Fundamentele limbajelor de programare

Programare funcțională. λ-calcul. Confluență. Standardizare.

Traian Florin Șerbănuță și Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Info

Anul II, Semestrul II, 2024/2025

Secțiunea 1

Recapitulare din cursul trecut

Sintaxă

lambda termen	$=$	variabilă
	$\mid$	aplicare
	$\mid$	abstractizare

$$M, N ::= x \mid (M\,N) \mid (\lambda x.\, M)$$

Variabile libere

$$\begin{array}{rcl} FV(x) & = & \{x\} \\ FV(M\,N) & = & FV(M) \cup FV(N) \\ FV(\lambda x.\, M) & = & FV(M) \setminus \{x\} \end{array}$$

Substituție

Variabile

- $x[x := N] := N$;
- $x[y := N] := x$, dacă $y \neq x$;

Aplicație

- $(PQ)[x := N] := (P[x := N])(Q[x := N])$;

Abstracție

- $(\lambda x.P)[x := N] := \lambda x.P$;
- $(\lambda y.P)[x := N] := \lambda y.(P[x := N])$, dacă $y \neq x$ și $y \notin FV(N)$;
- $(\lambda y.P)[x := N] := \lambda z.(P[y := z][x := N])$, dacă $y \neq x$ și $y \in FV(N)$, unde $z \notin FV(P) \cup FV(N)$ este o variabilă „nouă”

Alfa-echivalență

- $\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.(M[x := y])$ *dacă* $y \notin FV(M)$

Echivalență

- $M \equiv_\alpha M$ $\qquad \dfrac{M \equiv_\alpha N}{N \equiv_\alpha M}$ $\qquad \dfrac{M \equiv_\alpha N \qquad N \equiv_\alpha P}{M \equiv_\alpha P}$

Compatibilitate cu operațiile

- $\dfrac{M \equiv_\alpha N}{\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda x.N}$ $\qquad \dfrac{M \equiv_\alpha N}{M\,P \equiv_\alpha N\,P}$ $\qquad \dfrac{M \equiv_\alpha N}{P\,M \equiv_\alpha P\,N}$

Beta-reducție

- $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$

Compatibilitate cu operațiile

- $\dfrac{M \to_\beta N}{\lambda x.M \to_\beta \lambda x.N}$ $\qquad$ $\dfrac{M \to_\beta N}{M\,P \to_\beta N\,P}$ $\qquad$ $\dfrac{M \to_\beta N}{P\,M \to_\beta P\,N}$

Reducție în mai mulți pași (închiderea reflexiv-tranzitivă)

- $M \to_\beta^* N$ *dacă* $M \to_\beta N$ $\qquad$ $M \to_\beta^* M$ $\qquad$ $\dfrac{M \to_\beta^* N \qquad N \to_\beta^* P}{M \to_\beta^* P}$

Formă normală

- Dacă $M \to_\beta^* N \not\to_\beta$, atunci N formă normală (pentru M)

Alfa-echivalența este compatibilă cu toate definițiile[1]

- Dacă $M \equiv_\alpha N$ atunci $FV(M) = FV(N)$
- Dacă $M \equiv_\alpha M'$ și $N \equiv_\alpha N'$, atunci $M[x := N] \equiv_\alpha M'[x := N']$
- Dacă $M \to_\beta N$
  - pentru orice $M' \equiv_\alpha M$ există $N' \equiv_\alpha N$ astfel încât $M' \to_\beta N'$
  - pentru orice $N' \equiv_\alpha N$ există $M' \equiv_\alpha M$ astfel încât $M' \to_\beta N'$
- Similar pentru $M \to_\beta^* N$
- Dacă N formă normală și $N' \equiv_\alpha N$ atunci N' formă normală

Alfa-Beta reducție

$M \to_{\alpha,\beta}^* N$ *dacă* $M \to_\beta^* N'$ și $N \equiv_\alpha N'$

- $\to_\beta^* \subseteq \to_{\alpha,\beta}^*$
- Dacă $M \to_{\alpha,\beta}^* N$, $M \equiv_\alpha M'$ și $N \equiv_\alpha N'$, atunci $M' \to_{\alpha,\beta}^* N'$

[1] În restul cursului vom lucra **modulo** α-echivalență.

Secțiunea 2

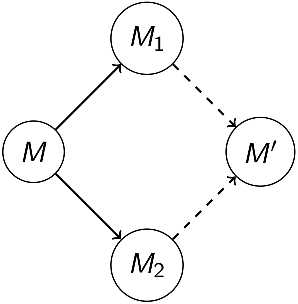
Confluență

Scop

În această secțiune vom argumenta că λ-calculul fără tipuri este confluent.

