Un semestru de logică

Prof. Dr. George Georgescu

La Facultatea de Matematică şi Informatică, în primul semestru al anului I se predă un curs de logică matematică şi computaţională. Destinat studenţilor informaticieni, un astfel de curs ar putea avea două obiective generale:
(a) O învăţare corectă a ceea ce este logica matematică (la nivelul unor elemente de calcul propoziţional şi de calcul al predicatelor);
(b) O deschidere a logicii matematice către unele discipline ale informaticii.

Primul obiectiv se îndeplineşte prin tratarea logicii matematice ca subiect "în sine", cu teme şi metode proprii. Problemele logicii matematice provin din matematică, din informatică, din alte ştiinţe, dar pot fi şi rezultatul unui mers interior al domeniului. Rolul său nu se limitează la a fundamenta şi a formaliza diferite teorii ale matematicii sau ale altor ştiinţe.Este din ce in ce mai manifestă intervenţia sa în obţinerea unor rezultate noi în aceste teorii.
Realizarea primului obiectiv are un impact decisiv asupra celui de-al doilea. Ar fi o eroare capitală să gândim cursul de logică ca un şir de reţete, de modele, de algoritmi, de calcule ce vor fi folosite cândva la unul din cursurile de informatică. Desigur că pentru cel de-al doilea obiectiv este indicat să găsim motivaţii ale noţiunilor şi propoziţiilor de logică şi în disciplinele informatice, iar unele exemple să fie sugerate de acestea. O schiţă a perspectivelor de aplicare a logicii la celelalte cursuri de matematică şi informatică va întări motivaţia auditoriului şi va înlesni însuşirea cunoştinţelor.

Pentru secţia de informatică, o variantă maximală a programei acestui curs ar putea cuprinde următoarele capitole:

Cap. I : Relaţii binare
1. Relaţii binare şi matrici booleene
2. Operaţii cu relaţii binare
3. Proprietăţi ale relaţiilor binare
4. Calculul închiderilor (reflexivă, tranzitivă, etc)
5. Operatori de închidere şi conexiuni Galois

Cap. II : Latici şi algebre Boole
1. Relaţii de ordine. Latici
2. Algebre Boole. Proprietăţi generale. Exemple
3. Implicaţia şi echivalenţa booleană
4. Inele Boole
5. Filtre si congruenţe. Algebre Boole cât
6. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone
7. Structura algebrelor Boole finite
8. Funcţii booleene

Cap.III: Sistemul formal al calculului propoziţional

1. Dimensiuni ale unui sistem logic
2. Sintaxa: limbaj, demonstraţii formale, deducţia sintactică
3. Proprietăţi sintactice. Teorema deducţiei
4. Algebra Lindenbaum - Tarski
5. Semantica calculului propoziţional. Interpretări
6. Teorema de completitudine (demonstraţie algebrică)
7. Sisteme deductive. Mulţimi consistente
8. Teorema de completitudine tare
9. Tablouri semantice

Cap.IV: Sistemul formal al calculului cu predicate

1. Structuri de ordinul I. Exemple
2. Construcţia limbajului: termeni, formule, enunţuri
3. Semantica calculului cu predicate. Modele
4. Deducţia semantică în calculul cu predicate

Cu excepţia operatorilor de închidere şi a conexiunilor Galois, materialul din primul capitol este foarte apropiat de nivelul matematicii din liceu. Teoria relaţiilor este un domeniu vechi al matematicii, util deopotrivă disciplinelor matematice şi informatice. Definiţiile şi rezultatele din teoria relaţiilor apar şi în fundamentarea şi dezvoltarea unor subiecte din economie, sociologie şi psihologie. De exemplu, demonstraţia celebrei teoreme de imposibilitate a lui Arrow din teoria votului se bazează exclusiv pe tehnici de teoria relaţiilor. În concluzie, cunoştinţele din acest mic capitol folosesc atât cursului de faţă cât şi investigării unor viitoare teme.

