}$$

$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \varphi$$
$$\{\varphi, \neg \varphi\} \vdash \psi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\varphi\} \vdash \neg \varphi \to \psi \qquad \text{teorema deducţiei}$$
$$\vdash \varphi \to (\neg \varphi \to \psi) \qquad \text{teorema deducţiei}$$

<u>PROPOZITIA 8.</u> $\vdash \neg \varphi \to (\varphi \to \psi)$

<u>Demonstraţie</u>: Aplicînd Propoziţia 6, avem:

$$\vdash [\varphi \to (\neg \varphi \to \psi)] \to [\neg \varphi \to (\varphi \to \psi)]$$

Aplicînd Propoziţia 7 şi m.p., rezultă

$$\vdash \neg \varphi \to (\varphi \to \psi)$$

<u>Exerciţiu</u>: Să se demonstreze Propoziţia 8 în maniera Propoziţiei 7, folosind teorema deducţiei.

<u>PROPOZITIA 9.</u> $\vdash \neg\neg \varphi \to \varphi$

<u>Demonstraţie</u>:

$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \to (\neg\neg\neg\neg \varphi \to \neg\neg \varphi) \qquad \text{A 1}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg\neg\neg \varphi \to \neg\neg \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\neg \varphi \to \neg\neg \varphi) \to (\neg \varphi \to \neg\neg\neg \varphi) \qquad \text{A 3}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg \varphi \to \neg\neg\neg \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash (\neg \varphi \to \neg\neg\neg \varphi) \to (\neg\neg \varphi \to \varphi) \qquad \text{A 3}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \to \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi$$
$$\{\neg\neg \varphi\} \vdash \varphi \qquad \text{m.p.}$$
$$\vdash \neg\neg \varphi \to \varphi \qquad \text{teorema deducţiei}$$

<u>PROPOZITIA 10.</u> $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg \psi \to \neg \varphi)$

<u>Demonstraţie</u>:

$$\{\varphi \to \psi, \neg \psi, \neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \to \varphi \qquad \text{(Propoziţia 9)}$$
$$\{\varphi \to \psi, \neg \psi, \neg\neg \varphi\} \vdash \neg\neg \varphi \ .$$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$ ~~m.p.~~

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$ (Propoziţia 8)

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi \to \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ A 3

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$

$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

PROPOZITIA 11. $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

Demonstraţie

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ (Propoziţia 9)

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi$

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$

$\{\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$ A.3

$\{\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ m.p.

$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

PROPOZITIA 12. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Demonstraţie:

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Propoziţia 9)

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\varphi$

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$ Propoziţia 7

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash [\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)] \to [(\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi]$ A 3

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi)$ (Propoziţia 2)

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

PROPOZITIA 13. $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$

Demonstraţie:

$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ teorema deducţiei

$\{\varphi\} \vdash [(\varphi \to \psi) \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)]$ Propoziţia 10.

$\{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$ m.p.

$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ teorema deducţiei

§ 3. INTERPRETARI

Acest paragraf este contrapartea semantică a celor prezentate în paragrafele precedente ale acestui capitol.

Se numeşte interpretare a sistemului formal al calculului propoziţional orice funcţie

$$f: V \to L_2,$$

unde L_2 este algebră Boole $\{o,1\}$.

PROPOZIȚIA 1. Pentru orice interpretare $f: V \longrightarrow L_2$ a lui L, există o funcție unică

$$\tilde{f}: E \longrightarrow L_2$$

care are proprietățile următoare:

(a) $\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$.

(b) $\tilde{f}(\neg\varphi) = 1$ dacă și numai dacă $\tilde{f}(\varphi) = o$.

(c) $\tilde{f}(\varphi \to \psi) = o$ dacă și numai dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$ și $\tilde{f}(\psi) = o$.

Demonstrație: Unicitatea. Presupunem că există două funcții $g,h: E \longrightarrow L_2$ care verifică proprietățile (a) - (c). Vom arăta că $g(\varphi) = h(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$. Distingem trei cazuri, relativ la modul de formare al enunțurilor:

φ este enunț elementar. Conform (a), avem:

$$g(\varphi) = f(\varphi) = h(\varphi).$$

φ este de forma $\neg\psi$ și presupunem $g(\psi) = h(\psi)$. Conform (b), avem:

$$\begin{aligned} g(\varphi) = 1 &\Longrightarrow g(\psi) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\psi) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

Este evident că de aici rezultă: $g(\varphi) = o \Longleftrightarrow h(\varphi) = o$. Așadar

$$g(\varphi) = h(\varphi)$$

φ este forma $\psi_1 \longrightarrow \psi_2$ și presupunem că $g(\psi_1) = h(\psi_1)$ și $g(\psi_2) = h(\psi_2)$.

---

1).De acum înainte, semnul $\Longleftrightarrow$ va fi prescurtarea lui „dacă și numai dacă" din limba română. Atragem atenția a nu fi confundat cu simbolul $\longrightarrow$ care aparține lui L, pe cînd $\Longleftrightarrow$ este un semn în afara lui L.

Conform (c), rezultă

$$\begin{aligned} g(\varphi) = o &\Longleftrightarrow g(\psi_1 \longrightarrow \psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow g(\psi_1) = 1 \text{ și } g(\psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\psi_1) = 1 \text{ și } h(\psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\psi_1 \longrightarrow \psi_2) = o \\ &\Longleftrightarrow h(\varphi) = o \end{aligned}$$

De aici rezultă: $g(\varphi) = 1 \Longleftrightarrow h(\varphi) = 1$, deci $g(\varphi) = h(\varphi)$.

OBSERVAȚIE: Unicitatea a fost demonstrată prin inducție, urmărindu-se modul de formare a enunțurilor lui L.

Existența. Definim pe $\tilde{f}$ prin inducție:

$\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$.

Presupunînd că $\tilde{f}(\varphi)$ este definit, vom pune

$$\tilde{f}(\neg\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = o \\ o, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = 1. \end{cases}$$

Presupunem că $\tilde{f}(\varphi)$, $\tilde{f}(\psi)$ sînt definite. Vom pune atunci

$$\tilde{f}(\varphi \to \psi) = \begin{cases} o, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = 1 \text{ și } \tilde{f}(\psi) = o \\ 1, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

In acest fel, funcția $\tilde{f}$ a fost definită pe toată mulțimea E. Este evident ca f verifică proprietățile (a) - (c), definiția sa fiind sugerată chiar de ele. Cu aceasta, demonstrația este terminată.

OBSERVAȚIE: Definiția lui $\tilde{f}$ poate fi dată și astfel:

$\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$

$\tilde{f}(\neg\varphi) = \neg\tilde{f}(\varphi) \in L_2$

$\tilde{f}(\varphi \to \psi) = \tilde{f}(\varphi) \to \tilde{f}(\psi) \in L_2$.

Atragem atenția că avem aici aceeași notație pentru două lucruri distincte. In timp ce $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ sînt enunțuri ale lui L, semnele $\neg$, $\rightarrow$ din dreapta semnifică negaţia şi implicaţia din algebra Boole L_2.

Deoarece vom vedea că există o anumită corespondenţă între algebrele Boole şi sistemul formal al calculului propoziţional, nu introducem notaţii separate.

Pentru orice enunţ φ, vom spune că $\tilde{f}(\varphi)$ este <u>interpretarea lui φ relativ la</u> f.

Spunem că enunţul φ este <u>adevărat în interpretarea f</u>: $V \rightarrow L_2$, dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$. Enunţul φ este <u>fals în interpretarea f</u> dacă $\tilde{f}(\varphi) = 0$.

Un enunţ φ este <u>universal adevărat</u> sau o <u>tautologie</u> dacă el este adevărat în orice interpretare. Vom nota aceasta prin $\models \varphi$.

<u>OBSERVAŢIE</u>. Interpretarea unui enunţ este valoarea 0 sau 1 obţinută atunci cînd tuturor enunţurilor elementare ce intră în componenţa lui φ le atribuim anumite valori din $\{0,1\}$. Un enunţ universal adevărat va avea valoarea 1 pentru orice valori luate de enunţurile elementare ce intră în componenţa sa.

Prin <u>proprietate semantică</u> a lui L vom înţelege orice proprietate legată de interpretările lui L.

Observăm că pînă acum am definit două tipuri de „adevăruri" relativ la sistemul formal al calculului propoziţional: <u>teoremele</u>, care sînt <u>„adevărurile sintactice"</u> ale lui L şi <u>tautologiile</u>, care sînt <u>„adevărurile semantice"</u> ale lui L. In mod natural se pune problema comparării celor două tipuri de „adevăruri". Teorema de completitudine, care este rezultatul fundamental al acestui paragraf, va arăta coincidenţa lor.

Vom spune că o interpretare f: $V \rightarrow L_2$ este un <u>model</u> al unei mulţimi de enunţuri Γ, dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$.

Notăm prin $\Gamma \models \varphi$ proprietatea că $\tilde{f}(\varphi) = 1$, pentru orice model f al lui Γ. In cazul cînd $\Gamma = \emptyset$, prin $\emptyset \models \varphi$ vom înţelege că $\models \varphi$.

<u>PROPOZITIA 2.</u> Dacă $\vdash \varphi$, atunci avem $\models \varphi$.

<u>Demonstraţie</u>. Presupunem că φ este o teoremă a lui L. Va trebui să arătăm că pentru orice interpretare h: $V \rightarrow L_2$, avem $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Vom considera întîi cazul axiomelor.

A 1: φ este de forma $\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$

Atunci avem

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi) &= \tilde{h}(\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \\ &= \tilde{h}(\psi) \rightarrow [\tilde{h}(\chi) \rightarrow \tilde{h}(\psi)] \\ &= \neg\tilde{h}(\psi) \vee \neg\tilde{h}(\chi) \vee \tilde{h}(\psi) = 1.\end{aligned}$$

<u>A 2:</u> φ este de forma $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$

Cum $\tilde{h}(\varphi) = [\tilde{h}(\alpha) \rightarrow [\tilde{h}(\beta) \rightarrow \tilde{h}(\gamma)]] \rightarrow [[\tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\beta)] \rightarrow [\tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\gamma)]]$, este suficient să arătăm că pentru orice x, y, $z \in L_2$, avem

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = 1$$

Intr-adevăr, avem:

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee$$
$$\vee [\neg(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee \neg(\neg x \vee y) \vee \neg x \vee z$$

Dar

$$\begin{aligned}\neg(\neg x \vee y) \vee \neg x \vee z &= (x \wedge \neg y) \vee \neg x \vee z = \\ &= (x \vee \neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg x \vee z) \\ &= \neg y \vee \neg x \vee z,\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee (\neg x \vee \neg y \vee z) = 1$$

<u>A 3:</u> φ este forma $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

La fel ca mai sus, este suficient să arătăm că

$$(\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1,$$

pentru orice x, $y \in L_2$. Această egalitate se obţine astfel:

$$(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = \neg(\neg x \to \neg y) \vee (y \to x)$$
$$= \neg(x \vee \neg y) \vee \neg y \vee x$$
$$= (\neg x \wedge y) \vee \neg y \vee x$$
$$= (\neg x \vee \neg y \vee x) \wedge (y \vee \neg y \vee x)$$
$$= 1 \wedge 1 = 1.$$

Presupunem acum că φ a fost obținută prin modus ponens din $\vdash \psi, \vdash \psi \to \varphi$ și că $\tilde{h}(\psi) = 1$, $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$. Va trebui să arătăm că $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Din relațiile

$$\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \neg\tilde{h}(\psi) \vee \tilde{h}(\varphi) = 1$$
$$\tilde{h}(\psi) = 1$$

rezultă $\neg 1 \vee \tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

<u>OBSERVAȚIE</u>: Teorema de mai sus s-a demonstrat prin inducție în raport cu lungimea demonstrațiilor formale ale teoremelor lui L.

<u>Corolar</u>. Nu există nici un enunț φ al lui L, astfel încît $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$.

<u>Demonstrație</u>: Presupunem că există $\varphi \in E$, astfel încît $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$. Atunci, avem

$$\tilde{h}(\varphi) = 1 \text{ și } \tilde{h}(\neg\varphi) = 1,$$

pentru orice interpretare $h: V \to L_2$.

Contradicția este evidentă: din $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$, rezultă $\neg\tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 0$.

<u>OBSERVAȚIE</u>: Acest corolar exprimă faptul că sistemul formal al calculului propozițional este <u>necontradictoriu.</u>

<u>PROPOZIȚIA 3</u>. Fie $\Gamma \subset E$ și $\varphi \in E$. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.

Demonstrația acestei propoziții este cu totul analoagă cu aceea a propoziției precedente.

Fie Γ o mulțime de enunțuri. Vom spune că Γ este <u>consistentă</u> dacă există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \nvdash \varphi$ (φ nu se deduce din ipotezele Γ). Γ este <u>inconsistentă</u> dacă nu este consistentă.

<u>PROPOZIȚIA 4.</u> Pentru orice $\Gamma \subset E$, următoarele afirmații sînt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$.

(iii) Există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

<u>Demonstrație</u>. Implicațiile (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sînt evidente:

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>. Presupunem că există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$. Fie ψ un enunț oarecare. Conform A 1, avem

$$\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi) \to [\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)]$$

Dar $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi)$, deci aplicînd modus ponens rezultă :

$$\Gamma \vdash \neg\psi \to (\varphi \to \varphi)$$

Conform Propoziției 10, § 2,

$$\Gamma \vdash [\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)] \to [\neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi]$$

de unde rezultă, prin modus ponens :

$$\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi$$

Aplicînd ipoteza $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ și modus ponens, rezultă $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$.

Conform Propoziției 11, § 2, avem $\Gamma \vdash \neg\neg\psi \to \psi$, deci $\Gamma \vdash \psi$. Am arătat că $\Gamma \vdash \psi$, pentru orice $\psi \in E$.

<u>PROPOZIȚIA 5</u>. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă $\Longleftrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inc. $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\neg\varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$

<u>Demonstrație</u>: $\Longrightarrow$: Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, atunci $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, deci prin teorema deducției avem $\Gamma \vdash \varphi \to \neg\varphi$. Aplicînd Propoziția 12, § 2 și modus ponens, rezultă $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

$\Longleftarrow$: Cum $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ și $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, aplicînd de două ori modus ponens relației din Propoziția 7, § 2:

$$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$$

rezultă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, pentru orice $\psi \in E$.

<u>PROPOZIȚIA 6</u>: $\emptyset$ este consistentă.

<u>Demonstrație</u>: Presupunînd că $\emptyset$ este inconsistentă, ar rezulta $\emptyset \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$, deci $\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$. Dar este știut că $\vdash (\varphi \to \varphi)$, conform Propoziției 2, § 2. Conform corolarului Propoziției 2, contradicția este evidentă.

O mulțime consistentă $\Gamma \subset E$ este maximal consistentă dacă pentru orice $\Sigma \subset E$ consistentă avem

$$\Gamma \subset \Sigma \Rightarrow \Gamma = \Sigma.$$

<u>PROPOZIȚIA 7</u>. Pentru orice mulțime consistentă $\Gamma \subset E$, există o mulțime maximal consistentă $\Delta \subset E$ astfel încît $\Gamma \subset \Delta$.

<u>Demonstrație</u>: Fie

$$\mathcal{A} = \{\Sigma \subset E \mid \Sigma \text{ consistentă}, \Gamma \subset \Sigma\}.$$

Vom arăta că $(\mathcal{A}, \subset)$ este inductiv ordonată.

