Fundamentele limbajelor de programare

Programare Logica. Rezoluție. Completitudine.

Traian Florin Șerbănuță și Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Info

Anul II, Semestrul II, 2024/2025

Secțiunea 1

Semantică

Structuri de ordinul I

Dacă $\sigma = (F, R, r)$ este o signatură de ordinul I, atunci
o σ-**structură** este o pereche $(A, \{A_s\}_{s \in F \cup R})$, unde:

- $A \neq \emptyset$ (și se va numi **universul**, **mulțimea suport** sau **mulțimea subiacentă** a structurii),
- pentru orice $s \in F$, $A_s : A^{r(s)} \to A$ și
- pentru orice $s \in R$, $A_s \subseteq A^{r(s)}$.

Structurile vor reprezenta domeniile despre care vor vorbi formulele corespunzătoare signaturilor.

Evaluarea termenilor

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură. Atunci pentru orice **valuație** $v : V \to A$ există și este unică o funcție $(\cdot)^{\mathcal{A}}_v : T_\sigma \to A$ astfel încât

- pentru orice $x \in V$, $x^{\mathcal{A}}_v = v(x)$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,
  $(st_1 \ldots t_{r(s)})^{\mathcal{A}}_v = A_s((t_1)^{\mathcal{A}}_v, \ldots, (t_{r(s)})^{\mathcal{A}}_v)$
  (în particular, dacă $r(s) = 0$, $s^{\mathcal{A}}_v = A_s$).

Actualizarea valuațiilor

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură. Pentru orice $v : V \to A$, $x \in V$, $a \in A$, definim $v_{x \leftarrow a} : V \to A$, pentru orice $y \in V$, prin

$$v_{x \leftarrow a}(y) := \begin{cases} v(y), & \text{dacă } y \neq x, \\ a, & \text{dacă } y = x. \end{cases}$$

Observăm că pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $v : V \to A$ și orice a, $b \in A$, avem că

$$(v_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (v_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $v_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Așadar, pentru orice $z \in V$,

$$v_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(z) = \begin{cases} v(z) & \text{dacă } z \neq x \text{ și } z \neq y, \\ a & \text{dacă } z = x, \\ b & \text{dacă } z = y. \end{cases}$$

Satisfacerea formulelor

Definim o relație $\models$ între structuri, valuații și formule folosind următoarele (scheme de) reguli:

- $\mathcal{A} \models^{v} t = u$, dacă $t_v^{\mathcal{A}} = u_v^{\mathcal{A}}$;
- $\mathcal{A} \models^{v} s t_1 \ldots t_{r(s)}$ (unde $s \in R$), dacă $((t_1)_v^{\mathcal{A}}, \ldots, (t_{r(s)})_v^{\mathcal{A}}) \in A_s$;
- $\mathcal{A} \not\models^{v} \bot$;
- $\mathcal{A} \models^{v} \varphi \to \psi$ dacă $\mathcal{A} \models^{v} \varphi$ implică că $\mathcal{A} \models^{v} \psi$
- $\mathcal{A} \models^{v} \forall x \varphi$, dacă pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models^{v_{x \leftarrow a}} \varphi$.

Dacă $\mathcal{A} \models^{v} \varphi$ pentru orice v, scriem $\mathcal{A} \models \varphi$ și spunem că $\mathcal{A}$ **satisface** φ, sau este **model** pentru φ.

Dacă $\mathcal{A} \models \varphi$ pentru orice $\mathcal{A}$, scriem $\models \varphi$ și spunem că φ este **validă**.

Satisfacerea conectorilor derivați

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură. Este acum imediat că pentru orice $v : V \to A$, avem:

- $\mathcal{A} \models^v \top$;
- $\mathcal{A} \models^v \varphi \wedge \psi$ ddacă $\mathcal{A} \models^v \varphi$ și $\mathcal{A} \models^v \psi$;
- $\mathcal{A} \models^v \varphi \vee \psi$ ddacă $\mathcal{A} \models^v \varphi$ sau $\mathcal{A} \models^v \psi$;
- $\mathcal{A} \models^v \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă ($\mathcal{A} \models^v \varphi$ ddacă $\mathcal{A} \models^v \psi$);
- $\mathcal{A} \models^v \exists x \varphi$ ddacă există $a \in A$ cu $\mathcal{A} \models^{v_{x \leftarrow a}} \varphi$.