Teoremă (Church-Rosser)

Fie M, M_1, M_2 λ-termeni astfel încât $M \to_\beta^* M_1$ și $M \to_\beta^* M_2$ Atunci există un λ-termen M' astfel încât (modulo α-echivalență) $M_1 \to_\beta^* M'$ și $M_2 \to_\beta^* M'$



Proprietatea diamant (confluență într-un pas)

Definiție

O relație binară $\rightarrow$ are **proprietatea diamant** dacă, oricând $a \rightarrow b$ și $a \rightarrow c$, există d astfel încât $b \rightarrow d$ și $c \rightarrow d$

Proprietăți

- Teorema Church-Rosser este echivalentă cu faptul că relația $\rightarrow_{\beta}^{*}$ are proprietatea diamant.
- Dacă $\rightarrow$ are proprietatea diamant, atunci și $\rightarrow^{*}$ are proprietatea diamant.

Reducție paralelă

Se definește relația $\rightarrow_{\parallel}$ pe λ-termeni folosind regulile:

- $M \rightarrow_{\parallel} M$
- $\dfrac{M \rightarrow_{\parallel} M'}{\lambda x.M \rightarrow_{\parallel} \lambda x.M'}$
- $\dfrac{M \rightarrow_{\parallel} M' \qquad N \rightarrow_{\parallel} N'}{M\,N \rightarrow_{\parallel} M'\,N'}$
- $\dfrac{M \rightarrow_{\parallel} M' \qquad N \rightarrow_{\parallel} N'}{(\lambda x.M)\,N \rightarrow_{\parallel} M'[x := N']}$

Reducția paralelă vs β-reducția

Proprietăți (demonstrabile prin inducție)

- $\to_\beta \subseteq \to_\parallel$
- $\to_\parallel \subseteq \to_\beta^*$

Corolar

- $\to_\parallel^* = \to_\beta^*$

Condiție suficientă pentru Teorema Church Rosser

E suficient să arătăm că $\to_\parallel$ are proprietatea diamant.

Proprietăți

Lemă (Comutativitatea Substituției)

Fie N, N, P termeni. Dacă $x \neq y$ și $x \notin FV(P)$, atunci

$$M[x := N][y := P] = M[y := P][x := N[y := P]]$$

Leme

1. Dacă $\lambda x.M \to_{\parallel} N$ atunci $N = \lambda x.M'$ și $M \to_{\parallel} M'$
2. Dacă $M\, N \to_{\parallel} L$ atunci fie
   - $L = M'\, N'$, $M \to_{\parallel} M'$ și $N \to_{\parallel} N'$; sau
   - $M = \lambda x.P$, $L = P'[x := N']$, $P \to_{\parallel} P'$ și $N \to_{\parallel} N'$
3. Dacă $N \to_{\parallel} N'$ atunci $M[x := N] \to_{\parallel} M[x := N']$
4. Dacă $M \to_{\parallel} M'$ și $N \to_{\parallel} N'$. Atunci $M[x := N] \to_{\parallel} M'[x := N']$

Teorema Church-Rosser

Teoremă (proprietatea diamant)

$\rightarrow_{\|}$ are proprietatea diamant

Corolar (Teorema Church-Rosser)

$\rightarrow_{\beta}^{*}$ are proprietatea diamant

Secțiunea 3

Teorema de standardizare

Scop

În această secțiune vom argumenta veridicitatea următorului rezultat.

Teorema de standardizare

Dacă M are o formă normală N atunci N poate fi obținut din M folosind strategia normală de reducție, adică, reducând la fiecare pas redex-ul cel mai din stânga dintre cele exterioare.

Identificarea redex-ului într-o β-reducție

Definim relația $\xrightarrow{n}_\beta$ prin următoarele reguli:

- $(\lambda x.M)\, N \xrightarrow{1}_\beta M[x := N]$
- $\dfrac{M \xrightarrow{n}_\beta N}{M\, P \xrightarrow{n}_\beta N\, P}$ *dacă* M nu este o abstracție

  $\dfrac{M \xrightarrow{n}_\beta N}{M\, P \xrightarrow{n+1}_\beta N\, P}$ *dacă* M este o abstracție
- $\dfrac{M \xrightarrow{n}_\beta N}{P\, M \xrightarrow{n+\#r(P)}_\beta P\, N}$ *dacă* P nu este o abstracție [2]

  $\dfrac{M \xrightarrow{n}_\beta N}{P\, M \xrightarrow{n+\#r(P)+1}_\beta P\, N}$ *dacă* P este o abstracție
- $\dfrac{M \xrightarrow{n}_\beta N}{\lambda x.M \xrightarrow{n}_\beta \lambda x.N}$

[2] Pentru un termen M, fie $\#r(M)$ numărul de β-redexuri din M.