Fie $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ o submulțime a lui $\mathcal{A}$ total ordonată: pentru orice $i, j \in I$, avem $\Sigma_i \subset \Sigma_j$ sau $\Sigma_j \subset \Sigma_i$. Vom arăta că $\Sigma_0 = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$ este un majorant al familiei total ordonate $(\Sigma_i)_{i \in I}$. Observăm întîi că $\Gamma \subset \Sigma_0$.

Presupunem prin absurd că Σ_0 ar fi inconsistentă, deci există $\varphi \in E$, astfel încît $\Sigma_0 \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$. Aplicînd Propoziția 1, (ii), § 1, există o submulțime finită $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ a lui Σ_0, astfel încît

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi).$$

Vom presupune că $\psi_1 \in \Sigma_{i_1}, \ldots, \psi_n \in \Sigma_{i_n}$, cu $i_1, \ldots, i_n \in I$. Cum $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ este total ordonată, există $i_k \in \{i_1, \ldots, i_n\}$, astfel încît

$$\Sigma_{i_j} \subset \Sigma_{i_k}, \text{ pentru orice } j = 1, \ldots, n.$$

Atunci $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subset \Sigma_{i_k}$, deci conform Propoziției 1, (i), § 1, rezultă

$$\Sigma_{i_k} \vdash \neg(\varphi \to \varphi).$$

Deci, conform Propoziției 4, Σ_{i_k} este inconsistentă, ceea ce contrazice ipoteza că $\Sigma_{i_k} \in \mathcal{A}$. Rezultă că Σ_0 este consistentă, deci $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$.

Este evident că

$$\Sigma_i \subset \Sigma_0, \text{ pentru orice } i \in I,$$

deci Σ_0 este un majorant al lui $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$, ceea ce arată că $(\mathcal{A}, \subset)$ este inductiv ordonată.

Aplicînd axioma lui Zorn rezultă existența unui element maximal al lui $(\mathcal{A}, \subset)$, deci a unei mulțimi maximal consistente Δ astfel încît $\Gamma \subset \Delta$.

<u>PROPOZIȚIA 8</u>. (<u>teorema de completitudine</u>). Pentru orice enunț $\varphi \in E$, avem

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi.$$

<u>Demonstrație</u>: Implicația $\Rightarrow$ este Propoziția 2.

Presupunem acum că $\models \varphi$. Dacă $\nvdash \varphi$, atunci avem $\nvdash \neg\neg\varphi$. Intr-adevăr, dacă $\vdash \neg\neg\varphi$, atunci din $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ prin aplicarea lui modus ponens ar rezulta $\vdash \varphi$.

Relația $\nvdash \neg\neg\varphi$ este tot una cu $\emptyset \nvdash \neg\neg\varphi$. Aplicînd Propoziția 5, rezultă că $\emptyset \cup \{\neg\varphi\} = \{\neg\varphi\}$ este o mulțime consistentă.

Atunci, conform Propoziției 7, avem o mulțime maximal consistentă Δ, astfel încît $\{\neg\varphi\} \subset \Delta$, deci $\neg\varphi \in \Delta$.

Definim acum o interpretare $h: V \to L_2$ prin

$$h(v) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } v \in \Delta \\ 0, \text{ dacă } \neg v \in \Delta \end{cases}$$

pentru orice $v \in V$. Vom arăta că pentru orice $\Psi \in E$, avem:

(1) $\tilde{h}(\Psi) = 1 \iff \Psi \in \Delta$.

Pentru aceasta, este necesar să stabilim următoarele proprietăţi ale lui Δ:

(2) $\Delta \vdash \Psi \Rightarrow \Psi \in \Delta$, pentru orice $\Psi \in E$.

(3) Pentru orice $\Psi \in E$, avem $\Psi \in \Delta$ sau $\neg \Psi \in \Delta$.

(4) Pentru orice $\Psi, \chi \in E$, avem:

$$(\Psi \to \chi) \in \Delta \iff \neg \Psi \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta$$

Pentru a demonstra (2), propunem prin absurd că $\Delta \vdash \Psi$ şi $\Psi \notin \Delta$, deci

$$\Delta \subsetneq \Delta \cup \{\Psi\}.$$

Avînd în vedere că Δ este o mulţime maximal consistentă, rezultă că $\Delta \cup \{\Psi\}$ este inconsistentă. Conform Propoziţiei 5, obţinem $\Delta \vdash \neg \Psi$.

Din Propoziţia 7, § 2, rezultă că pentru orice $\chi \in E$, avem

$$\Delta \vdash \Psi \to (\neg \Psi \to \chi)$$

Ţinînd seama de $\Delta \vdash \Psi$, $\Delta \vdash \neg \Psi$ şi aplicînd de două ori modus ponens rezultă $\Delta \vdash \chi$, pentru orice $\chi \in E$, deci Δ ar fi inconsistentă. Contradicţia este evidentă, deci $\Psi \in \Delta$. Cu aceasta, (2) a fost demonstrată.

Fie acum $\Psi \in E$, astfel încît $\Psi \notin \Delta$, deci $\Delta \cup \{\Psi\}$ este inconsistentă, din cauza faptului că Δ este maximal consistentă. Conform Propoziţiei 5, avem $\Delta \vdash \neg \Psi$, deci din (2) rezultă $\neg \Psi \in \Delta$. Am stabilit şi proprietatea (3).

Să probăm implicaţia $\Rightarrow$ din (4). Fie $(\Psi \to \chi) \in \Delta$ şi presupunem prin absurd că $\neg \Psi \notin \Delta$ şi $\chi \notin \Delta$. Conform (3), de aici obţinem că $\Psi \in \Delta$ şi $\neg \chi \in \Delta$. Propoziţia 13, § 2 ne spune că

$$\Delta \vdash \Psi \to [\neg \chi \to \neg (\Psi \to \chi)]$$

Din $\Psi \in \Delta$ şi $\neg \chi \in \Delta$ deducem $\Delta \vdash \Psi$ şi $\Delta \vdash \neg \chi$, de unde deducem aplicînd de două ori modus ponens relaţiei precedente că $\Delta \vdash \neg (\Psi \to \chi)$. Din această relaţie şi din $(\Psi \to \chi) \in \Delta$ (deci $\Delta \vdash \Psi \to \chi$), la fel ca în demonstraţia proprietăţii (2) se deduce că Δ este inconsistent, ceea ce este o contradicţie. Rezultă $\neg \Psi \in \Delta$ sau $\chi \in \Delta$.

Pentru implicaţia $\Leftarrow$, presupunem $\neg \Psi \in \Delta$ deci $\Delta \vdash \neg \Psi$. Conform Propoziţiei 8, § 2 avem

$$\Delta \vdash \neg \Psi \to (\Psi \to \chi)$$

deci aplicînd modus ponens rezultă $\Delta \vdash (\Psi \to \chi)$, ceea ce ne dă $(\Psi \to \chi) \in \Delta$ (vezi (2)).

Dacă $\chi \in \Delta$, atunci $\Delta \vdash \chi$. Aplicînd modus ponens pentru

$$\Delta \vdash \chi \to (\Psi \to \chi) \qquad \text{A 1}$$

rezultă $\Delta \vdash (\Psi \to \chi)$, deci $(\Psi \to \chi) \in \Delta$, conform (2).

Cu aceasta şi (4) a fost demonstrată. Vom stabili acum relaţia (1) prin inducţie:

(a) Dacă Ψ este o variabilă propoziţională $v \in V$, atunci avem

$$\tilde{h}(v) = h(v) = 1 \iff v \in \Delta.$$

prin definiţia lui h.

(b) Dacă $\Psi = \neg \Psi'$ şi pentru Ψ' presupunem (1) adevărată, atunci avem:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\Psi) = 1 &\iff \tilde{h}(\neg \Psi') = 1 \\ &\iff \tilde{h}(\Psi') = 0 && \text{(definiţia lui } \tilde{h}) \\ &\iff \Psi' \notin \Delta && \text{(ipoteza inducţiei)} \\ &\iff \neg \Psi' \in \Delta && (3) \\ &\iff \Psi \in \Delta \end{aligned}$$

(c) Dacă $\psi = \psi' \to \chi$ şi pentru ψ', χ presupunem (1) adevărată, atunci avem:

$$\tilde{h}(\psi) = 1 \iff \tilde{h}(\psi' \to \chi) = 1$$

$$\iff \tilde{h}(\psi') = 0 \text{ sau } \tilde{h}(\chi) = 1 \qquad \text{(definiţia lui } \tilde{h})$$

$$\iff \tilde{h}(\psi') \neq 1 \text{ sau } \tilde{h}(\chi) = 1$$

$$\iff \psi' \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta \qquad \text{(ipoteza inducţiei)}$$

$$\iff \neg\psi' \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta \qquad (3)$$

$$\iff (\psi' \to \chi) \in \Delta \qquad (4)$$

$$\iff \psi \in \Delta$$

Deci interpretarea h verifică (1).

La începutul demonstraţiei am stabilit că $\neg\varphi \in \Delta$, deci conform (1) rezultă $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) = 0$.

Dar $\models \varphi$ înseamnă că $\tilde{h}(\varphi)$, deci am obţinut o contradicţie, ceea ce face să avem $\vdash \varphi$.

In acest fel, teorema de completitudine a fost demonstrată complet.

OBSERVAŢII: (i) In demonstraţia de mai sus s-a folosit aproape implicit următoarea proprietate: pentru orice mulţime consistentă Γ şi pentru orice $\varphi \in E$, nu putem avea simultan $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Intr-adevăr, presupunînd $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \neg\varphi$, atunci pentru orice $\psi \in E$, din

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi) \qquad \text{(Propoziţia 7, § 2)}$$

se poate deduce aplicînd de două ori modus ponens că $\Gamma \vdash \psi$, ceea ce contrazice faptul că Γ este consistent.

Această observaţie mai poate fi dedusă şi din Propoziţia 3.

(ii) Semnificaţia acestei teoreme este cu totul deosebită; ea identifică teoremele formale ale sistemului formal al calculului propoziţional cu enunţurile universal adevărate. De asemenea,

ea ne dă un procedeu comod de verificare a faptului că un enunţ este o teoremă formală.

(iii) Teorema de completitudine a fost stabilită (pentru cazul mai general al calculului predicatelor) de K.Gödel, în 1930. Ulterior i s-au dat numeroase alte demonstraţii şi a fost extinsă şi la alte sisteme formale. Printre alte demonstraţii, menţionăm una algebrică, cu ajutorul algebrelor Boole.

PROPOZIŢIA 9. Orice mulţime consistentă $\Gamma \subset E$ are un model.

Demonstraţie. Vom schiţa numai această demonstraţie, fiind foarte asemănătoare cu cea a propoziţiei precedente.

Conform Propoziţiei 7, există o mulţime maximal consistentă Δ astfel încît $\Gamma \subset \Delta$. La fel ca în demonstraţia propoziţiei precedente, se arată că

(1) $\Delta \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Delta$, pentru orice $\varphi \in E$

(2) Dacă $\varphi \in E$, atunci $\varphi \in \Delta$ sau $\neg\varphi \in \Delta$

(3) $(\varphi \to \psi) \in \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$ sau $\psi \in \Delta$.

Se defineşte interpretarea $h: V \to L_2$ prin

$$h(v) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v \in \Delta \\ 0, & \text{dacă } v \notin \Delta \end{cases}, \text{ pentru orice } v \in V$$

şi se arată, cu ajutorul proprietăţilor (1) - (3) că pentru orice $\varphi \in E$ avem:

(4) $\tilde{h}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Delta$

Cum $\Gamma \subset \Delta$, este evident conform (4) că

$\tilde{h}(\varphi) = 1$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$,

deci h este un model al lui Γ.

Corolar. Pentru orice $\varphi \in E$ şi pentru orice $\Gamma \subset E$, avem

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

<u>Demonstrație</u>: $\Rightarrow$: Propoziția 3.

$\Leftarrow$: Presupunînd $\Gamma \not\vdash \varphi$, la fel ca în demonstrația Propoziției 8, avem $\Gamma \not\vdash \neg\neg\varphi$, deci $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistent. Va exista deci un model $f: V \to L_2$ al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. f este un model al lui Γ, dar nu al lui φ, deci $\Gamma \not\models \varphi$.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Deducția din ipoteze „$\Gamma \vdash \varphi$" se mai numește <u>deducție sintactică</u>, iar „$\Gamma \models \varphi$" <u>deducție semantică</u>. Corolarul de mai sus identifică cele două feluri de „deducție", motiv pentru care se numește „teorema de completitudine extinsă".

§ 4. <u>CONECTORII $\vee, \wedge, \leftrightarrow$.</u>

Axiomele sistemului formal L au fost formulate folosind numai conectorii $\neg$, $\to$. Ceilalți conectori $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ au fost introduși prin:

$$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \to \psi$$

$$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

<u>PROPOZIȚIA 1</u>: Pentru orice interpretare $h: V \to L_2$ a lui L avem:

$$\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$$

$$\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$$

$$\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$$

<u>Demonstrație</u>. Operațiile din dreapta au loc în algebra Boole L_2. Vom avea deci:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\varphi \vee \psi) &= \tilde{h}(\neg\varphi \to \psi) \\ &= \neg\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi) \\ &= \neg\neg\tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) \\ &= \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\varphi \wedge \psi) &= \tilde{h}(\neg(\varphi \to \neg\psi)) \\ &= \neg(\tilde{h}(\varphi) \to \neg\tilde{h}(\psi)) \\ &= \neg(\neg\tilde{h}(\varphi) \vee \neg\tilde{h}(\psi)) \\ &= \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \tilde{h}((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\ &= (\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi)) \\ &= \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi). \end{aligned}$$

<u>Definiția 1</u>. Pentru orice enunț φ definim <u>dualul lui φ</u>, notat φ^d, prin:

(i) $v^d = v$, pentru orice $v \in V$.

(ii) $(\neg\psi)^d = \neg\psi^d$, dacă $\varphi = \neg\psi$.

(iii) $(\psi \to \chi)^d = \neg\psi^d \wedge \chi^d$, dacă $\varphi = \psi \to \chi$.

Următoarea propoziție ne va arăta că $\wedge$ și $\vee$ sînt noțiuni duale:

<u>PROPOZIȚIA 2</u>.

(a) $\vdash (\varphi \wedge \psi)^d \leftrightarrow \varphi^d \vee \psi^d$

(b) $\vdash (\varphi \vee \psi)^d \leftrightarrow \varphi^d \wedge \psi^d$

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{dd}$

(d) dacă f, g sînt interpretări și dacă $\tilde{f}(v) = \tilde{g}(\neg v)$ pentru orice $v \in V$, atunci $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{g}(\neg\varphi^d)$, pentru orice enunț φ.

(e) $\Gamma \vdash \varphi \iff \{\neg\psi^d \mid \psi \in \Gamma\} \vdash \neg\varphi^d$

(f) $\vdash \varphi \iff \vdash \neg\varphi^d$

(g) $\vdash \varphi \to \psi \iff \vdash \psi^d \to \varphi^d$

(h) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \iff \vdash \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$.