Satifacerea enunțurilor

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură și φ un enunț.

Atunci, pentru orice v_1, $v_2 : V \to A$, avem

$$\mathcal{A} \models^{v_1} \varphi \text{ ddacă } \mathcal{A} \models^{v_2} \varphi,$$

deci sunt echivalente următoarele două afirmații:

- $\mathcal{A} \models \varphi$, adică pentru orice $v : V \to A$, $\mathcal{A} \models^{v} \varphi$
- există $v : V \to A$ cu $\mathcal{A} \models^{v} \varphi$.

Concepte înrudite

Vom defini următoarele concepte, precum și noi semnificații ale semnului $\models$, prin analogie cu logica propozițională:

- Spunem că $\varphi \in E_\sigma$ este **satisfiabil** dacă există $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \varphi$.
- Spunem că un enunț φ este **nesatisfiabil** dacă φ nu este satisfiabil.
- Fie φ, $\psi \in E_\sigma$. Spunem că din φ **se deduce semantic** ψ și scriem $\varphi \models \psi$ dacă pentru orice $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \varphi$ avem $\mathcal{A} \models \psi$.

Clar, $\bot$ este enunț, iar pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, avem $\mathcal{A} \not\models \bot$, i.e. $\bot$ este nesatisfiabil.

Mulțimi de enunțuri

Complet analog celor din logica propozițională, vom introduce noțiuni de satisfiabilitate pentru mulțimi de formule, precum și semnificații corespunzătoare ale semnului $\models$.

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$. Pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, spunem că $\mathcal{A}$ **satisface** Γ sau că $\mathcal{A}$ este **model** pentru Γ, și scriem $\mathcal{A} \models \Gamma$, dacă pentru orice $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models \varphi$.

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există o σ-structură $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \Gamma$; că este **nesatisfiabilă** dacă nu este satisfiabilă.

Proprietăți

Următoarele proprietăți se demonstrează perfect analog celor din logica propozițională.

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$, $\Delta \subseteq \Gamma$ și $\mathcal{A}$ o σ-structură. Avem următoarele:

- Dacă $\mathcal{A} \models \Gamma$, atunci $\mathcal{A} \models \Delta$.
- Dacă Δ este nesatisfiabilă, atunci Γ este nesatisfiabilă.
- Avem că $\mathcal{A} \models \Gamma$ dacă și numai dacă pentru orice $\Sigma \subseteq \Gamma$ finită, $\mathcal{A} \models \Sigma$.

Deducție semantică din mulțimi

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ și $\varphi \in E_\sigma$. Spunem că din Γ **se deduce semantic** φ, și scriem $\Gamma \models \varphi$, dacă pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \Gamma$ avem $\mathcal{A} \models \varphi$. Această noțiune are următoarele proprietăți analoage celor din logica propozițională și demonstrabile similar.

Proprietăți

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$, $\Delta \subseteq \Gamma$ și φ, $\psi \in E_\sigma$. Avem următoarele:

- Dacă $\Delta \models \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.
- Mulțimea Γ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă $\Gamma \models \bot$.
- Avem $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

Secțiunea 2

Corectitudinea rezoluției

Regula rezoluției

Fie G, G' scopuri și C clauză cu $Var(G) \cap Var(C) = \emptyset$. Fie m, $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $G = \forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m)$ și $C = \forall(B_0 \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_k)$. Considerăm B_0 ca fiind de forma $p(t_1, \ldots, t_n)$. Fie $i \leq m$ astfel încât A_i este de forma $p(s_1, \ldots, s_n)$. Fie θ un cgu al lui A_i și B_0, adică al mulțimii $\{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$. Spunem că G' este **derivat prin rezoluție** din G, C și θ, și notăm $(G, C, \theta) \triangleright G'$, dacă

$$G' = \forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_{i-1} \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_k \vee \neg A_{i+1} \vee \ldots \vee \neg A_m)\theta.$$

Notație: Pentru orice formulă fără cuantificatori φ și orice substituție θ, notăm cu $\varphi\theta$ formula care se obține din φ aplicând pe θ pe toate variabilele sale libere.)

