Logică matematică
CURS 1

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I

Semestrul II, 2023/2024

Teoria mulțimilor

Motto

"We're doing set theory, so 'sets' are sets of sets."

– Donald A. Martin, *apud* Nik Weaver

Metoda axiomatică

Pentru ca raționamentele ei să fie suficient de riguroase, matematica face uz de ceea ce se numește **metoda axiomatică**. Până acum am întâlnit următoarele exemple ale aplicării metodei:

- structurile algebrice abstracte – grup, inel, corp;
- geometria euclidiană plană.

Ceea ce au aceste exemple în comun este că fiecare stabilește o listă de noțiuni primitive (în cazul grupului: element al lui și operația binară; în cazul planului: puncte, drepte, incidență) și o listă de axiome care descriu modul cum se comportă acele noțiuni primitive. Împreună, ele stabilesc cadrul teoriei matematice în discuție.

Deosebiri

Ceea ce diferă între exemplele date este că în vreme ce unele caută să descrie clase de asemenea obiecte (există mai multe grupuri, mai multe inele, cu proprietăți variate), celelalte caută să descrie cât mai fidel comportamentul unui anume obiect (cum este planul euclidian) și eventual să îl caracterizeze până la izomorfism (lucru care nu va fi mereu posibil).

Filosofii care studiază structuralismul matematic disting așadar după acest criteriu între teorii „algebrice" și „nealgebrice" (numite astfel deoarece primele apar deseori în algebră, chiar dacă nu în mod exclusiv).

Teoria mulțimilor va fi undeva la mijloc.

În dezvoltarea axiomatică a teoriei mulțimilor, noțiunile primitive vor fi cele de **mulțime** și de **relație de apartenență**, ultima având două argumente și fiind notată cu $\in$. Vom vedea că acestea sunt suficiente pentru a exprima propozițiile întregii matematici.

Universul de discurs va fi format așadar doar din mulțimi, iar despre ele vom putea face afirmații care se referă doar la relația $\in$. În plus, potrivit legilor logicii predicatelor (pe care le vom studia mai târziu în curs), se va presupune că egalitatea face parte din limbaj (cu proprietățile uzuale) și că se poate demonstra pornind de la legile logicii existența măcar a unei mulțimi (informal vorbind, „universul conține măcar o mulțime”).

Paradoxul lui Russell – discuție

Teoremă (Paradoxul lui Russell)

Nu există o mulțime R astfel încât pentru orice x,

$$x \in R \Leftrightarrow x \notin x.$$

Demonstrație

Presupunem că ar exista. Atunci, luând $x := R$, avem $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, o contradicție.

Observăm că:

- Acest rezultat este un fapt pur logic – nu avem nevoie de axiome ca să îl demonstrăm.
- Rezultatul ca atare nu este contradictoriu, el doar spune că nu există o mulțime cu o anume proprietate. Ca urmare, dacă vrem să nu ajungem la o contradicție, trebuie ca axiomele pe care le vom introduce să nu ne permită să demonstrăm că acel fel de mulțime există.

Axioma extensionalității

În continuare, vom descrie cele nouă axiome care alcătuiesc sistemul ZFC.

Axioma extensionalității

Pentru orice x, y, avem că dacă pentru orice z,

$$z \in x \Leftrightarrow z \in y,$$

atunci $x = y$.

Această axiomă este cea care ne permite ca în matematică să arătăm egalitatea de mulțimi „prin dublă incluziune”. **Incluziunea** a două mulțimi x și y, notată cu $x \subseteq y$ (spunem și că x este **submulțime** a lui y), poate fi definită ca prescurtare a faptului că pentru orice z,

$$z \in x \Rightarrow z \in y.$$

De asemenea, notăm $x \subsetneq y$ pentru $x \subseteq y$ și $x \neq y$.

Unicitatea mulțimii vide

De asemenea, axioma ne permite să arătăm:

Teoremă

Există cel mult o mulțime vidă (fără elemente).

Demonstrație

Fie x, y mulțimi vide și fie z o mulțime oarecare. Atunci $z \notin x$ și $z \notin y$, deci echivalența

$$z \in x \Leftrightarrow z \in y$$

este adevărată. Aplicând Axioma extensionalității, rezultă $x = y$.

Nu știm, însă, că există **cel puțin** o mulțime vidă. Pentru aceasta, este nevoie să introducem încă o axiomă.

Axioma comprehensiunii

Axioma comprehensiunii (separării, specificării)

Pentru orice x și pentru orice „proprietate” P, există o mulțime y, astfel încât pentru orice z, avem

$$z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ și } P(z).$$

Observații:

- Am notat „z verifică P” cu $P(z)$.
- Echivalența de mai sus se va nota $y = \{z \in x \mid P(z)\}$.
- Noțiunea vagă de „proprietate” va fi lăsată nedefinită până la formularea riguroasă a ZFC în logica predicatelor; menționăm doar că este vorba doar de proprietăți care au sens în limbajul ZFC, adică se referă doar la $\in$.
- Formularea axiomei arată un mod prin care este evitat paradoxul lui Russell, anume: nu ne permite să definim mulțimi arbitrare pornind de la anumite proprietăți, ci doar submulțimi ale unor mulțimi „construite deja”.