<u>Demonstrație</u>: (a)

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)^d &= (\neg(\varphi \to \neg\psi))^d = \neg(\varphi \to \neg\psi)^d \\ &= \neg(\neg\varphi^d \wedge (\neg\psi)^d) = \neg(\neg\varphi^d \wedge \neg\psi^d) \end{aligned}$$

Vom arăta că $\vdash [\neg(\neg\varphi^d \wedge \neg\psi^d) \longrightarrow (\varphi^d \vee \psi^d)]$ folosind teorema de completitudine: pentru orice interpretare $h: V \longrightarrow L_2$, avem:

$$\tilde{h}\left[\neg(\neg\varphi^d \wedge \neg\psi^d) \longrightarrow (\varphi^d \vee \psi^d)\right] =$$

$$= \neg\left[\neg\tilde{h}(\varphi^d) \wedge \neg\tilde{h}(\psi^d)\right] \longrightarrow \left[\tilde{h}(\varphi^d) \vee \tilde{h}(\psi^d)\right] =$$

$$= \left[\tilde{h}(\varphi^d) \vee \tilde{h}(\psi^d)\right] \longrightarrow \left[\tilde{h}(\varphi^d) \vee \tilde{h}(\psi^d)\right] = 1,$$

deoarece într-o algebră Boole $(x \longrightarrow x) = 1$.

(b) Analog cu (a).

(c) Prin inducţie:

- Pentru $\varphi = v \in V$, avem $\varphi^{dd} = v^{dd} = v = \varphi$, deci $\vdash \varphi \longrightarrow \varphi$.

- Pentru $\varphi = \neg\psi$, presupunem $\vdash \psi \longrightarrow \psi^{dd}$ şi arătăm pentru $\neg\psi$:

Prin definiţie avem $(\neg\psi)^{dd} = \neg\psi^{dd}$ şi

$$(\psi \longrightarrow \psi^{dd}) \longrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\neg\psi^{dd})$$

este o tautologie, după cum se poate arăta cu teorema de completitudine.

Aplicînd modus ponens, rezultă

$$\vdash (\neg\psi \longrightarrow (\neg\psi)^{dd}).$$

- Pentru $\varphi = \psi \longrightarrow \chi$, presupunem $\vdash \psi \longrightarrow \psi^{dd}$ şi $\vdash \chi \longrightarrow \chi^{dd}$ şi arătăm că

$$\vdash \left[(\psi \longrightarrow \chi) \longrightarrow (\psi \longrightarrow \chi)^{dd}\right]$$

Avem egalităţile:

$$(\psi \longrightarrow \chi)^{dd} = (\neg\psi^d \wedge \chi^d)^d$$

$$= (\neg(\neg\psi^d \longrightarrow \neg\chi^d))^d$$

$$= \neg(\neg\psi^d \longrightarrow \neg\chi^d)^d$$

$$= \neg((\neg\psi^d)^d \wedge (\neg\chi^d)^d)$$

$$= \neg(\neg\neg\psi^{dd} \wedge \neg\chi^{dd})$$

$$= \neg\neg(\neg\neg\psi^{dd} \longrightarrow \neg\neg\chi^{dd})$$

Cu ajutorul teoremei de completitudine se arată atunci că

$$\vdash (\psi \longrightarrow \psi^{dd}) \longrightarrow \left((\chi \longrightarrow \chi^{dd}) \longrightarrow \left[(\psi \longrightarrow \chi) \longrightarrow (\psi \longrightarrow \chi)^{dd}\right]\right)$$

Aplicînd de două ori modus ponens rezultă

$$\vdash \left[(\psi \longrightarrow \chi) \longrightarrow (\psi \longrightarrow \chi)^{dd}\right]$$

(d) Prin inducţie:

- Pentru $\varphi = v \in V$, este evident, conform ipotezei.

- Presupunînd $\varphi = \neg\psi$ şi $\tilde{f}(\psi) = \tilde{g}(\neg\psi^d)$, atunci rezultă:

$$\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\neg\psi) = \neg\tilde{f}(\psi) = \neg\tilde{g}(\neg\psi^d) =$$

$$= \tilde{g}(\neg\neg\psi^d) = \tilde{g}(\neg(\neg\psi)^d) = \tilde{g}(\neg\varphi^d).$$

- Presupunînd $\varphi = \psi \longrightarrow \chi$ şi $\tilde{f}(\psi) = \tilde{g}(\neg\psi^d)$, $\tilde{f}(\chi) = \tilde{g}(\neg\chi^d)$, atunci avem:

$$\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi \longrightarrow \chi)$$

$$= \tilde{f}(\psi) \longrightarrow \tilde{f}(\chi)$$

$$= \tilde{g}(\neg\psi^d) \longrightarrow \tilde{g}(\neg\chi^d)$$

$$= \neg\tilde{g}(\psi^d) \longrightarrow \neg\tilde{g}(\chi^d)$$

$$= \neg(\neg\tilde{g}(\psi^d) \wedge \tilde{g}(\chi^d))$$

$$= \neg\tilde{g}(\neg\psi^d \wedge \chi^d)$$

$$= \neg\tilde{g}((\psi \longrightarrow \chi)^d) = \tilde{g}(\neg\varphi^d).$$

(e) Se demonstrează folosind (d) şi teorema de completitudine extinsă.

(f) Rezultă din (e), luînd $\Gamma = \emptyset$.

(g) Ţinînd seama de $(\varphi \longrightarrow \psi)^d = \neg\varphi^d \wedge \psi^d$, rezultă

$$\vdash \neg(\varphi \longrightarrow \psi)^d \longrightarrow (\psi^d \longrightarrow \varphi^d).$$

Aplicînd (f), rezultă

$$\vdash \varphi \longrightarrow \psi \Longleftrightarrow \psi^d \longrightarrow \varphi^d.$$

(h) Rezultă din (g).

<u>Definiția 2</u>: Dacă $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in E$, vom scrie

$$\bigvee_{i=1}^{n}\varphi_i = (\dots((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)\vee\dots\vee\varphi_n)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i = (\dots((\varphi_1\wedge\varphi_2)\wedge\varphi_3)\wedge\dots\wedge\varphi_n)$$

<u>PROPOZIȚIA 3</u>: Pentru orice interpretare $h: V \longrightarrow L_2$, avem:

$\tilde{h}\left(\bigvee_{i=1}^{n}\varphi_i\right) = 1 \iff$ există $i\in\{1,\dots,n\}$, astfel încît $\tilde{h}(\varphi_i) = 1$.

$\tilde{h}\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i\right) = 1 \iff \tilde{h}(\varphi_i) = 1$, pentru orice $i = 1,\dots,n$.

Demonstrația acestei propoziții este un simplu exercițiu.

<u>PROPOZIȚIA 4</u>: Fie $\Gamma,\Delta\subseteq E$ și $\Delta\neq\emptyset$. Dacă $\Gamma\cup\Delta\vdash\psi$, atunci există $m\in N$ și $\varphi_1,\dots,\varphi_m\in\Delta$, astfel încît

$$\Gamma\vdash(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_m\longrightarrow\psi).$$

<u>Demonstrație</u>. Conform Propoziției 1, (ii), § 2, rezultă că putem presupune Δ finită.

Este deci suficient să demonstrăm prin inducție asupra lui m că pentru orice $m\in N$ și pentru orice $\varphi_1,\dots,\varphi_m\in E$, dacă $\Gamma\cup\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}\vdash\psi$ atunci

$$\Gamma\vdash(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_m\longrightarrow\psi).$$

Pentru $m = 1$, dacă $\Gamma\cup\{\varphi_1\}\vdash\psi$, din teorema deducției rezultă $\Gamma\vdash(\varphi_1\longrightarrow\psi)$. Presupunem afirmația adevărată pentru m și pentru toate enunțurile. Dacă $\Gamma\cup\{\varphi_1,\dots,\varphi_{m+1}\}\vdash\psi$, atunci aplicînd teorema deducției avem

$$\Gamma\cup\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}\vdash(\varphi_{m+1}\longrightarrow\psi).$$

Conform ipotezei inducției, avem

$$\Gamma\vdash\left[\bigwedge_{i=1}^{m}\varphi_i\longrightarrow(\varphi_{m+1}\longrightarrow\psi)\right].$$

Folosind Propoziția 3 și teorema de completitudine se poate demonstra că

$$\vdash\left[\bigwedge_{i=1}^{m}\varphi_i\longrightarrow(\varphi_{m+1}\longrightarrow\psi)\right]\longrightarrow\left(\bigwedge_{i=1}^{m+1}\varphi_i\longrightarrow\psi\right).$$

Aplicînd modus ponens, se obține

$$\Gamma\vdash\left(\bigwedge_{i=1}^{m+1}\varphi_i\longrightarrow\psi\right)$$

deci proprietatea este verificată și pentru $m+1$.

<u>PROPOZIȚIA 5</u>: Pentru orice mulțime Γ de enunțuri, următoarele afirmații sînt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Există $m\in N$ și $\varphi_1,\dots,\varphi_m\in\Gamma$, astfel încît

$$\vdash\bigvee_{i=1}^{m}\neg\varphi_i.$$

<u>Demonstrație</u>: <u>(i)$\Longrightarrow$(ii)</u> : Presupunînd că Γ este inconsistentă, avem

$\Gamma\vdash\psi\wedge\neg\psi$, pentru orice $\psi\in E$.

Cum $\emptyset$ este consistentă, avem $\Gamma\neq\emptyset$. Conform propoziției precedente, există $m\in N$ și $\varphi_1,\dots,\varphi_m\in\Gamma$, astfel încît

$$\vdash\bigwedge_{i=1}^{m}\varphi_i\longrightarrow\psi\wedge\neg\psi.$$

Cu ajutorul teoremei de completitudine, se poate arăta că

$$\vdash \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \rightarrow \psi \wedge \neg \psi\right] \rightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i .$$

Aplicînd modus ponens, rezultă $\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u>. Presupunînd prin absurd că Γ este consistentă, rezultă că Γ are un model $f\colon V \rightarrow L_2$. Conform (ii), există $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in \Gamma$, astfel încît $\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg\varphi_i$, deci $\models \bigvee_{i=1}^{m} \neg\varphi_i$. Rezultă $\tilde{f}\left(\bigvee_{i=1}^{m} \neg\varphi_i\right) = 1$, deci

$$\tilde{f}(\varphi_i) = 0, \text{ pentru orice } i = 1,\dots,n.$$

Aceasta contrazice faptul că $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in \Gamma$ şi că f este un model al lui Γ.

§ 5. <u>ALGEBRA LINDENBAUM - TARSKI</u>

Pentru orice $\Gamma \subset E$, consistentă, vom considera relaţia binară $\sim_\Gamma$ pe mulţimea E a enunţurilor, definită în felul următor:

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi).$$

<u>Lema 1</u>. $\sim_\Gamma$ este o relaţie de echivalenţă pe E.

<u>Demonstraţie</u>. Trebuie să stabilim proprietăţile următoare:

(i) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$

(ii) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \Gamma \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$

(iii) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi), \Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$

Proprietatea (i) rezultă în baza Propoziţiei 2, § 2. Vom demonstra, spre exemplu pe (iii), pe baza teoremei de completitudine extinsă.

Fie $f\colon V \rightarrow L_2$ o interpretare astfel încît $\tilde{f}(\gamma) = 1$, pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Conform teoremei de completitudine extinsă avem

$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ şi $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi)$, deci

$$\tilde{f}(\varphi \rightarrow \psi) = 1,\ \tilde{f}(\psi \rightarrow \chi) = 1.$$

Aplicînd Propoziţia 1, § 4, rezultă

$$\tilde{f}(\varphi) \rightarrow \tilde{f}(\psi) = 1,\ \tilde{f}(\psi) \rightarrow \tilde{f}(\chi) = 1,$$

de unde avem $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$ şi $\tilde{f}(\psi) = \tilde{f}(\chi)$, deci $\tilde{f}(\varphi) = f(\chi)$.

Aşadar $\tilde{f}(\varphi) \rightarrow \tilde{f}(\chi) = 1$, de unde se obţine $\tilde{f}(\varphi \rightarrow \chi) = 1$.
Am arătat că $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$.

Analog (dar mai simplu) se poate demonstra şi (ii).

<u>Exerciţiu</u>: Să se demonstreze sintactic proprietăţile (ii) şi (iii).

<u>Lema 2</u>: Pentru orice $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \in E$, avem:

(a) $\varphi \sim_\Gamma \psi \Rightarrow \neg\varphi \sim_\Gamma \neg\psi$;

(b) $\varphi \sim_\Gamma \psi,\ \varphi' \sim_\Gamma \psi' \Rightarrow \varphi \vee \varphi' \sim_\Gamma \psi \vee \psi',\ \varphi \wedge \varphi' \sim_\Gamma \psi \wedge \psi'$;

(c) $\varphi \wedge \neg\varphi \sim_\Gamma \psi \wedge \neg\psi;\ \varphi \vee \neg\varphi \sim_\Gamma \psi \vee \neg\psi$.

<u>Demonstraţie</u>: Folosind teorema de completitudine, totul se reduce la a arăta că:

$$\Gamma \models (\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \Gamma \models (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

$$\Gamma \models (\varphi \rightarrow \psi),\ \Gamma \models (\varphi' \rightarrow \psi') \Rightarrow \begin{cases} \Gamma \models (\varphi \vee \varphi' \rightarrow \psi \vee \psi') \\ \Gamma \models (\varphi \wedge \varphi' \rightarrow \psi \wedge \psi') \end{cases}$$

$$\Gamma \models [(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)]$$

$$\Gamma \models [(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow (\psi \vee \neg\psi)]$$

Vom demonstra, de exemplu, pe ultima din aceste relaţii. Fie $f\colon V \rightarrow L_2$ o interpretare oarecare. Atunci avem

$$\begin{aligned} &\tilde{f}\big([(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow (\psi \vee \neg\psi)]\big) \\ &= (\tilde{f}(\varphi) \vee \neg\tilde{f}(\varphi)) \rightarrow (\tilde{f}(\psi) \vee \neg\tilde{f}(\psi)) \\ &= 1 \rightarrow 1 = 1. \end{aligned}$$

deci $\models[(\varphi\vee\neg\varphi)\rightarrow(\psi\vee\neg\psi)]$. Cu atît mai mult vom avea:

$$\Gamma\models[(\varphi\vee\neg\varphi)\rightarrow(\psi\vee\neg\psi)].$$

Demonstrarea celorlalte proprietăţi (în aceeaşi manieră) este un exerciţiu util.

Exerciţiu: Să se dea o demonstraţie sintactică a acestei leme.

Considerăm acum mulţimea cît $B_\Gamma = E/\sim_\Gamma$. Conform celor două leme precedente, în B_Γ putem defini următoarele operaţii:

$$\hat{\varphi}\vee\hat{\psi}=\widehat{\varphi\vee\psi}$$

$$\hat{\varphi}\wedge\hat{\psi}=\widehat{\varphi\wedge\psi}$$

$$\neg\hat{\varphi}=\widehat{\neg\varphi}$$

$$0=\widehat{\varphi\wedge\neg\varphi}$$

$$1=\widehat{\varphi\vee\neg\varphi}.$$

PROPOZIŢIA 1: B_Γ este o algebră Boole.

Lăsăm demonstraţia acestei propoziţii pe seama cititorului.

B_Γ se numeşte algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui L şi lui Γ.

Definiţia 1. Fie B o algebră Boole oarecare şi $X\subset B$. Spunem că B este algebra Boole liberă generată de X dacă pentru orice algebră Boole B' şi pentru orice funcţie $f: X\rightarrow B'$ există un unic morfism de algebre Boole $g: B\rightarrow B'$ astfel încît $g(x)=f(x)$ pentru orice $x\in X$.