Intuiție si proprietăți pentru $\rightarrow_{\beta}^{n}$

$M \xrightarrow{n}_{\beta} N$ reprezintă faptul că N a fost obținut din M aplicând o β-reducție pe al n-ulea redex din M în ordinea leftmost-outermost.

Proprietăți

- $M \rightarrow_{\beta} N$ dacă și numai dacă există n astfel încât $M \xrightarrow{n}_{\beta} N$
- $M \xrightarrow{1}_{\beta} N$ reprezintă o reducție folosind strategia normală

Secvențe de reducție standard

Definiție

O secvență $M_0 \xrightarrow{n_1} M_1 \xrightarrow{n_2} \cdots \xrightarrow{n_k} M_k$ se numește **standard** dacă $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$

Observații

- Într-o secvență standard de reducție, toți redecșii cu index mai mic decât cel folosit la un pas nu vor fi modificați de nici unul din pașii următori.
- O secvență folosind strategia normală este standard (fiecare n_i este 1)

Secvențe de reducție standard și forme normale

Următorul rezultat ne arată că pentru a arăta că strategia normală ajunge mereu la o formă normală (dacă aceasta există) e suficient să arătăm că orice secvență de reducție poate fi convertită la una standard.

Propoziție

Orice secvență standard care ajunge într-o formă normală este conform strategiei normale

Demonstrație

Ne uităm la ultimul pas de reducție $M_{k-1} \xrightarrow{n_k} M_k$.
Deoarece M_k este formă normală, înseamnă că nu are nici un redex, de unde înseamnă că $n_k = 1$.
Din definiția sevcenței standard, înseamnă că toți n_i sunt 1.

Reducția la începutul unei aplicații

Vom defini recursiv o relație care generează secvențe folosind strategia normală.

Definiție

$(\lambda x.M)N \to_h M[x := N]$ și $\dfrac{M \to_h M'}{MN \to_h M'N}$

Lemă

Dacă $M \to_h^* N$ atunci $M \xrightarrow{1}{}_\beta^* N$

Reducția standard

Vom defini recursiv o relație care generează secvențe standard de reducție.

Definiție

- $L \to_{st} x \;\; dacă\; L \to_h^* x$
- $\dfrac{A \to_{st} C \qquad B \to_{st} D}{L \to_{st} C\, D} \;\; dacă\; L \to_h^* A\, B$
- $\dfrac{A \to_{st} B}{L \to_{st} \lambda x.B} \;\; dacă\; L \to_h^* \lambda x.A$

Lemă

Dacă $M \to_{st} N$ atunci există o secvență standard de la M la N.

Proprietăți

Următoarele proprietăți se demonstrează ușor prin inducție:

- $M \to_{st} M$
- Dacă $M \to_h^* N$ atunci $MP \to_h^* NP$
- Dacă $L \to_h^* M \to_{st} N$ atunci $L \to_{st} N$
- Dacă $M \to_h^* N$ atunci $M[x := P] \to_h^* N[x := P]$
- Dacă $M \to_{st} N$ și $P \to_{st} Q$, atunci $M[x := P] \to_{st} N[x := Q]$

Lemă

Dacă $L \to_{st} (\lambda x.M)\, N$, atunci $L \to_{st} M[x := N]$.

Demonstrație

Explicitând definițiile și folosind proprietățile de mai sus.

Beta-reducțiile pot fi absorbite în reducții standard

Lemă

Dacă $L \rightarrow_{st} M \rightarrow_{\beta} N$ atunci $L \rightarrow_{st} N$

Demonstrație

Demonstrăm proprietatea

$$\forall M \forall N \; M \rightarrow_{\beta} N \implies \forall L \; L \rightarrow_{st} M \implies L \rightarrow_{st} N$$

prin inducție pe regulile de definire ale lui $M \rightarrow_{\beta} N$

Corolar

Dacă $M \rightarrow_{\beta}^{*} N$ atunci $M \rightarrow_{st} N$

Teorema de standardizare

Teoremă (standardizare)

Dacă $M \to_\beta^* N$ atunci există o secvență standard de β-reducție de la M la N.

Demonstrație

Evident din lema de mai sus și proprietățile reducției standard.

Secțiunea 4

Bibliografie

Referințe

- Teorema Church-Rosser

  Gregor Richards. CS442 – Principles of Programming Languages. Lecture Notes. University of Waterloo.

  https://student.cs.uwaterloo.ca/~cs442/W25/extras/c-r-thm-proof.pdf

- Teorema de standardizare

  Ryo Kashima. A Proof of the Standardization Theorem in λ-Calculus. Research Reports on Mathematical and Computing Sciences, C-145, Tokyo Institute of Technology, 2000.

  https://www.is.c.titech.ac.jp/users/kashima/pub/C-145.pdf