Derivări

Fie $a \in \mathbb{N}^* \cup \{\mathbb{N}\}$. Numim o P-**derivare (prin rezoluție)** un triplet $((G_i)_{i<a}, (C_i)_{i+1<a}, (\theta_i)_{i+1<a})$, astfel încât, pentru orice i cu $i+1 < a$, C_i este o clauză obținută dintr-o clauză din P prin redenumirea variabilelor sale și $(G_i, C_i, \theta_i) \triangleright G_{i+1}$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $((G_i)_{i<n}, (C_i)_{i+1<n}, (\theta_i)_{i+1<n})$ o P-derivare. Spunem că **substituția calculată** a sa este $\widetilde{\theta}_{n-2} \circ \ldots \circ \widetilde{\theta}_1 \circ \theta_0$.

Fie G un scop, $n \in \mathbb{N}^*$ și $((G_i)_{i<n}, (C_i)_{i+1<n}, (\theta_i)_{i+1<n})$ o P-derivare cu $G_0 = G$ și $G_{n-1} = \perp$. Atunci spunem că derivarea este o P-**respingere** a lui G, iar substituția sa calculată spunem că este o P-**soluție** a lui G.

Fie G un scop, $n \in \mathbb{N}^*$ și $((G_i)_{i<n}, (C_i)_{i+1<n}, (\theta_i)_{i+1<n})$ o P-derivare cu $G_0 = G$ și $G_{n-1} \neq \perp$ care nu admite o prelungire la una de lungime $n+1$. Atunci spunem că derivarea este o P-**derivare eșuată** a lui G.

Teorema de corectitudine

Teorema de corectitudine

Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ formule atomice relaționale și θ o P-soluție a lui $\forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m)$. Atunci $P \models \forall(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)\theta$.

Demonstrație

Demonstrăm după lungimea P-respingerii. Pasul de bază are loc atunci când avem o singură aplicare a rezoluției, așadar trebuie să avem $m = 1$, iar clauza folosită are tot lungime 1, fie ea $\forall B_0$. Atunci θ este cgu pentru A_1 și B_0, deci $A_1\theta = B_0\theta$. Cum $\forall B_0$ este o redenumire a unei clauze din P, avem $P \models \forall B_0$, deci $P \models \forall B_0\theta$, așadar $P \models \forall A_1\theta$, ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema de corectitudine

Demonstrație (cont.)

Pentru pasul de inducție, notăm cu $((G_i)_{i<n}, (C_i)_{i+1<n}, (\theta_i)_{i+1<n})$ P-respingerea. Luăm C_0 de forma $\forall(B_0 \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_k)$ și fie i astfel încât θ_0 este cgu al lui A_i și B_0. Așadar, G_1 este

$$\forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_{i-1} \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_k \vee \neg A_{i+1} \vee \ldots \vee \neg A_m)\theta_0.$$

Din ipoteza de inducție, avem

$$P \models \forall(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{i-1} \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_k \wedge A_{i+1} \wedge \ldots \wedge A_m)\theta.$$

Cum C_0 este o redenumire a unei clauze din P, avem

$$P \models \forall(B_0 \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_k)\theta,$$

deci $P \models \forall(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{i-1} \wedge B_0 \wedge A_{i+1} \wedge \ldots \wedge A_m)\theta$. Cum $B_0\theta_0 = A_i\theta_0$, $B_0\theta = A_i\theta$, deci $P \models \forall(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)\theta$.

O propoziție

Propoziție

Fie G un scop astfel încât există o P-respingere a lui G. Atunci $P \cup \{G\}$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație

Scriem $G = \forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m)$. Din teorema de corectitudine, rezultă $P \models \exists(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$, deci

$$P \models \neg\forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m) = \neg G,$$

de unde obținem concluzia.

Secțiunea 3

Universul Herbrand

Structuri Herbrand

De acum încolo, vom face presupunerea că există măcar o constantă în signatură, așadar $\widetilde{T}_\sigma \neq \emptyset$. Notăm cu B_σ (numită **baza Herbrand**) mulțimea tuturor σ-formulelor atomice relaționale fără variabile.

