

# Fundamentele limbajelor de programare

## CURS 6

Andrei Sipoș<sup>1</sup>

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Info, Anul II

---

<sup>1</sup>Curs realizat împreună cu Traian Florin Șerbănuță.

Dacă avem o formulă  $\varphi$ ,  $n \in \mathbb{N}$  și  $k_1 < \dots < k_n$  cu  $FV(\varphi) = \{x_{k_1}, \dots, x_{k_n}\}$ , notăm cu  $\forall \varphi$  enunțul  $\forall x_{k_1} \dots \forall x_{k_n} \varphi$ .

Numim **literal** o formulă de forma  $\varphi$  sau  $\neg \varphi$ , unde  $\varphi$  este o formulă atomică relațională (literalul este, respectiv, **pozitiv** sau **negativ**). Numim **clauză** o formulă de forma  $\forall(L_1 \vee \dots \vee L_m)$ , unde  $L_1, \dots, L_m$  sunt literali. Numim **clauză definită** o clauză unde apare exact un literal pozitiv, anume pe prima poziție. Dacă  $A_0, \dots, A_m$  sunt formule atomice relaționale, atunci clauza

$$\forall(A_0 \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m)$$

se scrie și sub forma (cunoscută din limbajul Prolog)

$$A_0 \leftarrow A_1, \dots, A_m.$$

Un **program** va fi o mulțime finită de clauze definite. Un **scop definit** este o clauză în care apar doar literalii negativi.

De acum încolo, vom face presupunerea că există măcar o constantă în semnatură, aşadar  $\tilde{T}_\sigma \neq \emptyset$ . Notăm cu  $B_\sigma$  (numită **baza Herbrand**) mulţimea tuturor  $\sigma$ -formulelor atomice relaţionale fără variabile.

Spunem că o  $\sigma$ -structură este **Herbrand** atunci când universul ei este  $\tilde{T}_\sigma$ , iar simbolurile de funcţie sunt interpretate „de ele însele”. Observăm că o  $\sigma$ -structură Herbrand este complet determinată de mulţimea  $J$  a acelor formule din  $B_\sigma$  adevărate în ea. Pentru orice submulţime  $J$  a lui  $B_\sigma$  şi orice enunţ  $\varphi$ , spunem că  $J \models_H \varphi$  atunci când structura Herbrand asociată lui  $J$  satisface  $\varphi$ .

Dacă  $\mathcal{A}$  este o  $\sigma$ -structură, vom nota  $J_{\mathcal{A}} := \{\varphi \in B_\sigma \mid \mathcal{A} \models \varphi\}$ .

## Teoremă

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\sigma$ -structură și  $\varphi$  o clauză definită (sau un scop definit) cu  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Atunci  $J_{\mathcal{A}} \models_H \varphi$ .

## Demonstrație

Presupunem  $\varphi$  clauză definită. Avem că există  $m, n \in \mathbb{N}$ , formule atomice relaționale  $A_0, A_1, \dots, A_m$  și variabile  $x_1, \dots, x_n$  cu

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n (A_0 \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m).$$

Fie  $t_1, \dots, t_n \in \tilde{T}_\sigma$ . Notăm, pentru orice  $i$ ,

$A'_i := A_i[x_1 := t_1] \dots [x_n := t_n]$  și  $\varphi' := A'_0 \vee \neg A'_1 \vee \dots \vee \neg A'_m$ .

Vrem  $J_{\mathcal{A}} \models_H \varphi'$ . Presupunem că, pentru orice  $i \geq 1$ ,  $J_{\mathcal{A}} \models_H A'_i$ .

Arătăm că  $J_{\mathcal{A}} \models_H A'_0$ . Deci, pentru orice  $i \geq 1$ , cum  $A'_i \in B_\sigma$ ,

$A'_i \in J_{\mathcal{A}}$ , deci  $\mathcal{A} \models A'_i$ . Cum  $\mathcal{A} \models \varphi$ , avem  $\mathcal{A} \models \varphi'$ , iar, cum,

pentru orice  $i \geq 1$ ,  $\mathcal{A} \models A'_i$ , avem  $\mathcal{A} \models A'_0$ . Cum  $A'_0 \in B_\sigma$ ,

$A'_0 \in J_{\mathcal{A}}$ , deci  $J_{\mathcal{A}} \models_H A'_0$ .