Exerciţiu: Orice două algebre Boole generate de X sînt izomorfe.

PROPOZIŢIA 2. $B_\emptyset$ este algebra Boole liberă generată de V.

Demonstraţie: Fie $f: V\rightarrow B'$ o funcţie arbitrară (B' fiind o algebră Boole). În acelaşi mod ca în Propoziţia 1, § 3 se arată că există o unică funcţie $\tilde{f}: E\rightarrow B'$ astfel încît:

(a) $\tilde{f}(v)=f(v)$, pentru orice $v\in V$.

(b) $\tilde{f}(\neg\varphi)=\neg\tilde{f}(\varphi)$

(c) $\tilde{f}(\varphi\rightarrow\psi)=\tilde{f}(\varphi)\rightarrow\tilde{f}(\psi)$

(d) $\tilde{f}(\varphi\vee\psi)=\tilde{f}(\varphi)\vee\tilde{f}(\psi)$

(e) $\tilde{f}(\varphi\wedge\psi)=\tilde{f}(\varphi)\wedge\tilde{f}(\psi)$

(f) $\tilde{f}(\varphi\leftrightarrow\psi)=\tilde{f}(\varphi)\leftrightarrow\tilde{f}(\psi)$,

pentru orice $\varphi,\psi\in E$. Observăm că operaţiile din dreapta au loc în algebra Boole B'. Exact ca în demonstraţia Propoziţiei 2, § 3, se poate arăta că $\tilde{f}(\varphi)=1$ pentru orice teoremă formală φ.

Mulţimea V a variabilelor lui L poate fi considerată submulţime a lui $B_\emptyset$ prin funcţia injectivă $v\mapsto\hat{v}$. Va trebui să probăm că

$$v\neq v'\Rightarrow\hat{v}\neq\hat{v}',\text{ pentru orice } v,v'\in V.$$

Intr-adevăr, să presupunem prin absurd că $v\neq v'$, dar $v\sim_\emptyset v'$, adică $\vdash(v\leftrightarrow v')$.

Dacă $v\neq v'$ atunci putem găsi o interpretare $h: V\rightarrow L_2$ astfel încît $h(v)=0$ şi $h(v')=1$, deci $h(v)\neq h(v')$. Insă avem $\models(v\leftrightarrow v')$, deci

$$\tilde{h}(v\leftrightarrow v')=1,$$

de unde rezultă

$$h(v)\leftrightarrow h(v')=\tilde{h}(v)\leftrightarrow\tilde{h}(v')=\tilde{h}(v\leftrightarrow v')=1.$$

Se obţine de aici $h(v)=h(v')$. Contradicţia este evidentă, deci implicaţia de mai sus este corectă.

Cu ajutorul funcţiei $\tilde{f}: E\rightarrow B'$ de mai sus obţinem o funcţie

$$\bar{f}: E/_{\sim_\emptyset}\rightarrow B',$$

definită astfel:

$\bar{f}(\hat{\varphi}) = \tilde{f}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$.

Faptul că definiţia lui $\bar{f}$ nu depinde de reprezentanţi:

$$\varphi \sim_{\emptyset} \psi \Longrightarrow \tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$$

rezultă astfel:

Dacă $\varphi \sim_{\emptyset} \psi$, atunci $\vdash (\varphi \to \psi)$, deci

$$\tilde{f}(\varphi \to \psi) = 1.$$

Din proprietatea (f) de mai sus se obţine

$\tilde{f}(\varphi) \to \tilde{f}(\psi) = \tilde{f}(\varphi \to \psi) = 1$,

deci $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$.

Aplicînd proprietăţile (a) - (f) de mai sus rezultă imediat că $\bar{f}: B_{\Gamma} \to B'$ este un morfism de algebre Boole.

Pentru orice $v \in V$, avem ,

$\bar{f}(\hat{v}) = \tilde{f}(v) = f(v)$.

Cu aceasta propoziţia a fost complet demonstrată.

<u>OBSERVAŢIE</u>: In demonstraţia de mai sus $\hat{v}$ şi v s-au identificat.

<u>PROPOZIŢIA 3</u>. Fie F un filtru al algebrei Lindenbaum-Tarski B_{Γ} . Dacă

$$\Delta = \bigcup_{\hat{\varphi} \in F} \hat{\varphi}$$

atunci $\Gamma \subset \Delta$ şi $B_{\Gamma}/_{F}$ este izomorfă cu B_{Δ} .

<u>Demonstraţie</u>. Reamintim că $\hat{\varphi}$ este clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in E$ în raport cu relaţia de echivalenţă $\sim_{\Gamma}$. Pentru că avem trei mulţimi cît vom nota:

$[\varphi]_{\Gamma}$: clasa de echivalenţă a lui φ în raport cu $\sim_{\Gamma}$;

$[\varphi]_{\Delta}$: clasa de echivalenţă a lui φ în raport cu $\sim_{\Delta}$;

$[x]_F$: clasa de echivalenţă a lui $x \in B_{\Gamma}$ în raport cu relaţia $\sim_F$ asociată filtrului F.

Este evident că $\hat{\varphi} = [\varphi]_{\Gamma}$ şi $\Delta = \bigcup_{[\varphi]_{\Gamma} \in F} [\varphi]_{\Gamma}$

Să arătăm întîi că $\Gamma \subset \Delta$:

$$\begin{aligned}
\varphi \in \Gamma &\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \\
&\Rightarrow \Gamma \models \varphi \\
&\Rightarrow \Gamma \models (\varphi \to (\varphi \vee \neg \varphi)) \\
&\Rightarrow \Gamma \vdash (\varphi \to (\varphi \vee \neg \varphi)) \\
&\Rightarrow \varphi \sim_{\Gamma} (\varphi \vee \neg \varphi) \\
&\Rightarrow [\varphi]_{\Gamma} = [\varphi \vee \neg \varphi]_{\Gamma} = 1 \\
&\Rightarrow [\varphi]_{\Gamma} \in F \Rightarrow \varphi \in \Delta .
\end{aligned}$$

Pentru orice $\varphi , \psi \in E$, vom arăta că

$$\left[[\varphi]_{\Gamma}\right]_F = \left[[\psi]_{\Gamma}\right]_F \Longleftrightarrow [\varphi]_{\Delta} = [\psi]_{\Delta}$$

Avem implicaţiile:

$$\begin{aligned}
\left[[\varphi]_{\Gamma}\right]_F = \left[[\psi]_{\Gamma}\right]_F &\Rightarrow \left([\varphi]_{\Gamma} \to [\psi]_{\Gamma}\right) \in F \\
&\Rightarrow [\varphi \to \psi]_{\Gamma} \in F \\
&\Rightarrow (\varphi \to \psi) \in \Delta \\
&\Rightarrow [\varphi]_{\Delta} = [\psi]_{\Delta}
\end{aligned}$$

Analog se demonstrează şi cealaltă implicaţie.

Conform celor demonstrate, putem să considerăm funcţia injectivă:

$$f: B_{\Gamma}/_{F} \longrightarrow B_{\Delta}$$

$f\left(\left[[\varphi]_{\Gamma}\right]_F\right) = [\varphi]_{\Delta}$, pentru orice $\left[[\varphi]_{\Gamma}\right]_F \in B_{\Gamma}/_{F}$

Este evident faptul că f este surjectivă. De asemenea, rezultă imediat şi faptul că f este morfism de algebre Boole. Deci $B_{\Gamma/F}$, B_{Δ} sînt izomorfe.

PROPOZIŢIA 4: Pentru orice algebră Boole A există un sistem formal al calculului propoziţional şi o mulţime Γ de enunţuri ale lui L astfel încît A este izomorfă cu B_Γ.

Demonstraţie. Considerăm limbajul formal L în care mulţimea V a variabilelor este A.

Fie $f: V \longrightarrow A$ funcţia identică. Conform Propoziţiei 2, există un morfism de algebre Boole

$$f^+: B_\emptyset \longrightarrow A$$

astfel încît

$f^+(a) = f(a) = a$, pentru orice $a \in A$.

Deci f^+ este un morfism surjectiv. Dacă

$$F = M_{f^+} = \left\{x \in B_\emptyset \mid f^+(x) = 1\right\}$$

atunci A este izomorfă cu $B_\emptyset/F$ (vezi Capitolul II, corolarul Propoziţiei 3, § 3).

Dacă $\Gamma = \bigcup_{[\varphi]_\emptyset \in F} [\varphi]_\emptyset$, atunci conform propoziţiei precedente $B_\emptyset/_F$ şi $B/_\Gamma$ sînt izomorfe. Deci A este izomorfă cu $B/_\Gamma$.

OBSERVAŢIE. Această teoremă are o semnificaţie deosebită, arătînd că toate algebrele Boole pot fi obţinute ca algebre Lindenbaum-Tarski.

EXERCIŢII LA CAPITOLUL III

1. Să se arate că următoarele enunţuri sînt teoreme ale sistemului formal L:

(1) $p \vee p \rightarrow p$

(2) $q \rightarrow p \vee q$

(3) $p \vee q \rightarrow q \vee p$

(4) $p \vee (q \vee r) \rightarrow q \vee (p \vee r)$

(5) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$

(6) $p \rightarrow p \vee p$

(7) $p \vee \neg p$

(8) $p \vee \neg\neg\neg p$

(9) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(10) $p \vee (p \vee q \rightarrow p)$

(11) $\neg p \vee ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(12) $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(13) $p \vee (q \vee r) \rightarrow p \vee (r \vee q)$

(14) $p \vee (q \vee r) \rightarrow (p \vee q) \vee r$

(15) $(p \vee q) \vee r \rightarrow p \vee (q \vee r)$

(16) $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \vee p)$

(17) $(q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow p \vee r)$

(18) $(q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow r \vee p)$

(19) $(\neg p \vee (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(20) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(21) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p$

(22) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg q$

(23) $\neg (p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(24) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(25) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

(26) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

(27) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(28) $p \vee q \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(29) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p \vee q$

(3o) $\neg p \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$

(31) $\neg q \rightarrow (p \vee q \rightarrow p)$

(32) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(33) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(34) $p \vee q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$

(35) $p \vee q \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow q)$

(36) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

(37) $p \vee q \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$

(38) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p \vee q)$

(39) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \vee r \rightarrow q \vee r)$

(4o) $p \vee q \rightarrow ((p \vee q \rightarrow r) \rightarrow p \vee r)$

(41) $(q \rightarrow (r \rightarrow s)) \rightarrow (p \vee q \rightarrow (p \vee r \rightarrow p \vee s))$

(42) $p \vee q \vee r \rightarrow (p \vee \neg r \vee s \rightarrow p \vee q \vee s)$

(43) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow [(p \rightarrow (r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow s))]$

(44) $(p \vee q \rightarrow p \vee r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

(45) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow s)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow s))$

(46) $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$

(47) $q \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$

(48) $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

(49) $\neg (p \wedge \neg p)$

(5o) $p \wedge q \rightarrow p$

(51) $p \wedge q \rightarrow q$

(52) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(53) $(p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

(54) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(55) $((q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(56) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

(57) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge \neg r \rightarrow \neg q)$

(58) $p \wedge q \rightarrow (p \rightarrow q)$

(59) $(p \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

(6o) $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

(61) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

(62) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

(63) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)$

(64) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \vee s)$

(65) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

(66) $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$

(67) $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$

(68) $(p \wedge q \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (q \wedge r \rightarrow \neg p)$

(69) $p \leftrightarrow p$

(7o) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

(71) $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

(72) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$

(73) $p \leftrightarrow (p \vee p)$

(74) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

(75) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

(76) $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

(77) $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

(78) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r)$

(79) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee r \leftrightarrow q \vee r)$

(8o) $(p \leftrightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow r \wedge s)$

(81) $(p \leftrightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \rightarrow (p \vee q \leftrightarrow r \vee s)$

(82) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

(83) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

(84) $p \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$

(85) $p \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q))$

(86) $p \leftrightarrow p \vee (p \wedge q)$

(87) $p \leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$

(88) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

(89) $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(9o) $(p \rightarrow \neg q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(91) $\neg (\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(92) $(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$

(93) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$

(94) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q)$

(95) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p \vee q)$

(96) $q \rightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q)$

(97) $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p$

(98) $(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$

(99) $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

(1oo) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

2. Să se demonstreze următoarele reguli de deducţie.

(1) $$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}$$

(2) $$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi;\ \Gamma_2 \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}$$

(3) $$\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

(4) $$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$$

(5) $$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi;\ \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg \psi}{\Gamma \vdash \neg \varphi}$$

(6) $$\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi;\ \Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$$

(7) $$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \gamma;\ \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \gamma}{\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \gamma}$$

(8) $$\Gamma \cup \{\neg\neg \varphi\} \vdash \varphi$$

(9) $$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi;\ \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi \wedge \psi}$$

(1o) $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

(11) $$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

(12) $$\frac{\Gamma_1 \vdash (\varphi \rightarrow \psi),\ \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}$$

$$(13)\qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \vee \psi \,;\, \Gamma_2 \cup \{\varphi\} \vdash \gamma \,;\, \Gamma_3 \cup \{\psi\} \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma}$$

3. Să se demonstreze că pentru orice enunţ φ există $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile φ_{ij}, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij} \right)$$

unde fiecare φ_{ij} este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale pentru $i \leqslant m, j \leqslant n_i$.

4. Pentru orice enunţ φ există $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile φ_{ij}, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij} \right)$$

unde pentru orice $i \leqslant m, j \leqslant n_i$, φ_{ij} este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale.

5. Să se arate, pentru orice mulţime Σ de enunţuri, că sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) Σ este consistentă.

(ii) Orice parte finită a lui Σ este consistentă.

6. Să se arate demonstraţia că axiomele (A 1) - (A 3) ale sistemului formal al calculului propoziţional sînt independente.

CAPITOLUL 4

Sistemul formal al calculului predicatelor

Un al doilea sistem formal, acela al calculului predicatelor, este subiectul prezentului capitol. In primul paragraf este prezentată construcţia sistemului formal al calculului predicatelor şi proprietăţile sale sintactice.

Al doilea paragraf tratează algebra Lindenbaum-Tarski a sistemului formal al calculului predicatelor, care este o algebră Boole obţinută prin factorizarea mulţimii formulelor printr-o relaţie de echivalenţă canonică. Proprietăţile sintactice ale sistemului formal se vor reflecta în proprietăţi algebrice ale algebrei Lindenbaum-Tarski.

Ultimul paragraf al capitolului defineşte conceptul important de model al unui enunţ şi conţine demonstraţia teoremei de completitudine pentru calculul predicatelor. Această demonstraţie este complet algebrică, bazîndu-se pe proprietăţile algebrei Lindenbaum-Tarski şi pe teorema Rasiowa-Sikorski.

De obicei calculul predicatelor este dezvoltat pe baza calculului propoziţional la care se adaugă axiomele specifice. Am preferat să abordăm acest capitol în altă manieră decît cea aleasă pentru capitolul precedent, pentru a avea în faţă două moduri de demonstraţie: unul algebric, ca cel de faţă, şi unul nealgebric, ca cel din capitolul precedent.

Vom remarca că acest ultim paragraf este doar începutul unui domeniu de mare actualitate al logicii: Teoria modelelor.