Spunem că o σ-structură este **Herbrand** atunci când universul ei este $\widetilde{T}_\sigma$, iar simbolurile de funcție sunt interpretate "de ele însele". Observăm că o σ-structură Herbrand este complet determinată de mulțimea J a acelor formule din B_σ adevărate în ea. Pentru orice submulțime J a lui B_σ și orice enunț φ, spunem că $J \models_H \varphi$ atunci când structura Herbrand asociată lui J satisface φ.

Dacă $\mathcal{A}$ este o σ-structură, vom nota $J_\mathcal{A} := \{\varphi \in B_\sigma \mid \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Proprietăți

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ o σ-structură și φ o clauză definită (sau un scop definit) cu $\mathcal{A} \models \varphi$. Atunci $J_{\mathcal{A}} \models_H \varphi$.

Demonstrație

Presupunem φ clauză definită. Avem că există m, $n \in \mathbb{N}$, formule atomice relaționale A_0, $A_1, \ldots, A_m$ și variabile $x_1, \ldots, x_n$ cu

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n (A_0 \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m).$$

Fie $t_1, \ldots, t_n \in \widetilde{T}_\sigma$. Notăm, pentru orice i, $A_i' := A_i[x_1 := t_1] \ldots [x_n := t_n]$ și $\varphi' := A_0' \vee \neg A_1' \vee \ldots \vee \neg A_m'$. Vrem $J_{\mathcal{A}} \models_H \varphi'$. Presupunem că, pentru orice $i \geq 1$, $J_{\mathcal{A}} \models_H A_i'$. Arătăm că $J_{\mathcal{A}} \models_H A_0'$. Deci, pentru orice $i \geq 1$, cum $A_i' \in B_\sigma$, $A_i' \in J_{\mathcal{A}}$, deci $\mathcal{A} \models A_i'$. Cum $\mathcal{A} \models \varphi$, avem $\mathcal{A} \models \varphi'$, iar, cum, pentru orice $i \geq 1$, $\mathcal{A} \models A_i'$, avem $\mathcal{A} \models A_0'$. Cum $A_0' \in B_\sigma$, $A_0' \in J_{\mathcal{A}}$, deci $J_{\mathcal{A}} \models_H A_0'$.

Proprietăți

Teoremă

Fie P un program. Atunci $K_P := \{J \subseteq B_\sigma \mid J \models_H P\}$ este o mulțime Moore pe B_σ.

Demonstrație

Faptul că $B_\sigma \models_H P$ rămâne ca exercițiu. Fie acum $K \subseteq K_P$ cu $K \neq \emptyset$. Vrem $\bigcap K \models_H P$. Fie $\varphi \in P$. Fie $t_1, \ldots, t_n \in \widetilde{T}_\sigma$. Folosim aceleași notații ca în demonstrația precedentă. Presupunem că, pentru orice $i \geq 1$, $\bigcap K \models_H A'_i$. Arătăm că $\bigcap K \models_H A'_0$. Deci, pentru orice $i \geq 1$, cum $A'_i \in B_\sigma$, $A'_i \in \bigcap K$, deci, pentru orice $J \in K$, $A'_i \in J$, adică $J \models_H A'_i$. Fie $J \in K$. Avem $J \models_H \varphi$, deci $J \models_H \varphi'$, iar, cum, pentru orice $i \geq 1$, $J \models_H A'_i$, avem $J \models_H A'_0$, deci, cum $A'_0 \in B_\sigma$, $A'_0 \in J$. Așadar, $A'_0 \in \bigcap K$, deci $\bigcap K \models_H A'_0$.

Pentru orice program P, notăm $M_P := \bigcap K_P \in K_P$.

Proprietăți

Teoremă

Pentru orice program P, $M_P = \{\varphi \in B_\sigma \mid P \models \varphi\}$.

Demonstrație

Pentru $\supseteq$“, fie $\varphi \in B_\sigma$ cu $P \models \varphi$. Fie $J \in K_P$. Vrem $\varphi \in J$. Cum $J \models_H P$, avem $J \models_H \varphi$, iar, cum $\varphi \in B_\sigma$, $\varphi \in J$.
Pentru $\subseteq$“, fie $\varphi \in M_P$. Fie $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models P$. Vrem $\mathcal{A} \models \varphi$. Cum P este o mulțime de clauze definite, dintr-o teoremă anterioară avem $J_\mathcal{A} \models_H P$, deci $J_\mathcal{A} \in K_P$. Rezultă $M_P \subseteq J_\mathcal{A}$, deci $\varphi \in J_\mathcal{A}$, adică $J_\mathcal{A} \models_H \varphi$. Rezultă $\mathcal{A} \models \varphi$.