## Teoremă

Fie  $P$  un program. Atunci  $K_P := \{J \subseteq B_\sigma \mid J \models_H P\}$  este o mulțime Moore pe  $B_\sigma$ .

## Demonstrație

Faptul că  $B_\sigma \models_H P$  rămâne ca exercițiu. Fie acum  $K \subseteq K_P$  cu  $K \neq \emptyset$ . Vrem  $\bigcap K \models_H P$ . Fie  $\varphi \in P$ . Fie  $t_1, \dots, t_n \in \tilde{T}_\sigma$ . Folosim aceleași notații ca în demonstrația precedentă. Presupunem că, pentru orice  $i \geq 1$ ,  $\bigcap K \models_H A'_i$ . Arătăm că  $\bigcap K \models_H A'_0$ . Deci, pentru orice  $i \geq 1$ , cum  $A'_i \in B_\sigma$ ,  $A'_i \in \bigcap K$ , deci, pentru orice  $J \in K$ ,  $A'_i \in J$ , adică  $J \models_H A'_i$ . Fie  $J \in K$ . Avem  $J \models_H \varphi$ , deci  $J \models_H \varphi'$ , iar, cum, pentru orice  $i \geq 1$ ,  $J \models_H A'_i$ , avem  $J \models_H A'_0$ , deci, cum  $A'_0 \in B_\sigma$ ,  $A'_0 \in J$ . Așadar,  $A'_0 \in \bigcap K$ , deci  $\bigcap K \models_H A'_0$ .

Pentru orice program  $P$ , notăm  $M_P := \bigcap K_P \in K_P$ .

## Teoremă

Pentru orice program  $P$ ,  $M_P = \{\varphi \in B_\sigma \mid P \models \varphi\}$ .

## Demonstrație

Pentru „ $\supseteq$ ”, fie  $\varphi \in B_\sigma$  cu  $P \models \varphi$ . Fie  $J \in K_P$ . Vrem  $\varphi \in J$ . Cum  $J \models_H P$ , avem  $J \models_H \varphi$ , iar, cum  $\varphi \in B_\sigma$ ,  $\varphi \in J$ .

Pentru „ $\subseteq$ ”, fie  $\varphi \in M_P$ . Fie  $\mathcal{A}$  cu  $\mathcal{A} \models P$ . Vrem  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Cum  $P$  este o mulțime de clauze definite, dintr-o teoremă anterioară avem  $J_{\mathcal{A}} \models_H P$ , deci  $J_{\mathcal{A}} \in K_P$ . Rezultă  $M_P \subseteq J_{\mathcal{A}}$ , deci  $\varphi \in J_{\mathcal{A}}$ , adică  $J_{\mathcal{A}} \models_H \varphi$ . Rezultă  $\mathcal{A} \models \varphi$ .

# Clauze și scopuri

Reamintim că o **clauză (definită)** era o formulă de forma

$$\forall(A_0 \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m),$$

unde  $A_0, \dots, A_m$  erau formule atomice relaționale, un **program** era o mulțime finită de clauze, iar un **scop** era o formulă de forma

$$\forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m).$$

Formula de mai sus este echivalentă semantic cu

$$\neg \exists(A_1 \wedge \dots \wedge A_m),$$

care corespunde intuitiv ideii de a căuta o soluție.

Pentru orice formulă fără cuantificatori  $\varphi$  și orice substituție  $\theta$ , notăm cu  $\varphi\theta$  formula care se obține din  $\varphi$  aplicând pe  $\theta$  pe toate variabilele sale libere.

Fie  $G$ ,  $G'$  scopuri și  $C$  clauză cu  $\text{Var}(G) \cap \text{Var}(C) = \emptyset$ . Fie  $m$ ,  $k \in \mathbb{N}$  astfel încât  $G = \forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m)$  și  $C = \forall(B_0 \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k)$ . Considerăm  $B_0$  ca fiind de forma  $p(t_1, \dots, t_n)$ . Fie  $i \leq m$  astfel încât  $A_i$  este de forma  $p(s_1, \dots, s_n)$ . Fie  $\theta$  un cgu al lui  $A_i$  și  $B_0$ , adică al mulțimii  $\{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\}$ . Spunem că  $G'$  este **derivat prin rezoluție** din  $G$ ,  $C$  și  $\theta$ , și notăm  $(G, C, \theta) \triangleright G'$ , dacă

$$G' = \forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_{i-1} \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k \vee \neg A_{i+1} \vee \dots \vee \neg A_m)\theta.$$

De acum încolo, vom fixa  $P$  un program.