§ 1. SISTEMUL FORMAL AL CALCULULUI PREDICATELOR

Fie λ o funcţie

$$\lambda : N \longrightarrow N$$

Definiţia 1. Printr-o λ - structură vom înţelege o pereche ordonată

$$\mathcal{A} = \langle A, \{R_n\}_{n\in N} \rangle,$$

unde A este o mulţime nevidă, numită domeniul structurii A şi pentru orice $n \in N$, R_n este o relaţie $\lambda(n)$ - ară ($R_n \subset A^{\lambda(x)}$).

Definiţia 2. Două λ - structuri se vor numi structuri similare, iar clasa tuturor λ - structurilor se va numi clasă de similaritate.

Notăm cu $\mathscr{C}_\lambda$ clasa tuturor λ - structurilor.

Fiecărei $\lambda : N \longrightarrow N$ îi vom asocia un sistem formal L_λ, numit sistemul formal al calculului predicatelor asociat lui λ.

Simbolurile primitive ale lui L_λ sînt următoarele:

(1) O mulţime numărabilă V de simboluri numite variabile, notate x, y, z, u, v, w, ...

(2) O mulţime numărabilă de simboluri numite predicate:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

Pentru orice $n \in N$, $\lambda(n)$ se va numi gradul predicatului P_n.

(3) Simbolul de egalitate =

(4) Conectorii $\neg$ şi $\wedge$

(5) Simbolul de cuantificare $\exists$.

(6) Parantezele: ( ), [ ] .

Prin simboluri logice vom înţelege simbolurile $\neg$, $\wedge$ şi $\exists$. Celelalte simboluri se vor numi simboluri nelogice.

Un cuvînt va fi un şir finit de simboluri ale lui L.

O formulă atomică sau elementară este un cuvînt care are una din formele următoare:

(1) $x = y$, unde x, y sînt variabile oarecare

(2) $P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})$, unde P_n este un predicat de ordinul $\lambda(n)$.

OBSERVAŢIE: Aici este punctul unde începe să se observe că L_λ este construit astfel încît să exprime formal proprietăţile tuturor structurilor din clasa de similaritate $\mathscr{C}_\lambda$. Se vede că

- variabilele x, y, z,... vor reprezenta elementele arbitrare din structurile considerate;
- pentru orice $n \in N$, predicatul P_n este reprezentarea formală a relaţiei $\lambda(n)$ - are R_n.

Din mulţimea cuvintelor vom selecta submulţimea formulelor, care vor fi cuvintele „cu sens".

Definiţia conceptului de formulă se va face prin inducţie. Anume, un cuvînt φ este o formulă dacă satisface una din condiţiile următoare:

(1) φ este o formulă atomică ;

(2) $\varphi = \neg\psi$, unde ψ este o formulă ;

(3) $\varphi = \psi \wedge \chi$, unde ψ şi χ sînt formule ;

(4) $\varphi = (\exists x)\psi$, unde χ este o variabilă şi ψ este o formulă.

Pe lîngă conectorii $\neg$, $\wedge$ definim următorii conectori:

$$\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\varphi \rightarrow \psi = \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) = \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)$$

De asemenea, introducem simbolul de cuantificare $\forall$ prin:

$$(\forall x)\varphi = \neg(\exists x)\neg\varphi$$

<u>Observație</u>: (a) Conectorii $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ se citesc astfel:

$\neg$: non ;

$\wedge$: și ; $\vee$: sau;

$\rightarrow$: implică; $\leftrightarrow$: echivalent .

(b) $\exists$ se numește <u>cuantificator existențial</u> și se citește „există", iar $\forall$ se numește <u>cuantificator universal</u> și se citește „oricare ar fi" sau „pentru orice".

Dacă într-o formulă apare $\exists x$, atunci x se numește <u>variabilă legată</u> sau <u>cuantificată</u>. O variabilă care nu este legată se numește <u>liberă</u>.

Mai precis, variabilele libere sînt definite astfel prin inducție:

(a) orice variabilă ce apare într-o formulă atomică este liberă ;

(b) dacă x este o variabilă liberă a lui φ , atunci x este o variabilă liberă a lui $\neg\varphi$;

(c) dacă x este o variabilă liberă a lui φ sau a lui ψ , atunci x este o variabilă liberă a lui $\varphi\wedge\psi$;

(d) dacă x este o variabilă liberă a lui φ definită de variabile y, atunci x este o variabilă liberă a lui $(\exists \cancel{x}\, y)\, \varphi$.

O formulă în care nu apare nici o variabilă liberă se numește <u>enunț</u>. Vom nota cu E mulțimea enunțurilor, iar cu F mulțimea formulelor lui L_λ .

<u>OBSERVAȚIE</u>: Pentru a specifica că $x_1,\dots,x_n$ sînt variabile libere ale unei formule φ , vom nota $\varphi(x_1,\dots,x_n)$. Dacă avem o formulă $\varphi(x)$ și y este o altă variabilă, atunci prin $\varphi(y)$ vom înțelege formula obținută înlocuind în $\varphi(x)$ pe x cu y peste tot unde apare x.

Pasul următor în descrierea sintaxei lui L_λ este definirea <u>teoremelor</u> sale.

<u>Axiomele</u> lui L_λ sînt formule care au una din următoarele forme:

A 1. $\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$

A 2. $[\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi)]\rightarrow[(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi)]$

A 3. $(\neg\varphi\rightarrow\neg\psi)\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$

A 4. $\varphi\wedge\psi\rightarrow\varphi$

A 5. $\varphi\wedge\psi\rightarrow\psi$

A 6. $(\chi\rightarrow\varphi)\rightarrow[(\chi\rightarrow\psi)\rightarrow(\chi\rightarrow[\varphi\wedge\psi])]$

A 7. $\varphi\rightarrow\varphi\vee\psi$

A 8. $\psi\rightarrow\varphi\vee\psi$

A 9. $(\varphi\rightarrow\chi)\rightarrow[(\psi\rightarrow\chi)\rightarrow([\varphi\vee\psi]\rightarrow\chi)]$

A10. $(\forall x)\,\varphi(x)\rightarrow\varphi(y)$

A11. $(\forall x)(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow(\forall x)\psi)$, dacă φ nu conține pe x ca variabilă liberă.

A12. $(\forall x)(x = x)$

A13. $(\forall x)(\forall y)\big(x = y\rightarrow[\varphi(x)\rightarrow\varphi(y)]\big)$

<u>OBSERVAȚIE</u>: În capitolul precedent, A 1 - A 3 au fost axiomele sistemului formal L al calculului propozițional. Se observă că în axiomatizarea calculului cu predicate ce o prezentăm aici axiomele prezentate folosesc conectorii $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$. Ca un exercițiu pentru cititor, după parcurgerea acestui capitol, rămîne a se arăta că sistemul de axiome A1 - A9 este echivalent cu sistemul de axiome prezentat în capitolul precedent.

Regulile de deducție ale sistemului formal L_λ sînt următoarele:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)}$$

$$\frac{\varphi}{(\forall x)} \quad \text{(generalizarea)}$$

Cele două reguli de deducţie se exprimă astfel:

<u>modus ponens</u> : ψ este o <u>consecinţă</u> a lui φ şi $\varphi \to \psi$, pentru orice formule φ şi ψ ale lui L_λ;

<u>generalizarea</u>: $(\forall x)\varphi$ este o <u>consecinţă</u> a lui φ, unde φ este o formulă şi x este o variabilă oarecare a lui L_λ.

O <u>demonstraţie formală</u> a unei formule φ este un şir finit de formule

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi.$$

astfel încît pentru orice $i = 1, \dots, n$, să fie verificată una din condiţiile următoare:

a) φ_i este o axiomă;

b) există $j, k < i$, astfel încît $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$;

c) există $j < i$, astfel încît $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$.

n se numeşte <u>lungimea</u> demonstraţiei formale $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Dacă pentru un enunţ φ există o demonstraţie formală atunci φ se numeşte <u>teoremă</u> a sistemului formal L_λ. Notăm cu $\vdash \varphi$ faptul că φ este o teoremă a lui L_λ. Deci mulţimea T a teoremelor lui L_λ este obţinută din axiomele lui L_λ prin aplicarea celor două reguli de deducţie de mai sus.

Fie Σ o mulţime de formule ale lui L_λ. Spunem că o formulă φ este <u>dedusă din ipotezele</u> Σ dacă există un şir finit de formule

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$$

astfel încît pentru orice $i \leq n$ este verificată una din condiţiile următoare:

(i) φ este o axiomă ;

(ii) $\varphi \in \Sigma$;

(iii) există $j, k < i$, astfel încît $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$;

(iv) există $j < i$, astfel încît $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$.

Vom nota cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că φ este dedusă din Σ. Dacă $\Sigma = \emptyset$, atunci este evident că avem

$$\emptyset \vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \varphi$$

Deci teoremele sînt formulele deduse din ipoteza vidă.

<u>OBSERVATIE</u>. Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$, pentru orice $\Sigma \subset F$.

<u>Lema 1</u>. Pentru orice formulă φ, avem

$$\vdash (\varphi \to \varphi)$$

<u>Demonstraţie</u>. Următorul şir de formule este o demonstraţie formală a lui $\varphi \to \varphi$:

(A 2) $[\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)] \to [(\varphi \to]\varphi \to \varphi]) \to (\varphi \to \varphi)]$

(A 1) $\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)$

m.p. $(\varphi \to [\varphi \to \varphi] \to (\varphi \to \varphi))$

(A 1) $\varphi \to [\varphi \to \varphi]$

m.p. $\varphi \to \varphi$

<u>Lema 2</u>. Pentru orice formule φ, ψ şi χ, avem

$$\vdash (\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$$

<u>Demonstraţie</u>

(A 2) $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$

(A 1) $\Big([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\Big) \to$
$\to \Big((\psi \to \chi) \to \big([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\big)\Big)$

m.p. $(\psi \to \chi) \to \left([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right)$

(A-2) $\left((\psi \to \chi) \to \left([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right)\right) \to$
$\to \left(\left[(\psi \to \chi) \to [\varphi \to (\psi \to \chi)]\right] \to \left[(\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right]\right)$

m.p. $\left[(\psi \to \chi) \to [\varphi \to (\psi \to \chi)]\right] \to \left[(\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]\right]$

(A 1) $(\psi \to \chi) \to [\varphi \to (\psi \to \chi)]$

m.p. $(\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$

<u>Lema 3</u>. Pentru orice formule φ, ψ avem:

$$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$$

<u>Demonstrație</u>

(A 3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

$[(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)] \to \left([\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)] \to [\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)]\right)$

(Lema 2)

m.p. $[\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)] \to [\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)]$

(A 1) $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

m.p. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

<u>Lema 4</u>. Pentru orice formule φ, ψ, θ, χ avem

(a) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$

(b) $\vdash \varphi \to [\psi \to (\varphi \wedge \psi)]$

(c) $\vdash [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)] \to [(\varphi \vee \psi) \wedge \chi]$

(d) $\vdash (\chi \to \theta) \to [(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))]$

(e) $\vdash (\varphi \vee \psi) \to \left(\chi \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)]\right)$

(f) $\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \wedge \psi) \to \chi]$

(g) $\vdash [(\varphi \vee \psi) \wedge \chi] \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)]$

(h) $\vdash (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$

Demonstrația acestei leme o lăsăm pe seama cititorului.

<u>Lema 5</u>. Pentru orice formulă $\varphi(x,y)$ a lui L, avem

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$$

<u>Demonstrație</u>. Conform A 9, avem

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to (\forall y)\varphi(x,y)$$

$$\vdash (\forall y)\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$$

Lema 4, (h) ne spune că

$$\vdash [(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to (\forall y)\varphi(x,y)] \to$$
$$\to \left[[(\forall y)\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)] \to [(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)]\right]$$

Aplicînd de două ori modus ponens rezultă

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$$

de unde, conform generalizării se obține

$$\vdash \forall x\,[(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)]$$

Din A 11:

$$\vdash (\forall x)[(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)] \to [(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to (\forall x)\varphi(x,y)]$$

se obține prin modus ponens:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to (\forall x)\,\varphi(x,y))$$

In același mod, folosind generalizarea A 11 și modus ponens obținem:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \to (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$$

<u>Corolar</u>:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y).$$

O <u>formulă deschisă</u> este o formulă care nu conține nici un cuantificator. Dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este o formulă ale cărei variabile libere sînt $x_1,\dots,x_n$ atunci prin <u>închiderea</u> lui $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ vom înțelege enunțul

$$(\forall x_1)\ \dots\ (\forall x_n)\ \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Lema 6. Pentru orice formulă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ avem

$$\vdash \varphi(x_1,\dots,x_n) \Longleftrightarrow \vdash (\forall x_1)\ \dots\ (\forall x_n)\ \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Demonstrație. Implicația $\Longrightarrow$ se obține aplicînd generalizarea de n ori.

$\Longleftarrow$: Prin procedeul folosit în demonstrația lemei precedente se arată că

$$\vdash (\forall x_1)\dots(\forall x_n)\ \varphi(x_1,\dots,x_n) \rightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Conform ipotezei, aplicînd modus ponens rezultă

$$\vdash \varphi(x_1,\dots,x_n)$$

Deci o formulă a lui L_λ este teoremă dacă și numai dacă închiderea ei este o teoremă. Cu alte cuvinte, din punct de vedere al „adevărurilor sintactice" este suficient să considerăm enunțurile care sînt teoreme.

Lema 7. Dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Sigma_0 \subset \Sigma$ finită astfel încît $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

Lăsăm demonstrația acestei leme pe seama cititorului.

Exerciții:

(a) Pentru orice variabile x,y,z ale lui L_λ avem

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\ [x = y \rightarrow y = x]$$

$$\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)\ [(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z]$$

(b) Dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este o formulă care are variabilele libere $x_1,\dots,x_n$ și dacă $y_1,\dots,y_n$ nu apar în $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, atunci

$$\vdash [(x_1 = y_1) \wedge \dots \wedge (x_n = y_n)] \rightarrow [\varphi(x_1,\dots,x_n) \rightarrow \varphi(y_1,\dots,y_n)]$$

§ 2. ALGEBRA LINDENBAUM - TARSKI a lui L_λ

In capitolul precedent, am studiat algebra Lindenbaum-Tarski B_Γ asociată unei mulțimi de enunțuri Γ folosind teorema de completitudine extinsă.

Pentru scopurile noastre, algebra Lindenbaum-Tarski va juca un rol important. De aceea, în cazul lui L_λ , vom folosi mijloace strict sintactice pentru studiul său.

Pe mulțimea F a formulelor considerăm următoarea relație

$$\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Conform Lemei 1, § 1 $\sim$ este reflexivă și conform Lemei 2, § 2 este tranzitivă. Este evident că $\sim$ este simetrică, deci $\sim$ este o relație de echivalență pe F.

Pe mulțimea cît $F/\sim$ considerăm următoarea relație binară:

$$\tilde{\varphi} \leqslant \tilde{\psi} \Longleftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Lăsăm cititorului să arate că această definiție nu depinde de reprezentanți: dacă $\varphi \sim \varphi'$, $\psi \sim \psi'$, atunci

$$\vdash \varphi \rightarrow \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$$

OBSERVAȚIE: Cu $\tilde{\varphi}$ am notat clasa de echivalență a lui φ.