Al doilea capitol este consacrat celor două structuri algebrice principale ale cursului: laticile şi algebrele Boole. Aceste două tipuri de algebre sunt indispensabile studierii calculului propoziţional şi calculului cu predicate. În acelaşi timp, ele sunt în mod esenţial folosite în cea mai mare parte a cursurilor de informatică şi de matematică. Noţiunea de algebră Boole este motivată prin câteva exemple remarcabile:

- algebra Boole standard {0, 1};
- algebra Boole a părţilor unei mulţimi;
- algebra Boole a funcţiilor booleene;
- algebra Boole a evenimentelor unei experienţe aleatoare;
- algebra Boole a părţilor deschise şi închise ale unui spaţiu topologic.

Algebrele Boole sunt structuri ce constitue baza algebrică a sistemelor de logică studiate în acest curs. Rezultatul central al capitolului este teorema de reprezentare a lui Stone: orice algebră Boole este izomorfă cu o subalgebră a unei algebre Boole de părţi. Pentru demonstrarea sa este folosit, direct sau indirect, aproape întreg materialul din acest capitol (aritmetica booleană, morfisme booleene, filtre, ultrafiltre, etc). Prin teorema lui Stone, elementele unei algebre Boole se identifică cu părţi ale unei mulţimi, iar operaţiile booleene se identifică cu operaţii cu mulţimi. De aici rezultă că demonstrarea unei identităţi booleene revine la un calcul în care apar numai operaţii cu mulţimi. O formă echivalentă a teoremei lui Stone arată că orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole de funcţii ce iau valori în {0, 1}. Astfel calculul boolean se reduce la verificarea identităţilor în algebra Boole standard {0, 1}.

Capitolul III studiază în mod aprofundat cel mai simplu sistem logic: calculul propoziţional (*L*). Este prezentată sintaxa sistemului (limbaj plus structură logică) şi semantica sa. Legătura dintre sintaxă şi semantică este exprimată prin teorema de corectitudine (orice teoremă formală este un enunţ universal adevărat) şi prin teorema de completitudine (orice enunţ universal adevărat este teoremă formală). Teorema de corectitudine rezultă printr-o simplă inducţie relativ la modul de definire a enunţurilor lui *L*. Mai complicată este demonstraţia teoremei de completitudine. Algebra Lindenbaum - Tarski este o construcţie canonică prin care unui sistem logic îi este asociată o structură algebrică. Proprietăţile sintactice se reflectă în proprietăţi algebrice, care sunt mai uşor de manipulat. În cazul de faţă, algebra Lindenbaum - Tarski *B(L)* a calculului propoziţional va fi o algebră Boole. Din acest moment, întregul aparat algebric dezvoltat în capitolul precedent va putea fi folosit în studiul sistemului logic *L*. Aplicaţia sa cea mai importantă este demonstraţia algebrică a teoremei de completitudine. Demonstraţia se face prin reducere la absurd (orice enunţ ce nu este teoremă formală nu este universal adevărat) şi constă din următorii paşi:

- se porneşte cu un enunţ φ ce nu este teoremă formală;
- se trece de la sintaxa lui *L* la algebra Lindenbaum - Tarski *B(L)*;
- se aplică teorema de reprezentare a lui Stone algebrei Boole *B(L)*;
- folosind pasul precedent se construieşte o interpretare a lui *L*;
- în interpretarea obţinută, enunţul φ este fals.

Teorema de completitudine tare stabileşte echivalenţa dintre deducţia sintactică şi deducţia semantică. O demonstraţie nealgebrică a teoremei de completitudine tare se poate obţine utilizând rezultate asupra mulţimilor maximal consistente (în special existenţa şi caracterizarea lor). Se poate observa un paralelism perfect între teoria mulţimilor maximal consistente ale lui *L* şi teoria ultrafiltrelor. Rezultă un fapt tulburător: demonstraţia nealgebrică a teoremei de completitudine a calculului propoziţional este privirea în oglindă a demonstraţiei teoremei de reprezentare a lui Stone.

Capitolul IV conţine prezentarea limbajului calculului predicatelor de ordinul întâi (*CP*), dar omite structura logică (axiome, reguli de deducţie etc). Se insistă pe semantica lui *CP*, pe noţiunea de model şi de deducţie semantică. O tratare mai completă a lui *CP* (cu demonstrarea teoremei de completitudine a lui Gödel) necesită dezvoltări tehnice pe care lipsa de timp nu le permite în acest semestru.

Acesta ar fi conţinutul cursului. Alegerea modului în care acest material poate fi predat îi revine profesorului.