Fie  $a \in \mathbb{N}^* \cup \{\mathbb{N}\}$ . Numim o  **$P$ -derivare (prin rezoluție)** un triplet  $((G_i)_{i < a}, (C_i)_{i+1 < a}, (\theta_i)_{i+1 < a})$ , astfel încât, pentru orice  $i$  cu  $i + 1 < a$ ,  $C_i$  este o clauză obținută dintr-o clauză din  $P$  prin redenumirea variabilelor sale și  $(G_i, C_i, \theta_i) \triangleright G_{i+1}$ .

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $((G_i)_{i < n}, (C_i)_{i+1 < n}, (\theta_i)_{i+1 < n})$  o  $P$ -derivare. Spunem că **substituția calculată** a sa este  $\tilde{\theta}_{n-2} \circ \dots \circ \tilde{\theta}_1 \circ \theta_0$ .

Fie  $G$  un scop,  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $((G_i)_{i < n}, (C_i)_{i+1 < n}, (\theta_i)_{i+1 < n})$  o  $P$ -derivare cu  $G_0 = G$  și  $G_{n-1} = \perp$ . Atunci spunem că derivarea este o  **$P$ -respingere** a lui  $G$ , iar substituția sa calculată spunem că este o  **$P$ -soluție** a lui  $G$ .

Fie  $G$  un scop,  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $((G_i)_{i < n}, (C_i)_{i+1 < n}, (\theta_i)_{i+1 < n})$  o  $P$ -derivare cu  $G_0 = G$  și  $G_{n-1} \neq \perp$  care nu admite o prelungire la una de lungime  $n + 1$ . Atunci spunem că derivarea este o  **$P$ -derivare eșuată** a lui  $G$ .

## Teorema de corectitudine

Fie  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_1, \dots, A_m$  formule atomice relaționale și  $\theta$  o  $P$ -soluție a lui  $\forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m)$ . Atunci  $P \models \forall(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)\theta$ .

## Demonstrație

Demonstrăm după lungimea  $P$ -respingerii. Pasul de bază are loc atunci când avem o singură aplicare a rezoluției, așadar trebuie să avem  $m = 1$ , iar clauza folosită are tot lungime 1, fie ea  $\forall B_0$ . Atunci  $\theta$  este cgu pentru  $A_1$  și  $B_0$ , deci  $A_1\theta = B_0\theta$ . Cum  $\forall B_0$  este o redenumire a unei clauze din  $P$ , avem  $P \models \forall B_0$ , deci  $P \models \forall B_0\theta$ , așadar  $P \models \forall A_1\theta$ , ceea ce trebuia demonstrat.

## Demonstrație (cont.)

Pentru pasul de inducție, notăm cu  $((G_i)_{i < n}, (C_i)_{i+1 < n}, (\theta_i)_{i+1 < n})$   $P$ -respingerea. Luăm  $C_0$  de forma  $\forall(B_0 \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k)$  și fie  $i$  astfel încât  $\theta_0$  este cgu al lui  $A_i$  și  $B_0$ . Așadar,  $G_1$  este

$$\forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_{i-1} \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k \vee \neg A_{i+1} \vee \dots \vee \neg A_m)\theta_0.$$

Din ipoteza de inducție, avem

$$P \models \forall(A_1 \wedge \dots \wedge A_{i-1} \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_k \wedge A_{i+1} \wedge \dots \wedge A_m)\theta.$$

Cum  $C_0$  este o redenumire a unei clauze din  $P$ , avem

$$P \models \forall(B_0 \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k)\theta,$$

deci  $P \models \forall(A_1 \wedge \dots \wedge A_{i-1} \wedge B_0 \wedge A_{i+1} \wedge \dots \wedge A_m)\theta$ . Cum  $B_0\theta_0 = A_i\theta_0$ ,  $B_0\theta = A_i\theta$ , deci  $P \models \forall(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)\theta$ .

# O propoziție

## Propoziție

Fie  $G$  un scop astfel încât există o  $P$ -respingere a lui  $G$ . Atunci  $P \cup \{G\}$  este nesatisfiabilă.