PROPOZIȚIA 1. $(F/\sim, \leqslant)$ este o algebră Boole. In această algebră Boole avem:

$$\tilde{\varphi} = 1 \Longleftrightarrow \vdash \varphi$$

$$\tilde{\varphi} = 0 \Longleftrightarrow \vdash \neg\varphi$$

Demonstrație: Conform Lemelor 1 și 2, § 1, relația $\leqslant$ este reflexivă și tranzitivă. Conform definiției, ea este tranzitivă, deci $(F/\sim, \leqslant)$ este o mulțime parțial ordonată.

Fie $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ două elemente oarecare ale lui $F/\sim$. Vom arăta că $\widetilde{\varphi \wedge \psi}$ este infimumul mulțimii $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$. Din axiomele A4 și A5:

$$\vdash \varphi\wedge\psi \rightarrow \varphi$$
$$\vdash \varphi\wedge\psi \rightarrow \psi$$

se obţine

$$\widetilde{\varphi\wedge\psi} \leq \widetilde{\varphi} \text{ şi } \widetilde{\varphi\wedge\psi} \leq \widetilde{\psi}$$

Deci $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este un minorant al mulţimii $\{\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\}$. Să arătăm acum că $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este cel mai mare minorant al acestei mulţimi.Pentru aceasta, presupunem că $\widetilde{\chi}\leq\widetilde{\varphi}$ şi $\widetilde{\chi}\leq\widetilde{\psi}$, deci

$$\vdash \chi \rightarrow \varphi \text{ şi } \vdash \chi \rightarrow \psi$$

Din axioma A 6:

$$\vdash (\chi\rightarrow\varphi)\rightarrow[(\chi\rightarrow\psi)\rightarrow(\chi\rightarrow(\varphi\wedge\psi))]$$

rezultă, aplicînd de două ori modus ponens:

$$\vdash \chi \rightarrow (\varphi\wedge\psi),$$

ceea ce înseamnă că $\widetilde{\chi}\leq\widetilde{\varphi\wedge\psi}$. Cu aceasta, am arătat că $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este cel mai mare minorant al mulţimii $\{\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\}$. Similar se arată că

$$\widetilde{\varphi\vee\psi}$$

este supremumul mulţimii $\{\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\}$.

Deci $F/\sim$ este o latice pentru care avem

$$\widetilde{\varphi}\wedge\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi\wedge\psi}$$
$$\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi\vee\psi}$$

Conform Lemei 4, (c) şi (g), pentru orice formule φ, ψ, χ avem

$$\widetilde{(\varphi\vee\psi)\wedge\chi} = \widetilde{(\varphi\wedge\chi)\vee(\psi\wedge\chi)}$$

deci

$$(\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi})\wedge\widetilde{\chi} = (\widetilde{\varphi}\wedge\widetilde{\chi})\vee(\widetilde{\psi}\wedge\widetilde{\chi})$$

Aceasta este suficient pentru a afirma că $F/\sim$ este o latice distributivă.

Presupunem acum $\vdash\varphi$. Aplicînd modus ponens axiomei A 1:

$$\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

rezultă $\vdash \psi\rightarrow\varphi$, pentru orice $\psi\in F$. Cu alte cuvinte, dacă $\varphi\in T$, atunci

$$\widetilde{\psi}\leq\widetilde{\varphi}, \text{ pentru orice } \psi\in F.$$

De aici rezultă, pentru $\vdash\varphi$ şi $\vdash\varphi'$, că avem $\widetilde{\varphi}'\leq\widetilde{\varphi}$ şi , deci $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}'$. Deducem că mulţimea T a teoremelor formează o clasă de echivalenţă, care va fi elementul ultim al laticii $F/\sim$:

$$1 = \widetilde{\varphi}, \text{ pentru } \varphi\in T$$

Presupunem acum că $\vdash\neg\varphi$. Aplicînd modus ponens Lemei 3:

$$\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi\rightarrow\psi)$$

rezultă $\vdash\varphi\rightarrow\psi$, pentru orice $\psi\in F$. Cu alte cuvinte, dacă $\neg\varphi\in T$, atunci

$$\widetilde{\varphi}\leq\widetilde{\psi}, \text{ pentru orice } \psi\in F.$$

Deci pentru orice $\varphi, \varphi'\in F$, astfel încît $\vdash\neg\varphi$ şi $\vdash\neg\varphi'$, vom avea $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}'$. Aceasta arată că mulţimea

$$\{\varphi\in F \mid \vdash\neg\varphi\}$$

formează o clasă de echivalenţă care va fi elementul prim al laticii $F/\sim$:

$$0 = \widetilde{\varphi}, \text{ pentru } \neg\varphi\in T.$$

Pentru orice formulă φ, avem

$$\vdash \varphi\rightarrow\varphi \qquad \text{(Lema 1)}$$

Conform definiţiei conectorului $\rightarrow$, aceasta este totuna cu:

$$\vdash \neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$$

În particular, punînd în locul lui φ pe $\neg\varphi$, se obţine:

$$\vdash \neg(\neg\varphi\wedge\neg\neg\varphi)$$

adică

$$\vdash \varphi\vee\neg\varphi$$

Din cele două relații demonstrate mai sus rezultă:

$$\widetilde{\varphi\wedge\neg\varphi}=0 \text{ şi } \widetilde{\varphi\vee\neg\varphi}=1$$

ceea ce se mai scrie astfel

$$\tilde{\varphi}\wedge\widetilde{\neg\varphi}=0 \text{ şi } \varphi\vee\widetilde{\neg\varphi}=1$$

Aceste două egalități arată că $\widetilde{\neg\varphi}$ este complementul lui φ, pentru orice formulă φ :

$$\neg\tilde{\varphi}=\widetilde{\neg\varphi}$$

In concluzie, $F/\sim$ este o algebră Boole care verifică cele două proprietăți ale Propoziției 1.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Făcînd legătura cu algebrele Lindenbaum-Tarski pentru sistemul formal al calculului propozițional, observăm că aici am considerat numai cazul $\Gamma=\emptyset$, fiindu-ne suficient pentru scopurile noastre. In notațiile de acolo, am avea $F/\sim\ = B_{\emptyset}$.

Pentru orice formulă de forma $(\forall x)\varphi(x)$ vom nota cu $\varphi(y)$ formula obținută din $\varphi(x)$ înlocuind pe x cu y peste tot unde x apare ca variabilă liberă în $\varphi(x)$.

<u>PROPOZIȚIA 2</u>: Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L_{χ}, în algebra Lindenbaum-Tarski $F/\sim$ este verificată egalitatea:

$$\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}=\bigwedge\left\{\widetilde{\varphi(v)}\mid v\in V\right\}$$

<u>Demonstrație</u>. Pentru orice $v\in V$, avem

$$\vdash(\forall x)\varphi(x)\to\varphi(v) \qquad \text{(A 10)}$$

deci

$$(\forall x)\varphi(x)\leqslant\widetilde{\varphi(v)}, \text{ pentru orice } v\in V.$$

Aceasta arată că $(\forall x)\varphi(x)$ este un minorant al mulțimii

$$\left\{\widetilde{\varphi(v)}\mid v\in V\right\}$$

Să arătăm că $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}$ este cel mai mare minorant al acestei mulțimi. Pentru aceasta, să considerăm o formulă Ψ astfel încît

$$\tilde{\Psi}\leqslant\widetilde{\varphi(v)}, \text{ pentru orice } v\in V.$$

Fie v o variabilă ce nu apare în Ψ sau $\varphi(x)$. Vom avea

$$\vdash \Psi\to\varphi(v)$$

conform definiției relației de ordine $\leqslant$ în algebra Lindenbaum-Tarski. Aplicînd generalizarea, se obține

$$\vdash(\forall v)(\Psi\to\varphi(v))$$

Din această relație și din axioma A 11:

$$\vdash(\forall v)(\Psi\to\varphi(v))\to(\Psi\to(\forall v)\varphi(v))$$

rezultă prin modus ponens:

(a) $\qquad \vdash\Psi\to(\forall v)\varphi(v)$

Conform A 10:

$$\vdash(\forall v)\varphi(v)\to\varphi(x)$$

de unde prin generalizare rezultă

$$\vdash(\forall x)((\forall v)\varphi(v)\to\varphi(x))$$

Din această relație și din axioma A 11:

$$\vdash(\forall x)((\forall v)\varphi(v)\to\varphi(x))\to\left[(\forall v)\varphi(v)\to(\forall x)\varphi(x)\right]$$

rezultă prin modus ponens:

(b) $\qquad \vdash(\forall v)\varphi(v)\to(\forall x)\varphi(x)$

Lema 2, § 1 arată că:

$$\vdash [(\forall v)\varphi(v) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)] \rightarrow [(\psi \rightarrow (\forall v)\varphi(v)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi(x))]$$

Din această relaţie şi din (a),(b) rezultă, aplicînd de două ori modus ponens:

$$\vdash \psi \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$$

Deci

$$\widetilde{\psi} \leqslant \widetilde{(\forall x)\varphi(x)},$$

de unde rezultă că $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}$ este cel mai mare minorant al mulţimii

$$\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\}.$$

<u>Corolar</u>: Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L_λ, avem:

$$\widetilde{(\exists x)\varphi(x)} = \bigvee \{\widetilde{\varphi(v)};\ v \in V\}$$

<u>Demonstraţie</u>: Din relaţia:

$$\widetilde{\neg(\exists x)\varphi(x)} = \widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)} = \bigwedge \{\widetilde{\neg\varphi(v)} \mid v \in V\}$$

rezultă, prin aplicarea legilor lui de Morgan:

$$\begin{aligned} \widetilde{(\exists x)\varphi(x)} &= \neg\widetilde{\neg(\exists x)\varphi(x)} \\ &= \neg\bigwedge\{\neg\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\} \\ &= \bigvee\{\neg\neg\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\} \\ &= \bigvee\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\} \end{aligned}$$

§ 3. <u>M O D E L E</u>

Fie $\lambda: N \rightarrow N$ o funcţie oarecare şi

$$\mathcal{A} = < A, \{R_n\}_{n \in N} >$$

o λ-structură. Considerăm o formulă $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ a lui L_λ cu variabilele libere aflate în mulţimea $\{x_1,\dots,x_m\}$.

Pentru orice elemente $a_1,\dots,a_m$ ale lui A, vom defini acum relaţia:

„$a_1,\dots, a_m$ <u>satisfac</u> formula $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ în $\mathcal{A}$", care va fi scrisă prescurtat

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_m].$$

Această definiţie este dată prin inducţie asupra modului de formare al formulelor sistemului formal L_λ:

(1) Dacă φ este de forma $x = y$ şi $a, b \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models (x = y)[a,b] \Longleftrightarrow a = b$$

(2) Dacă φ este de forma $P_n(x_1,\dots,x_{\lambda(n)})$ şi $a_1,\dots$, $\dots, a_{\lambda(n)} \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models P_n[a_1,\dots,a_{\lambda(n)}] \Longleftrightarrow (a_1,\dots,a_{\lambda(n)}) \in R_n.$$

(3) Dacă φ este de forma $\neg\psi(x_1,\dots,x_m)$ şi $a_1,\dots,a_m \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models \neg\psi[a_1,\dots,a_m] \Longleftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi[a_1,\dots,a_m]$$

(4) Dacă φ este de forma $\psi(x_1,\dots,x_n) \wedge \chi(x_1,\dots,x_m)$ şi $a_1,\dots,a_n \in A$, atunci:

$$\mathcal{A} \models (\psi \wedge \chi)[a_1,\dots,a_m] \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_m] \text{ şi } \mathcal{A} \models \chi[a_1,\dots,a_m]$$

(5) Dacă φ este de forma $(\exists x)\psi(x,x_1,\dots,x_m)$ şi $a_1,\dots,a_m \in A$, atunci:

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\psi\ [a_1,\dots,a_m] \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{există } b \in A, \text{ astfel încît} \\ \mathcal{A} \models \psi[a, a_1,\dots,a_m]. \end{cases}$$

Exerciţii

(1) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[a_1,\dots,a_n] \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n]$

(2) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[a_1,\dots,a_n] \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{dacă } \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \text{ atunci} \\ \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n] \end{array} \right.$

(3) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[a_1,\dots,a_n] \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \text{ dacă şi numai dacă} \\ \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n] \end{array} \right.$

(4) $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[a_1,\dots,a_n] \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \models \varphi[b,a_1,\dots,a_n], \\ \text{pentru orice } b \in B \end{array} \right.$

Dacă avem un enunţ φ, atunci mulţimea variabilelor sale libere este vidă. In acest caz, conceptul definit mai sus:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$$

nu depinde de elementele $a_1,\dots,a_n \in A$, deci vom scrie simplu:

$$\mathcal{A} \models \varphi .$$

Spunem că un enunţ φ este <u>adevărat</u> sau <u>valid</u> în λ- structura $\mathcal{A}$, dacă $\mathcal{A} \models \varphi$. In acest caz, $\mathcal{A}$ se numeşte <u>model al lui</u> φ.

Dată o mulţime Σ de enunţuri, vom spune că $\mathcal{A}$ este model al lui Σ dacă $\mathcal{A} \models \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Sigma$. Notăm acest lucru: $\mathcal{A} \models \Sigma$

Un enunţ φ se numeşte <u>universal adevărat</u> dacă orice λ - structură este model al lui φ.

O λ- structură este <u>model</u> al unei formule $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ dacă

$$\mathcal{A} \models (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)$$

O formulă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ se numeşte <u>universal adevărată</u> dacă $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este un enunţ universal adevărat.

Dacă φ este o formulă universal adevărată, atunci vom nota aceasta prin $\models \varphi$.

<u>PROPOZIŢIA 1</u>. Dacă φ este o formulă oarecare a lui L_λ, atunci

$$\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$$

<u>Demonstraţie</u>: Prin inducţie asupra modului de obţinere al teoremelor lui L_λ. Tratăm întîi cazul axiomelor:

(A 1). Este suficient să arătăm că pentru orice λ- structură $\mathcal{A}$, avem

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi \rightarrow \varphi$$

Ţinînd seama de Exerciţiul 2, aceasta rezultă imediat. In concluzie, avem

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

(A 2). Presupunem că

(a) $\quad \mathcal{A} \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

şi vrem să arătăm că

(b) $\quad \mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

A demonstra (b) este echivalent cu a demonstra că

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \chi$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi,\ \mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \chi$$

Conform (a), din $\mathcal{A} \models \varphi$ rezultă $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \chi$. Din $\mathcal{A} \models \varphi$ şi $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi$ rezultă $\mathcal{A} \models \psi$. De asemenea, din $\mathcal{A} \models \psi$ şi $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \chi$ rezultă $\mathcal{A} \models \chi$

(A 3). Presupunem că

(c) $\quad \mathcal{A} \models \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$

şi vom arăta că

(d) $\quad \mathcal{A} \models \psi \rightarrow \varphi$

Pentru a stabili pe (d), presupunem că $\mathcal{A} \models \psi$, deci $\mathcal{A} \not\models \neg\psi$ atunci din (c) va rezulta că $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, deci $\mathcal{A} \models \varphi$

In mod analog se arată pentru axiomele A 4 - A 9.

(A 1o). Va trebui să arătăm că __închiderea__ axiomei A 1o este validă în $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \models (\forall y)\left[(\forall x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)\right]$$

Fie $b \in A$. Vom arăta că

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \rightarrow \varphi[b]$$

ceea ce este totuna cu

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[b]$$

deoarece $\forall x\varphi(x)$ este un enunţ.

