FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Model de examen

Nume: ______________________

Prenume: ____________________

Grupa: ______________________

Indicaţii:

- În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

  Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

  - două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
  - un simbol de operaţie unară f şi un simbol de operaţie binară g;
  - trei simboluri de constante a, b, c.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Pentru orice Γ, $\Sigma \subseteq Form$, definim

$$\Gamma \vee \Sigma := \{\varphi \vee \psi \mid \varphi \in \Gamma,\ \psi \in \Sigma\}.$$

Să se arate că, pentru orice Γ, $\Sigma \subseteq Form$,

$$Mod(\Gamma \vee \Sigma) = Mod(\Gamma) \cup Mod(\Sigma).$$

(P2) [1 punct] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se demonstreze sintactic, fără a se face apel la Teorema de completitudine tare, că $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

(P3) [1 punct] Fie x o variabilă. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \not\models \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

(P4) [1 punct] Fie $\mathcal{L}_{Graf}$ limbajul de ordinul I al grafurilor, precum şi mulţimea de $\mathcal{L}_{Graf}$-enunţuri $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, definite precum în curs şi seminar. Să se axiomatizeze clasa $\mathcal{K}'$ a grafurilor în care orice două vârfuri sunt legate printr-un drum de lungime cel mult 2.

Partea II. Probleme de tip grilă

(P5) [1 răspuns corect] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_3$, $x_3 := v_2$ obţinem:
☐ A: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ B: $\mathcal{S}_4 = \{\square\}$.
☐ C: $\mathcal{T}_3^1 = \emptyset$.
☐ D: $\mathcal{S}_4 = \{\{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ E: $\mathcal{T}_3^0 = \{\{v_4, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.

(P6) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
☐ B: $\mathcal{S}$ nu este nici nesatisfiabilă, nici satisfiabilă.
☐ C: $\{\neg v_1\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.
☐ D: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
☐ E: $\{v_4\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.

(P7) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_3) \to v_1) \to v_2$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_1 \wedge v_2$ este FNC şi FND a lui φ.
☐ B: $v_0 \vee (v_3 \wedge \neg v_1) \vee v_2$ este FND a lui φ.
☐ C: $(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_1) \vee v_2$ este FND a lui φ.
☐ D: $v_0 \wedge (v_3 \vee v_2) \wedge (\neg v_1 \vee v_3)$ este FNC a lui φ.
☐ E: $(v_0 \vee v_2) \wedge (v_3 \vee v_2) \wedge (\neg v_1 \vee v_2)$ este FNC a lui φ.

(P8) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$?
☐ A: $\forall x(\varphi \vee \psi) \vDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ B: $\exists x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \varphi \to \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
☐ C: $\forall x(\varphi \vee \psi) \vDash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ D: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \varphi \vee \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.

☐ E: $\forall x(\varphi \land \psi) \vDash \varphi \lor \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.

(P9) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \forall x S(x) \land \neg \exists y S(y)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\forall x \forall y(\neg S(x) \land \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\exists x \forall y(\neg S(x) \land \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ C: $\forall x \forall y(S(x) \land \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\exists x \exists y \neg(\neg S(x) \lor S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\exists x \exists y(S(x) \lor S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.

(P10) [1 răspuns corect] Considerăm următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\psi := (v_1 \to (v_2 \to v_3)) \to (v_3 \lor \neg v_2 \lor \neg v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată (pentru orice evaluare e)?
☐ A: Dacă $e(v_2) = 1$ şi $e^+(\neg v_3) = 1$, atunci $e^+(v_3 \lor \neg v_2 \lor \neg v_1) = 0$.
☐ B: Dacă $e^+(v_1 \to (v_2 \to v_3)) = 1$, atunci $e(v_1) = e(v_2) = 0$ şi $e(v_3) = 1$.
☐ C: Dacă $e(v_1) = e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$.
☐ D: Dacă $e^+(v_3 \lor \neg v_2 \lor \neg v_1) = 0$, atunci $e(v_2) = 1$ şi $e(v_3) = 0$.
☐ E: $e^+(\psi) = 1$ numai dacă $e(v_1) = e(v_3) = 1$ şi $e(v_2) = 0$.