Numim M_P **modelul Herbrand** asociat programului P

Secțiunea 4

Completitudinea rezoluției

Operatorul T_P

Definim operatorul $T_P : \mathcal{P}(B_\sigma) \to \mathcal{P}(B_\sigma)$ în felul următor: pentru orice J, $T_P(J)$ este mulțimea acelor $\varphi \in B_\sigma$ cu proprietatea că există $A_1, \ldots, A_m \in J$ astfel încât $\varphi \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m$ este instanță a unei clauze din P.

Propoziție

Pentru orice J, $J \models_H P$ dacă și numai dacă $T_P(J) \subseteq J$.

Corolar

Pentru orice φ, $\varphi \in M_P$ dacă și numai dacă, pentru orice J cu $T_P(J) \subseteq J$, $\varphi \in J$.

Se observă și că T_P este monoton și, deci, din cele de mai sus,

$$M_P = \mu T_P = \bigcap \{J \mid T_P(J) \subseteq J\}.$$

Mulțimea S_P

Definim mulțimea S_P ca fiind submulțimea lui B_σ a acelor φ cu proprietatea că există o P-respingere a lui $\neg\varphi$.

Propoziție

$S_P \subseteq M_P$.

Demonstrație

Fie $\varphi \in S_P$, adică există o P-respingere a lui $\neg\varphi$. Din Teorema de corectitudine, rezultă $P \models \varphi$, adică $\varphi \in M_P$.

Spre completitudine

Propoziție

$M_P \subseteq S_P$.

Demonstrație

Din cele spuse mai devreme, este suficient să arătăm că $T_P(S_P) \subseteq S_P$. Fie $\varphi \in T_P(S_P)$. Atunci $\varphi \in B_\sigma$ și există $A_1, \ldots, A_m \in S_P$ astfel încât $\varphi \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m$ este instanță a unei clauze din P. Avem că există P-respingeri pentru $\neg A_1, \ldots, \neg A_m$, iar, punându-le cap la cap (nu detaliem cum, dar este important că sunt toate din B_σ), obținem o P-respingere pentru $\neg\varphi$, deci $\varphi \in S_P$.

Corolar

Pentru orice $\varphi \in B_P$ cu $P \models \varphi$, $\varphi \in S_P$.

Spre completitudine

Lemă

Fie φ o formulă atomică relațională cu $P \models \forall\varphi$. Atunci există o P-respingere a lui $\neg\varphi$ cu substituția calculată fiind identitatea.

Demonstrație

Scriem $Var(\varphi) = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Introducem constante noi $a_1, \ldots, a_n$ și considerăm substituția θ care duce, pentru orice i, z_i în a_i. Atunci $\varphi\theta \in B_\sigma$, deci, din corolarul anterior, există o P-respingere a lui $\neg\varphi\theta$. Clar, dat fiind că nu apar variabile, substituția calculată trebuie să fie identitatea. Schimbăm în substituție din nou a_i-urile cu x_i-uri (de ce putem face asta?) și obținem P-respingerea cerută.

Teorema de completitudine

Teorema de completitudine

Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ formule atomice relaționale și σ o substituție astfel încât $P \models \forall(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)\sigma$. Atunci există o P-soluție θ pentru $\forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m)$ astfel încât $\forall(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)\sigma$ este o instanță a lui $\forall(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)\theta$.

Demonstrație (schiță)

Pentru orice i, avem $P \models \forall A_i\sigma$, deci, din lemă, există o P-respingere a lui $\neg A_i\sigma$ cu substituția calculată fiind identitatea. Din nou, putem pune cap la cap și obțin o P-respingere a lui $\forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m)\sigma$ cu substituția calculată fiind identitatea. Aplicând un rezultat tehnic (Lema de ridicare), putem obține o P-respingere a lui $\forall(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m)$, din ale cărei informații obținem substituția cerută.