## Demonstrație

Scriem  $G = \forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m)$ . Din teorema de corectitudine, rezultă  $P \models \exists(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$ , deci

$$P \models \neg \forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m) = \neg G,$$

de unde obținem concluzia.

Putem defini operatorul  $T_P : \mathcal{P}(B_\sigma) \rightarrow \mathcal{P}(B_\sigma)$  în felul următor: pentru orice  $J$ ,  $T_P(J)$  este mulțimea acelor  $\varphi \in B_\sigma$  cu proprietatea că există  $A_1, \dots, A_m \in J$  astfel încât  $\varphi \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m$  este instanță a unei clauze din  $P$ .

## Propoziție

Pentru orice  $J$ ,  $J \models_H P$  dacă și numai dacă  $T_P(J) \subseteq J$ .

## Corolar

Pentru orice  $\varphi$ ,  $\varphi \in M_P$  dacă și numai dacă, pentru orice  $J$  cu  $T_P(J) \subseteq J$ ,  $\varphi \in J$ .

Se observă și că  $T_P$  este monoton și, deci, din cele de mai sus,  $M_P = \mu T_P$ .

Definim mulțimea  $S_P$  ca fiind submulțimea lui  $B_\sigma$  a acelor  $\varphi$  cu proprietatea că există o  $P$ -respingere a lui  $\neg\varphi$ .

## Propoziție

$S_P \subseteq M_P$ .

## Demonstrație

Fie  $\varphi \in S_P$ , adică există o  $P$ -respingere a lui  $\neg\varphi$ . Din Teorema de corectitudine, rezultă  $P \models \varphi$ , adică  $\varphi \in M_P$ .

## Propoziție

$M_P \subseteq S_P$ .

## Demonstrație

Din cele spuse mai devreme, este suficient să arătăm că  $T_P(S_P) \subseteq S_P$ . Fie  $\varphi \in T_P(S_P)$ . Atunci  $\varphi \in B_\sigma$  și există  $A_1, \dots, A_m \in S_P$  astfel încât  $\varphi \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m$  este instanță a unei clauze din  $P$ . Avem că există  $P$ -respingeri pentru  $\neg A_1, \dots, \neg A_m$ , iar, punându-le cap la cap (nu detaliam cum, dar este important că sunt toate din  $B_\sigma$ ), obținem o  $P$ -respingere pentru  $\neg\varphi$ , deci  $\varphi \in S_P$ .

## Corolar

Pentru orice  $\varphi \in B_\sigma$  cu  $P \models \varphi$ ,  $\varphi \in S_P$ .

## Lemă

Fie  $\varphi$  o formulă atomică relațională cu  $P \models \forall\varphi$ . Atunci există o  $P$ -respingere a lui  $\neg\varphi$  cu substituția calculată fiind identitatea.

## Demonstrație

Scriem  $Var(\varphi) = \{z_1, \dots, z_n\}$ . Introducem constante noi  $a_1, \dots, a_n$  și considerăm substituția  $\theta$  care duce, pentru orice  $i$ ,  $z_i$  în  $a_i$ . Atunci  $\varphi\theta \in B_\sigma$ , deci, din corolarul anterior, există o  $P$ -respingere a lui  $\neg\varphi\theta$ . Clar, dat fiind că nu apar variabile, substituția calculată trebuie să fie identitatea. Schimbăm în substituție din nou  $a_i$ -urile cu  $x_i$ -uri (de ce putem face asta?) și obținem  $P$ -respingerea cerută.

# Teorema de completitudine

## Teorema de completitudine

Fie  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_1, \dots, A_m$  formule atomice relaționale și  $\sigma$  o substituție astfel încât  $P \models \forall(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)\sigma$ . Atunci există o  $P$ -soluție  $\theta$  pentru  $\forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m)$  astfel încât  $\forall(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)\sigma$  este o instanță a lui  $\forall(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)\theta$ .

## Demonstrație (schită)

Pentru orice  $i$ , avem  $P \models \forall A_i \sigma$ , deci, din leamnă, există o  $P$ -respingere a lui  $\neg A_i \sigma$  cu substituția calculată fiind identitatea. Din nou, putem pune cap la cap și obținem o  $P$ -respingere a lui  $\forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m)\sigma$  cu substituția calculată fiind identitatea. Aplicând un rezultat tehnic (Lema de ridicare), putem obține o  $P$ -respingere a lui  $\forall(\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m)$ , din ale cărei informații obținem substituția cerută.