Mulțimea tuturor mulțimilor

Paradoxul lui Russell poate fi aplicat acum ca să arătăm:

Teoremă

Nu există „mulțimea tuturor mulțimilor”, adică o mulțime căreia să îi aparțină orice mulțime. Ca urmare, pentru orice x există y cu $y \notin x$.

Demonstrație

Presupunem că ar exista o asemenea mulțime și o notăm cu V. Atunci formăm $R := \{z \in V \mid z \notin z\}$, care este exact mulțimea despre care paradoxul lui Russell spune că nu există. Contradicție!

Observăm că mulțimea tuturor mulțimilor nu este un concept inerent contradictoriu, așa cum este cea din paradoxul lui Russell, ci este așa doar în lumina Axiomei comprehensiunii. Există teorii ale mulțimilor în care această mulțime există (cum ar fi **New Foundations**), și în care axioma corespunzătoare este, așadar, altfel formulată.

Existența mulțimii vide

În acest moment, putem arăta și:

Teoremă

Există o mulțime vidă.

Demonstrație

Fie x o mulțime (amintim că universul nostru de discurs conține măcar o mulțime). Formăm mulțimea

$$y := \{z \in x \mid z \neq z\}.$$

Dacă presupunem că ar exista $z \in y$, obținem $z \neq z$, contradicție. Ca urmare, y este vidă.

Acum știm că există și este unică o mulțime vidă și o notăm cu $\emptyset$.

De asemenea, putem defini **intersecția** și **diferența**, pentru orice x, y, prin $x \cap y := \{z \in x \mid z \in y\}$ și $x \setminus y := \{z \in x \mid z \notin y\}$.

Axioma perechii

Până în acest moment, nu am putut construi decât mulțimea vidă. De fapt, se poate observa că aceste două axiome permit ca singura mulțime să fie $\emptyset$, deoarece nu permit să „ieșim din cadru”. Pentru a construi mulțimi nevide, avem nevoie de:

Axioma perechii

Pentru orice x și y, există z astfel încât $x \in z$ și $y \in z$.

Observăm că z nu conține **doar** pe x și y, ci eventual și alte elemente (axiomele sunt exprimate în acest mod din motive care țin de minimalism), dar este ușor să obținem o mulțime (unică!) ce conține doar pe x și y aplicând Axioma comprehensiunii. Notăm acea mulțime cu $\{x, y\}$. În cazul în care $x = y$, vom nota mulțimea $\{x, x\}$ cu $\{x\}$. O mulțime de forma $\{x\}$ se va numi **singleton**.

Vom nota $1 := \{\emptyset\}$ și retrospectiv $0 := \emptyset$. Așadar $1 = \{0\}$. Notăm apoi $2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. 3 va putea fi definit doar mai târziu.

Perechi ordonate

Se observă că pentru orice x și y, $\{x, y\} = \{y, x\}$ (fapt exprimat colocvial prin „într-o mulțime nu contează ordinea elementelor") și de aceea are sens să denumim această mulțime **perechea neordonată** a lui x și y.

În matematică, însă, se folosește deseori noțiunea de **pereche ordonată** a lui x și y, notată cu (x, y). Cum am spus, în universul nostru de discurs există doar mulțimi, deci trebuie și ca (x, y) să fie tot o mulțime. Ea trebuie să „codifice" ideea de pereche ordonată, adică pentru orice x, y să existe (x, y), iar aceasta să poată fi distinsă de (y, x), când $x \neq y$, sau, în general, de vreun (a, b) cu $a \neq x$ sau $b \neq y$. Nu va conta ce definiție alegem, atât timp cât va avea proprietățile dorite și o vom folosi în mod consecvent.

Proprietatea perechilor ordonate

Definiția cea mai frecvent folosită este cea dată de Kazimierz Kuratowski în 1921: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Acum verificăm:

Proprietatea perechilor ordonate

Fie x, y, u, v cu $(x, y) = (u, v)$. Atunci $x = u$ și $y = v$.

Demonstrație

Avem $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Atunci $\{x\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\}$.
Distingem două cazuri.
Cazul I. Avem $\{x\} = \{u\}$. Deci $x = u$ și mai vrem $y = v$.
Subcazul I.1. Avem $x = y$. Atunci

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}.$$

Cum $\{u, v\} \in (x, y)$, avem $\{u, v\} = \{x\}$, de unde scoatem $v = x$ și deci $y = v$.

Proprietatea perechilor ordonate

Demonstrație (cont.)

Subcazul I.2. Avem $x \neq y$.
Atunci, cum $\{x, y\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\}$, avem fie $\{x, y\} = \{u\}$ și deci $x = u$ și $y = u$, de unde avem $x = y$, o contradicție, fie $\{x, y\} = \{u, v\}$, deci $y = u$ sau $y = v$, dar cum $u = x$ și $x \neq y$, avem $y = v$, ceea ce trebuia demonstrat.