Dar

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a]\text{, pentru orice } a \in A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[b]$$

(A 11). Presupunînd că

(e) $\mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$

şi că φ nu conţine pe x ca variabilă liberă, vom arăta că

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow (\forall x)\psi$$

Pentru aceasta, fie $\mathcal{A} \models \varphi$ şi $a \in A$. Din (e) rezultă

$$\mathcal{A} \models [\varphi \rightarrow \psi]\ (a)$$

adică

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a]$$

deoarece φ nu conţine pe x ca variabilă liberă.

Presupunînd că ψ a fost obţinută prin modus ponens

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

şi că am arătat că $\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)$, va trebui să deducem că $\mathcal{A} \models \psi$. Aceasta rezultă din Exerciţiul (2).

A rămas să mai tratăm cazul cînd $(\forall x)\varphi$ a fost obţinută prin generalizare din φ.

Dacă $\varphi = \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$, atunci presupunem că închiderea lui $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ este validă în $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models (\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\forall x)\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$$

Rezultă că închiderea lui $(\forall x)\varphi$, care este totuna cu închiderea lui φ, este validă în $\mathcal{A}$.

__Definiţia 1__. O mulţime Σ de formule se numeşte __consistentă__ sau __necontradictorie__ dacă nu există nici o formulă $\varphi \in F$ astfel încît

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \text{şi} \quad \Sigma \vdash \neg\varphi.$$

__PROPOZIŢIA 2__. $\emptyset$ este consistentă.

__Demonstraţie__: Presupunem prin absurd că există $\varphi \in F$ astfel încît $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \vdash \neg\varphi$, deci $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$. Conform Propoziţiei 1, avem $\models \varphi$ şi $\models \neg\varphi$, deci pentru orice λ structură $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi' \quad \text{şi} \quad \mathcal{A} \models \neg\varphi'$$

unde φ' este închiderea formulei φ. Contradicţia este evidentă.

__OBSERVAŢIE__. Propoziţia 1 spune că orice teoremă a sistemului formal L_λ este un enunţ universal adevărat. Reprezentăm aceasta simbolic astfel:

$$\text{sintactic} \Longrightarrow \text{semantic}$$

Din Propoziţia 2 s-a obţinut direct faptul că o formulă a lui L_λ nu poate fi teoremă în acelaşi timp cu negaţia ei, ceea ce exprimă __non-contradicţia__ lui L_λ. De aceea, putem afirma că esenţa faptului că sistemul formal al calculului predicatelor este necontradictoriu constă în implicaţia: „sintactic $\Longrightarrow$ semantic".

Reciproca Propoziţiei 1, va fi <u>teorema de completitudine a lui Gödel</u>.

<u>Propoziţia 3.</u> Pentru orice formulă φ a lui L_λ, avem

$$\models \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie σ o formulă a lui L_λ pentru care $\nvdash \sigma$. Vom arăta că există o λ- structură $\mathcal{A}$ astfel încît $\mathcal{A} \nvDash \sigma'$, unde σ' este închiderea lui σ. Va rezulta că σ nu este universal adevărată ($\nvDash \sigma$), deci demonstraţia va fi terminată cu aceasta.

Conform Lemei 6, § 1, avem $\nvdash \sigma'$. In algebra Lindenbaum-Tarski $F/\sim$ acest lucru se exprimă prin $\widetilde{\sigma'} \neq 1$, deci $\widetilde{\neg\sigma'} = \neg\widetilde{\sigma'} \neq 0$

Conform Propoziţiei 2, § 2, pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L este valabilă relaţia

(i) $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)} = \bigwedge\left\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\right\}$

Cum mulţimea formulelor lui L_λ este numărabilă, în (i) avem o mulţime numărabilă de infimumuri. Aplicînd teorema Rasiowa-Sikorski (vezi Capitolul 1, § 8) rezultă existenţa unui ultrafiltru Δ al lui $F/\equiv$ astfel încît $\widetilde{\neg\sigma'} \in \Delta$ şi pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L_λ să avem:

(ii) $(\forall x)\varphi(x) \in \Delta \Longleftrightarrow \varphi(v) \in V$, pentru orice $v \in V$.

Definim pe V următoarea relaţie binară $\sim$:

$$x \approx y \Longleftrightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta$$

Conform axiomei A 12, avem $\vdash x = y$, deci $\widetilde{x = y} = 1 \in \Delta$. Rezultă $x \approx x$, deci $\approx$ este reflexivă.

Din exerciţiul (a), § 1 rezultă

$$\vdash x = y \rightarrow y = x$$

$$\vdash x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$$

De aici se obţine

$$\widetilde{(x = y)} \leqslant \widetilde{(y = x)}$$

$$\widetilde{(x = y)} \wedge \widetilde{(y = z)} \leqslant \widetilde{(x = z)}$$

Din aceste relaţii şi din proprietăţile filtrului avem:

$x \approx y \Longrightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta \Longrightarrow \widetilde{(y = x)} \in \Delta \Longrightarrow y \approx x$

$x \approx y,\ y \approx z \Longrightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta\ ,\ \widetilde{(y = z)} \in \Delta$

$\qquad \Longrightarrow \widetilde{(x = y)} \wedge (y = z) \in \Delta$

$\qquad \Longrightarrow (x = z) \in \Delta$

$\qquad \Longrightarrow x \approx z$

In concluzie, $\approx$ este o relaţie de echivalenţă pe V. Notăm cu $A = V/\approx$ şi cu $\hat{x}$ clasa de echivalenţă a lui $x \in V$.

Pentru orice $n \in N$, definim relaţia $\lambda(x)$ - ară R_n pe A prin

(*) $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{\lambda(n)}) \in R_n \Longleftrightarrow \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})} \in \Delta$

Să arătăm că definiţia nu depinde de reprezentanţi, adică

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \approx y_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{\lambda(n)} \approx y_{\lambda(n)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})} \in \Delta \Longleftrightarrow \widetilde{P_n(y_1, \ldots, y_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Presupunem deci că

$$\widetilde{(x_i = y_i)} \in \Delta\ ,\ i = 1, \ldots, \lambda(n).$$

Din Exerciţiul (b), § 1 rezultă

$$\widetilde{(x_1 = y_1)} \wedge \ldots \wedge \widetilde{(x_{\lambda(n)} = y_{\lambda(n)})} \leqslant \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)}) \rightarrow P_n(y_1, \ldots, y_{\lambda(n)})}$$

Conform proprietăţilor filtrului, rezultă

$$\widetilde{(x_1 = y_1)} \wedge \ldots \wedge \widetilde{(x_{\lambda(n)} = y_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Din această relaţie şi din inegalitatea de mai sus se obţine

$$\widetilde{P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})} \longrightarrow \widetilde{P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})} \quad .$$

Dacă $\widetilde{P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})}\in\Delta$, atunci din relaţia precedentă rezultă

$$\widetilde{P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})}\in\Delta .$$

In mod analog se arată că

$$P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})\in\Delta \Longrightarrow P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})\in\Delta .$$

Prin inducţie asupra modului de formare a formulelor lui L_λ, vom arăta că pentru fiecare formulă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ a lui L_λ ale cărei variabile libere se află printre $x_1,\ldots,x_n$, este valabilă relaţia:

$$(**) \quad \mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

pentru orice $v_1,\ldots,v_n\in V$.

Pentru formule atomice, relaţia (∗∗) este chiar relaţia (∗).

Dacă $\varphi=\neg\psi(x_1,\ldots,x_n)$ şi presupunem (∗∗) adevărată pentru ψ, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \mathcal{A}\not\models\psi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi(v_1,\ldots,v_n)}\notin\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \neg\widetilde{\psi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

Dacă $\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$ şi presupunem (∗∗) adevărată pentru ψ_1 şi ψ_2, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \mathcal{A}\models\psi_1[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \text{ şi } \mathcal{A}\models\psi_2[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta \text{ şi } \widetilde{\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)}\wedge\widetilde{\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

$$\Longleftrightarrow \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)\wedge\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta .$$

Din (ii) deducem, pentru orice formulă $\varphi(x)$:

$$\widetilde{(\exists x)\varphi(x)}\in\Delta \Longleftrightarrow \neg\widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)}\in\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)}\notin\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \text{există } v\in V, \text{ astfel încît } \widetilde{\neg\varphi(v)}\in\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \text{există } v\in V, \text{ astfel încît } \widetilde{\varphi(v)}\in\Delta$$

ţinînd cont de proprietăţile de ultrafiltru ale lui Δ.

Presupunem acum că $\varphi=(\exists x)\psi(x, x_1,\ldots,x_n)$ şi că (∗∗) este adevărată pentru $\psi(x, x_1,\ldots,x_n)$. Atunci avem:

$$\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \Longleftrightarrow \text{există } \hat{v}\in A, \text{ astfel încît } \mathcal{A}\models\psi[\hat{v},\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]$$
$$\Longleftrightarrow \text{există } v\in V, \text{ astfel încît } \widetilde{\psi(v,v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{\exists x\psi(x, v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta .$$

Cu aceasta, relaţia (∗∗) a fost demonstrată.

Din (∗∗) şi din faptul că $\widetilde{\neg\sigma'}\in\Delta$, rezultă $\mathcal{A}\models\neg\sigma'$ deci $\mathcal{A}\not\models\sigma'$. Am arătat deci că σ' nu este valid în $\mathcal{A}$, deci $\not\models\sigma$. Teorema a fost demonstrată.

Propoziţiile 1 şi 3 pot fi formulate împreună astfel:

<u>PROPOZITIA 4</u>. Pentru orice formulă φ a lui L_λ, avem

$$\vdash\varphi \Longleftrightarrow \models\varphi .$$

<u>OBSERVATIE</u>. Propoziţia 4 identifică teoremele lui L_λ cu enunţurile universal adevărate. Simbolic putem formula aceasta astfel:

$$\text{sintactic} \Longleftrightarrow \text{semantic.}$$

EXERCIȚII LA CAPITOLUL IV

1. Să se demonstreze că următoarele formule sînt teoreme ale lui L_λ :

(a) $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \rightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$

(b) $(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$

(c) $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \rightarrow (\forall x)\varphi(x,x)$

(d) $(\exists x)\varphi(x,x) \rightarrow (\exists x)(\exists y)\varphi(x,y)$

(e) $\neg(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$

(f) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$

(g) $(\forall x)(\varphi(x)\wedge\Psi(x)) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\Psi(x))$

(h) $(\exists x)(\varphi(x)\vee\Psi(x)) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\varphi(x))$

(i) $(\forall x)(\varphi\wedge\Psi(x)) \rightarrow \varphi\wedge(\forall x)\Psi(x)$, dacă φ nu conține pe x ca variabilă liberă.

(j) $(\exists x)(\varphi\vee\Psi(x)) \rightarrow \varphi\vee(\exists x)\Psi(x)$, dacă φ nu conține pe x ca variabilă liberă.

(l) $(\forall x)(\varphi\vee\Psi(x)) \rightarrow \varphi\vee(\forall x)\Psi(x)$, dacă φ nu conține pe x ca variabilă liberă.

(m) $(\exists x)(\varphi\wedge\Psi(x)) \rightarrow \varphi\wedge(\exists x)\Psi(x)$, dacă φ nu conține pe x ca variabilă liberă.

(n) $(\exists x)(\varphi(x)\wedge\Psi(x)) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\Psi(x))$

(o) $((\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\Psi(x)) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x)\vee\Psi(x))$

(p) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \Psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\Psi(x))$, dacă x nu este variabilă liberă a lui φ.

(q) $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \Psi)$, dacă x nu este variabilă liberă a lui Ψ.

(r) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \Psi)$, dacă x nu este variabilă liberă a lui Ψ.

(s) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \Psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\Psi(x))$, dacă x nu este variabilă liberă a lui φ.

(t) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \Psi(x)) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\Psi(x))$

2. Să se arate că dacă $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \Psi)$, atunci:

(a) $\Sigma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\Psi)$

(b) $\Sigma \vdash (\varphi\wedge\gamma \rightarrow \Psi\wedge\gamma)$

(c) $\Sigma \vdash (\varphi\vee\gamma \rightarrow \Psi\vee\gamma)$

(d) $\Sigma \vdash ((\varphi \rightarrow \gamma) \rightarrow (\Psi \rightarrow \gamma))$

(e) $\Sigma \vdash ((\gamma \rightarrow \varphi) \rightarrow (\gamma \rightarrow \Psi))$

3. Să se arate că dacă $\Sigma \vdash (\varphi(x) \rightarrow \Psi(x))$, atunci

$$\Sigma \vdash ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\Psi(x))$$

$$\Sigma \vdash ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\Psi(x))$$

4. Nu există nici o formulă φ a lui L_λ astfel încît să avem

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ și } \Sigma \vdash \neg\varphi$$

5. Notăm cu $T(\Sigma)$ mulțimea formulelor deduse din ipotezele Σ

$$T(\Sigma) = \{\varphi \in F \mid \Sigma \vdash \varphi\}$$

Să se arate că

$\Sigma \cup T \subset T(\Sigma)$

$T(\Sigma)$ este închisă la modus ponens

$\Sigma \subset T \Rightarrow T(\Sigma) = T$

$\Sigma \subset \Sigma' \Rightarrow T(\Sigma) \subset T(\Sigma')$

$T(T(\Sigma)) = T(\Sigma)$

6. $\Sigma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă există $\Gamma \subset \Sigma$ finită astfel încît $\Gamma \vdash \varphi$.

7. Dacă $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, ceea ce se scrie simbolic

$$\frac{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Sigma, \varphi \vdash \psi}$$

8. $$\frac{\Sigma, \varphi \vdash \psi}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)}$$

<u>Notă</u>: Exercițiul 8 reprezintă <u>teorema de deducție</u> pentru L_λ.

9. Pentru orice mulțime de formule sînt echivalente afirmațiile:

(i) $\Sigma \vdash \varphi$

(ii) Există un număr finit de formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ale lui Σ, astfel încît:

$$\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi))\ldots) \in T.$$

10. $$\frac{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi), \Sigma \vdash (\psi \to \chi)}{\Sigma \vdash (\varphi \to \chi)}$$

11. $$\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\neg \varphi\} \vdash \psi$$

12. $$\frac{\Sigma \vdash \neg \varphi}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)}$$

13. $$\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \neg\neg \varphi$$

14. O mulțime Δ de formule se numește <u>sistem deductiv</u> dacă

a) $T \subset \Delta$;

b) $\Delta \neq F$;

c) Δ este închisă la modus ponens:

$$\varphi \in \Delta, (\varphi \to \psi) \in \Delta \Longrightarrow \psi \in \Delta$$

Să se arate că $T(\Sigma) = \Sigma$, pentru orice sistem deductiv Σ.

15. Orice intersecție de sisteme deductive este un sistem deductiv.

16. Mulțimea sistemelor deductive ordonate de incluziune este inductivă.

17. Orice sistem deductiv este inclus într-un sistem deductiv maximal.

18. Pentru orice sistem deductiv Σ, sînt echivalente afirmațiile:

(i) Σ este maximal.