Extinzând planul discuţiei, vom prezenta patru modele posibile pentru predarea unui curs de logică matematică (care poate fi şi altul decât cel pus în discuţie).

(a) *Modelul cvartalist* presupune organizarea perfectă a materialului predat. La fiecare curs, definiţiile, lemele şi teoremele sunt aranjate în sertare imaginare, cu o etichetare precisă; sertarele compun dulapuri imaginare dispuse perfect în încăperi imaginare; încăperile formează blocuri imaginare ce găzduiesc cunoştinţele de logică; pe ansamblu, cursul apare ca un cvartal, în care un poştaş imaginar poate merge cu precizie la adresa fiecărei definiţii, leme şi teoreme.

(b) *Modelul mioritic* propune aşezarea materiei într-un relief fără trasee abrupte, cu treceri line de la definiţii la exemple, de la leme la teoreme, astfel încât auditoriul să ajungă la capătul unei teoreme sau al unei teme cu un efort aproape insesizabil. Un astfel de procedeu impune descompunerea unui fapt în părţi mai uşor de explicat în mod separat iar apoi repunerea lor la loc, dar într-o nou produs matematic. Eficienţa modelului depinde de meştesugul profesorului de a descompune şi recompune materialul, precum şi de fineţea cu care ideile sunt plasate într-o ţesătură generală.

(c) *Modelul tropical* este caracterizat printr-o abundenţă de fapte matematice, însufleţite prin torente de idei si de comentarii. Rezultatele expuse copleşesc prin număr şi prin consistenţă matematică, ideile ţâşnesc în fiecare loc, iar comentariul este exploziv, neuniform şi chiar paradoxal. În această vegetaţie matematică luxuriantă, drumurile nu sunt largi iar poienile sunt rare, dar intens luminate. Tehnica este subsumată ideilor, iar ordonarea materialului nu este prestabilită. Modelul este eficient în cazul când auditoriul are un nivel matematic ridicat şi este pasionat de subiectul discutat. Aplicarea modelului tropical ar putea avea succes mai mult în cazul studenţilor de la master.

(d) *Modelul catedrală* alege câteva fapte centrale (concepte, teoreme, teme, modele) şi materia este organizată astfel încât să servească demonstrării, explicării şi aplicării lor. Viaţa matematică a cursului gravitează în jurul acestor construcţii capitale; de aceea semnificaţia lor trebuie să fie excepţională. În plus, demonstraţia lor trebuie să fie o combinaţie rafinată a unui mare număr de noţiuni, leme, propoziţii şi artificii de raţionament. Şi nu în ultimul rând, este necesară stabilirea unei relaţii atât de profunde între aceşti centri vitali astfel încât ea să fie definitorie pentru întregul curs.

Fiecare din modelele de mai sus are virtuţi şi scăderi. În multe cazuri, de fapt are loc o împletire a celor patru stiluri de predare. Pentru cursul de logică predat la anul I, preferinţele noastre merg spre modelul catedrală. Materia se înfăşoară în jurul a două rezultate fundamentale: teorema de reprezentare a lui Stone (la capitolul de algebră Boole) şi teorema de completitudine (la capitolul de calcul propoziţional). La curs nu avem timp să tratăm decât o parte a relaţiei dintre ele: demonstraţia teoremei de completitudine prin teorema lui Stone. La rândul său, teorema de completitudine oferă o demonstraţie a teoremei de reprezentare a lui Stone. De fapt, ele sunt două enunţuri matematice echivalente (într-o axiomatizare a teoriei mulţimilor fără axioma alegerii). Această relaţie între reprezentare şi completitudine poate fi extinsă la majoritatea sistemelor de logică. Atunci putem vorbi de un adevărat principiu: completitudinea sistemelor logice şi reprezentarea structurilor lor algebrice se determină una pe alta. Îl vom numi principiul celor două catedrale.

Pentru studentul de anul I, la sfârşitul acestui semestru ideea de sistem logic este concentrată în relaţia tripartită: sintaxă, semantică, algebră. Ea se încadrează în schema de a defini un sistem logic prin descrierea dimensiunilor sale matematice.

Mulţumim domnilor profesori Sergiu Rudeanu, Dragoş Vaida, Mircea Sularia şi Andrei Popescu pentru sugestiile făcute în timpul scrierii acestui articol.