Cazul II. Avem $\{x\} = \{u, v\}$. Exercițiu!

Corolar

Fie x și y cu $x \neq y$. Atunci $(x, y) \neq (y, x)$.

Tupluri

Putem defini acum:

- **triplet** pentru x, y, z, ca fiind $(x, y, z) := ((x, y), z)$
- **cvadruplu** pentru x, y, z, t, ca fiind $(x, y, z, t) := (((x, y), z), t)$

și în general n-**tuplu** pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar doar în mod informal, pentru că nu avem (încă) la dispoziție numere naturale.

Când vom vrea să lucrăm cu liste de obiecte de lungime arbitrară (și ne vom putea atunci servi de $\mathbb{N}$), vom folosi o altă formalizare, lăsând-o pe cea de mai sus doar pentru listele de lungime fixă.

Axioma reuniunii

Dacă vrem să formăm mulțimi cu mai mult de două elemente, avem nevoie de următoarea axiomă.

Axioma reuniunii

Pentru orice F există x astfel încât pentru orice y, z cu $z \in y$ și $y \in F$ avem $z \in x$.

Ca mai înainte, putem folosi Axioma comprehensiunii pentru a obține, pentru orice F mulțimea care conține **exact** acei z cu proprietatea că există $y \in F$ cu $z \in y$. Vom nota această mulțime cu $\bigcup F$ și o numim **reuniunea** mulțimii F.

Atenție! Aceasta nu este reuniunea a două mulțimi cu care suntem obișnuiți, ci este, practic, „reuniunea tuturor mulțimilor din F”. Reuniunea uzuală a două mulțimi, x și y, se obține ca:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}.$$

Mulțimi cu mai mult de două elemente

Dacă avem x, y și z, putem defini mulțimea ce conține exact aceste elemente prin

$$\{x, y, z\} := \bigcup\{\{x, y\}, \{z\}\} = \{x, y\} \cup \{z\}.$$

În acest mod, putem defini, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, mulțimi cu n elemente date (din nou, acest „pentru orice $n \in \mathbb{N}$" este informal).

Definim, pentru orice x, $x^+ := x \cup \{x\}$, numind această mulțime **succesorul** lui x, și apoi $3 := 2^+$. Atunci 3 este egal cu

$$2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

și are chiar trei elemente, în sensul că $0 \neq 1$, $0 \neq 2$ și $1 \neq 2$.

Mai mult, observăm că $0^+ = 1$ și $1^+ = 2$, ceea ce justifică denumirea de succesor.

Axioma mulțimii părților

Axioma mulțimii părților

Pentru orice x există y astfel încât pentru orice z cu $z \subseteq x$ avem $z \in y$.

Pentru orice x, notăm mulțimea ce conține **exact** acei z care verifică $z \subseteq x$ cu $\mathcal{P}(x)$ și o numim **mulțimea părților** lui x.

Produsul cartezian

Propoziție

Fie x, y, X, Y cu $x \in X$ și $y \in Y$. Atunci $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$.

Demonstrație

Trebuie să arătăm că, pentru orice $z \in (x, y)$, avem $z \in \mathcal{P}(X \cup Y)$. Fie $z \in (x, y)$. Atunci trebuie să arătăm că, pentru orice $t \in z$, $t \in X \cup Y$, adică $t \in X$ sau $t \in Y$. Fie $t \in z$. Cum $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, avem $z = \{x\}$ sau $z = \{x, y\}$. Cum $t \in z$, avem $t = x$ sau $t = y$. Deci $t \in X$ sau $t \in Y$.

Ca urmare, pentru orice X și Y, mulțimea definită prin

$$X \times Y := \{w \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid \text{există } x \in X \text{ și } y \in Y \text{ cu } w = (x, y)\}$$

conține toate perechile ordonate de elemente din X cu elemente din Y. O numim **produsul cartezian** al lui X și Y.

Intersecții arbitrare și mulțimi Moore

Dacă F este o mulțime **nevidă**, definim **intersecția** mulțimii F ca fiind $\bigcap F := \{z \in \bigcup F \mid \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x\}$.

Definiție

Fie X o mulțime. Numim o mulțime $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ **mulțime Moore** pe X dacă $X \in A$, iar pentru orice $B \subseteq A$ nevidă avem $\bigcap B \in A$.

Teoremă

Fie X o mulțime și A o mulțime Moore pe X. Atunci există și este unic $C \in A$, numit **minimul** lui A, astfel încât pentru orice $D \in A$, avem $C \subseteq D$.

Demonstrație

Unicitatea rezultă imediat: dacă avem C_1, $C_2 \in A$ cu acea proprietate, atunci $C_1 \subseteq C_2$ și $C_2 \subseteq C_1$, deci $C_1 = C_2$. Pentru existență, cum $X \in A$, avem $A \neq \emptyset$, deci $\bigcap A \in A$. Luăm $C := \bigcap A$ și verificăm că are proprietatea căutată.