(ii) Pentru orice $\varphi \in F$, $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \neg \varphi$

19. Orice sistem deductiv Σ este intersecția tuturor sistemelor deductive maximale ce includ pe Σ.

20. Dacă Σ este un sistem deductiv maximal, atunci:

$$\varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$$

$$\neg \varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Sigma$$

$$\varphi \vee \psi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma \text{ sau } \psi \in \Sigma$$

$$\varphi \wedge \psi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma \text{ și } \psi \in \Sigma$$

$$(\varphi \to \psi) \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Sigma \text{ sau } \psi \in \Sigma$$

21. Fie $F/\sim$ algebra Lindenbaum-Tarski a lui L_λ. Pentru orice $\Sigma \subset F$ sînt echivalente afirmațiile:

a) Σ este sistem deductiv.

b) $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\varphi} \mid \varphi \in \Sigma\}$ este un filtru propriu al lui $F/\sim$.

22. In condițiile exercițiului precedent sînt echivalente afirmațiile:

a) Σ este un sistem deductiv maximal.

b) Σ este un ultrafiltru al lui $F/\sim$.

23. Să se descrie funcţia λ şi sistemul formal al calculului predicatelor corespunzător următoarelor clase de structuri:

   a) mulţimi parţial ordonate ;

   b) mulţimi total ordonate ;

   c) latici distributive ;

   d) algebre Boole ;

   e) grupuri ;

   f) inele ;

   g) corpuri.

Cum se scriu axiomele structurilor respective în sistemele formale respective?

CAPITOLUL 5

Algebre Lukasiewicz şi logici cu mai multe valori

Logicile cu mai multe valori (polivalente) au fost introduse şi studiate de logicianul polonez J. Lukasiewicz în urma unor cercetări legate de studiul modalităţilor. Legate de aceste logici, Gr. C. Moisil a studiat începînd din 1940 o clasă de structuri algebrice (numite algebre Lukasiewicz în onoarea logicianului polonez) care sînt reflectarea pe plan algebric a logicilor lui Lukasiewicz. Astăzi teoria algebrelor Lukasiewicz este destul de bogată, atît prin rezultatele lui Moisil şi ale elevilor săi, cît şi prin contribuţia a numeroşi cercetători străini. In primul paragraf prezentăm sumar ideile care l-au condus pe Lukasiewicz în considerarea logicilor cu mai multe valori. Paragraful 2 prezintă o serie de rezultate privind algebrele Lukasiewicz, cel mai important fiind teorema de reprezentare a lui Moisil. In sfîrşit, ultimul paragraf conţine cîteva elemente incipiente ale logicii trivalente neformalizate, făcîndu-se legătura cu algebrele Lukasiewicz trivalente.

§ 1. IDEI CARE AU CONDUS LA APARITIA LOGICILOR CU MAI MULTE VALORI

Logica trivalentă a apărut ca urmare a studierii propoziţiilor de forma „este posibil ca..." sau „este necesar ca...". Pentru fixarea ideilor, să considerăm o propoziţie oarecare p. Vom nota cu Mp[1] propoziţia „p este posibil".

1) Simbolul M derivă de la „möglich" (posibil).

Putem forma următoarele combinaţii de propoziţii:

(1) „p este fals" $\neg p$

(2) „p este posibil" Mp

(3) „p nu este posibil" $\neg Mp$

(4) „este posibil non-p" $M \neg p$

(5) „nu este posibil non-p" $\neg M \neg p$.

Propoziţia (5) este echivalentă cu „nu este posibil ca p să fie falsă", care este totuna cu „p este necesar adevărată" sau pe scurt „p este necesar". Vom nota această propoziţie cu Np. Propoziţia (3) se va mai citi „p este imposibil".

Lukasiewicz consideră că următoarele propoziţii trebuiesc acceptate ca evidente:

(I) $\neg Mp \rightarrow \neg p$

(II) $\neg p \rightarrow \neg Mp$

(III) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(IV) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

(V) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

(VI) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Prima propoziţie este „dacă p este imposibil, atunci p este fals", iar a doua este „dacă p este fals, atunci p nu este posibil". Celelalte patru propoziţii nu fac să intervină conectorul M şi nu comportă nici o discuţie.

La aceste propoziţii, Lukasiewicz adaugă propoziţiile de forma:

„Pentru o anumită propoziţie p, este posibil p şi este posibil non-p". Lukasiewicz dă următorul exemplu: „Se poate ca acest bolnav să moară, dar se poate să şi nu moară".

Pentru formularea simbolică a acestei propoziţii este necesară introducerea unui cuantificator particular Σ :

„ Σp = pentru un anumit p".

Propoziţia de mai sus ia următoarea formă simbolică:

VII. $\Sigma p\ (Mp \wedge \neg Mp)$.

Din propoziţiile (I) - (VI) se pot deduce următoarele propoziţii:

(a) $p \rightarrow Mp$

(b) $Mp \rightarrow p$

Cu alte cuvinte, orice propoziţie p este echivalentă cu propoziţia „p este posibil". Aceasta ar face superfluă considerarea propoziţiilor de tipul „p este posibil", ceea ce din punct de vedere real nu este acceptabil.

In prezenţa propoziţiei (VII) se poate deduce următoarea propoziţie :

(c) Mp.

Aplicînd modus ponens, din (b) şi (c) se deduce că orice propoziţie este adevărată, ceea ce arată contradicţia propoziţiilor acceptate ca axiome mai sus.

Aceste constatări l-au condus pe Lukasiewicz la concluzia următoare: principiul terţiului exclus, după care orice propoziţie p este adevărată sau falsă, nu funcţionează pentru propoziţii de forma „p este posibil".

De pildă, propoziţia „Anul viitor, la 1 septembrie, este posibil să plouă la Bucureşti" nu este nici adevărată, nici falsă.

In mod necesar se impune considerarea unei a treia valori de adevăr: „posibilul" , obţinîndu-se astfel punctul de plecare pentru ceea ce se cheamă „logica trivalentă".

<u>OBSERVAȚIE</u>. Aceste considerații aparțin lui J. Lukasiewicz. Pentru consultarea lor în detaliu și pentru demonstrarea unor afirmații făcute în acest paragraf, trimitem cititorul la cartea lui A. Dumitriu „Logica polivalentă", Cap.V, pag.157-2o7.

§ 2. ALGEBRE LUKASIEWICZ n- VALENTE

Algebrele Lukasiewicz n-valente au fost introduse de Gr.C. Moisil în anul 194o ca modele algebrice pentru logicile cu mai multe valori ale lui Lukasiewicz. Înainte de-a prezenta sistemul formal al logicii trivalente, vom studia cîteva proprietăți ale algebrilor Lukasiewicz n-valente.

Vom presupune în continuare că n este un număr natural fixat.

<u>Definiția 1</u>. O <u>algebră Lukasiewicz n-valentă</u> este o latice distributivă

$$(L, \vee, \wedge, o, 1)$$

cu prim element 0 și cu ultim element 1, astfel încît:

(I) Există o operație unară $\neg : L \longrightarrow L$ cu proprietățile:

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

$$\neg\neg x = x,$$

pentru orice $x, y \in L$.

(II) Există (n-1) aplicații $\sigma_i : L \longrightarrow L$, $i=1,\dots,n-1$ cu proprietățile:

a) $\sigma_i(o) = o$; $\sigma_i(1) = 1$, pentru $i = 1,\dots, n-1$.

b) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i(x) \vee \sigma_i(y)$, $\sigma_i(x \wedge y) = \sigma_i(x) \wedge \sigma_i(y)$, pentru $i = 1,\dots, n-1$ și $x, y \in L$.

c) $\sigma_i(x) \vee \neg\sigma_i(x) = 1$, $\sigma_i(x) \wedge \neg\sigma_i(y) = o$, pentru orice $x \in L$ și $i = 1,\dots, n-1$.

d) $\sigma_h \circ \sigma_k = \sigma_k$, pentru $h, k = 1,\dots, n-1$.

e) $\sigma_i(\neg x) = \neg\sigma_j(x)$, pentru $i + j = n$ și pentru orice $x \in L$.

f) $\sigma_1(x) \leqslant \sigma_2(x) \leqslant \dots \leqslant \sigma_{n-1}(x)$, pentru orice $x \in L$.

g) Dacă $\sigma_i(x) = \sigma_i(y)$ pentru orice $i = 1,\dots, n-1$, atunci $x = y$.

<u>OBSERVAȚIE</u>: Axioma g) se numește <u>principiul determinării al lui Moisil</u>.

$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ se numesc <u>endomorfisme chrysipiene</u>.

<u>Definiția 2</u>. Dacă L, L' sînt două algebre Lukasiewicz n-valente, atunci o funcție $f: L \longrightarrow L'$ se numește <u>morfism de algebre Lukasiewicz n-valente</u> dacă pentru orice $x, y \in L$ avem:

1) $f(o) = o$; $f(1) = 1$;

2) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

3) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

4) $f(\sigma_i(x)) = \sigma_i(f(x))$.

<u>Lema 1</u>. Dacă $f: L \longrightarrow L'$ este un morfism de algebre Lukasiewicz n-valente atunci $f(\neg x) = \neg f(x)$, pentru orice $x \in L$.

<u>Demonstrație</u>. Din relațiile

$$\sigma_i(x) \vee \neg\sigma_i(x) = 1, \quad \sigma_i(x) \wedge \neg\sigma_i(x) = o$$

rezultă, prin aplicarea lui f.

$$\sigma_i(f(x)) \vee f(\neg\sigma_i(x)) = o, \quad \sigma_i(f(x)) \wedge f(\neg\sigma_i(x) = o.$$

De asemenea, avem relațiile:

$$\sigma_i(f(x)) \vee \neg f(\sigma_i(x)) = \sigma_i(f(x)) \vee \neg \sigma_i(f(x)) = 1$$
$$\sigma_i(f(x)) \wedge \neg f(\sigma_i(x)) = \sigma_i(f(x)) \wedge \neg \sigma_i(f(x)) = 0$$

Deci $f(\neg \sigma_i(x))$ şi $\neg f(\sigma_i(x))$ verifică proprietăţile de complement ale lui $\sigma_i(f(x))$. Din unicitatea complementului unui element într-o latice distributivă cu 0 şi 1, rezultă:

$$f(\neg \sigma_i(x)) = \neg f(\sigma_i(x)), \text{ pentru orice } i = 1,\dots, n-1.$$

Conform acestei relaţii şi a axiomei e) din Definiţia 1 rezultă, pentru $i + j = n$:

$$\sigma_i(f(\neg x)) = f(\sigma_i(\neg x)) = f(\neg \sigma_j(x)) = \neg f(\sigma_j(x)) =$$
$$= \neg \sigma_j(f(x)) = \sigma_i(\neg f(x)).$$

Din $\sigma_i(f(\neg x)) = \sigma_i(\neg f(x))$ pentru orice $i = 1,\dots, n-1$, se obţine $f(\neg x) = \neg f(x)$, conform principiului determinării.

EXEMPLE 1) Considerăm în mulţimea

$$L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

următoarele operaţii:

$$x \vee y = \max(x,y)$$
$$x \wedge y = \min(x,y)$$
$$x = 1 - x.$$

Definim funcţiile $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}: L \to L$ prin următorul tablou

x	$\sigma_1(x)$	$\sigma_2(x)$	...	$\sigma_{n-2}(x)$	$\sigma_{n-1}(x)$
0	0	0		0	0
$\frac{1}{n-1}$	0	0		0	1
$\frac{2}{n-1}$	0	0		1	1
$\vdots$					
$\frac{n-2}{n-1}$	0	1		1	1
1	1	1		1	1

Se poate verifica cu uşurinţă că L_n este o algebră Lukasiewicz n-valentă.

2). Detaliem exemplul 1) în cazul $n = 3$

$$L_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Scriem operaţiile lui L_3 sub formă de tabele:

$y \backslash x$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

$x \vee y$

$y \backslash x$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$x \wedge y$

x	x
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\neg x$

x	$\sigma_1(x)$	$\sigma_2(x)$
0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1
1	1	1

Exercițiu. După modelul Exemplului 2 de mai sus, să se trateze cazul n = 4 şi n = 5.

OBSERVAȚIE. Fie L o algebră Lukasiewicz trivalentă (n = 3). Pentru orice $x \in L$, aplicînd axioma e) din definiția 1 obținem:

$$\sigma_1(x) = \sigma_1(\neg\neg x) = \neg\, \sigma_2(\neg x)$$
$$\sigma_2(x) = \sigma_2(\neg\neg x) = \neg\, \sigma_1(\neg x)$$

Deci endomorfismele chrysipiene σ_1, σ_2 se pot exprima unul în funcție de celălalt.

Definiția 3. Un element x al unei algebre Lukasiewicz n-valente L se numeşte element chrysipian dacă $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 0$.

Lema 2. Un element $x \in L$ este chrysipian dacă şi numai dacă $\sigma_i(x) = x$, pentru orice $i = 1, \dots, n-1$.

Demonstrație: Dacă x este chrysipian, atunci $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 1$, deci

$$\sigma_i(x) \vee \sigma_i(\neg x) = 1$$
$$\sigma_i(x) \wedge \sigma_i(\neg x) = 0.$$

Conform unicității complementului într-o latice distributivă cu 0 şi 1, avem

$$\sigma_i(\neg x) = \neg\, \sigma_i(x), \text{ pentru orice } i = 1, \dots, n-1.$$

Dar $\sigma_i(\neg x) = \neg\, \sigma_{n-i}(x)$, deci $\neg\, \sigma_i(x) = \neg\, \sigma_{n-i}(x)$, de unde rezultă

$$\sigma_i(x) = \neg\neg\, \sigma_i(x) = \neg\neg\, \sigma_{n-i}(x) = \sigma_{n-i}(x)$$

Ținînd cont că

$$\sigma_1(x) \leq \sigma_2(x) \leq \dots \leq \sigma_{n-1}(x)$$

se obține că $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = \dots = \sigma_{n-1}(x)$.

Atunci, pentru orice i, j, avem $\sigma_j(x) = \sigma_i(x) = \sigma_j(\sigma_i(x))$. Conform principiului determinării rezultă $x = \sigma_i(x)$ pentru orice $i = 1, \dots, n-1$.

Afirmația reciprocă, rezultă din Definiția 1.

Vom nota cu C(L) mulțimea elementelor chrysipiene ale lui L, deci

$$C(L) = \left\{ x \mid \sigma_i(x) = x, \text{ pentru } i = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

PROPOZIȚIA 1. C(L) este algebră Boole.

Demonstrație. Conform Lemei 2, C(L) este închisă la $\wedge$, $\vee$ şi $0 \in C(L)$, $1 \in C(L)$. De asemenea, orice $x \in C(L)$ admite un complement.

Exerciții (i). Dacă $f: L \to L'$ este un morfism de algebre Lukasiewicz n-valente, atunci

$$C(f) = f|_{C(L)} : C(L) \to C(L')$$

este un morfism de algebre Boole.

(ii). O algebră Lukasiewicz n-valentă este o algebră Boole dacă şi numai dacă $L = C(L)$.

Dacă B este o algebră Boole oarecare, notăm

$$D(B) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B^{n-1} \;\middle|\; x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \right\}.$$

In D(B) introducem următoarele operații:

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \wedge (x'_1, \dots, x'_{n-1}) = (x_1 \wedge x'_1, \dots, x_{n-1} \wedge x'_{n-1})$$
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee (x'_1, \dots, x'_{n-1}) = (x_1 \vee x'_1, \dots, x_{n-1} \vee x'_{n-1})$$
$$\neg(x_1, \dots, x_{n-1}) = (\neg x_{n-1}, \dots, \neg x_1)$$
$$\sigma_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_i, \dots, x_i), \text{ pentru orice } i = 1, \dots, n-1.$$