Logică matematică
CURS 10

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2023/2024

Logica predicatelor

sau

Logica de ordinul I

Motto

"Predicate logic – funny you should mention that.

There is this incredibly toxic view of predicate logic that I first encountered in Good Old-Fashioned A[rtificial] I[ntelligence]. And then [there is] this entirely different, highly useful and precise view of the uses and bounds of logic that I encountered when I started studying mathematical logic and learned about things like model theory.

[...] I'm guessing that the GOFAI people made the terrible, horrible, no good, very bad mistake of getting their views of logic from the descendants of Bertrand Russell who still called themselves philosophers instead of those descendants who considered themselves part of the thriving edifice of mathematics."

– Eliezer Yudkowsky

Logica silogistică

După cum am spus și în Introducerea istorică, cealaltă abordare clasică studiată în liceu asupra logicii, pe lângă logica propozițiilor compuse (corespunzătoare în acest curs logicii propoziționale), a fost logica silogistică, unde întâlneam raționamente de genul următor:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Toți iepurii au blană.}\\ \textit{Unele animale sunt iepuri.}\end{array}}{\textit{Deci, unele animale au blană.}}$$

Formalizarea clasică a argumentului de mai sus era:

$$\frac{\begin{array}{c}MaP\\ SiM\end{array}}{SiP}$$

Șirul format, *a*-*i*-*i*, dădea (printre altele) denumirea acestui tip de raționament: DARII.

Cuantificatori

Metode de a formaliza diverse aserțiuni s-au întâlnit și la materiile matematice – de pildă, folosirea cuantificatorilor. Puteam exprima faptul că într-un corp orice element nenul este inversabil prin:

$$\forall x(\neg(x = 0) \to \exists y(x \cdot y = 1)),$$

iar faptul că o relație de ordine admite un element maximal prin:

$$\exists x \forall y(x \leq y \to x = y).$$

Putem formaliza și argumentul prezentat anterior folosind cuantificatori, în felul următor:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(I(x) \to B(x)) \\ \exists x(A(x) \land I(x))\end{array}}{\exists x(A(x) \land B(x))}$$

Logica predicatelor

Aceste observații conduc la ideea de a defini un nou sistem logic, ce se va numi **logica predicatelor** sau **logica de ordinul I**, unde să avem la dispoziție cuantificatori și variabile, precum și simboluri prin care să exprimăm relații sau operații.

Deși logica propozițiilor compuse a fost prezentată în liceu ca o variantă mai dezvoltată a logicii silogistice (numită la acel moment și logica propozițiilor simple), observăm în exemplele anterioare că, dimpotrivă, logica propozițională, cu operatorii ei ca $\perp$, $\rightarrow$, este cea care va fi înglobată în acest sistem logic cuantificat.

Logica de ordinul I nu doar permite exprimarea riguroasă a enunțurilor de mai devreme (și, după cum am prefigurat, va putea exprima și axiomele teoriei mulțimilor), dar și, într-un anume sens precis (pe care nu îl vom detalia), este cel mai puternic sistem logic utilizabil practic – orice alt sistem mai puternic (cum ar fi, firește, logica de ordinul II) posedă neajunsuri esențiale.

Logica de ordinul I

Vom fixa patru obiecte $\bot$, $\rightarrow$, $\forall$, $=$, diferite două câte două și o mulțime numărabilă

$$V = \{x_0, x_1, \ldots\},$$

cu $V \cap \{\bot, \rightarrow, \forall, =\} = \emptyset$, ale cărei elemente le vom numi **variabile**.

Atenție, însă, aceste variabile **nu** au un rol analog simbolurilor propoziționale. Ne putem întreba, totuși, care este, într-adevăr, analogul acestora din urmă. Observăm că în logica propozițională, dacă schimbam mulțimea simbolurilor, obțineam și o altă mulțime de formule. Și aici, după cum am văzut în exemplele anterioare, avem nevoie de mulțimi de formule diferite pentru a vorbi despre domenii de discurs diferite. Ceea ce dădea diferența între acele domenii era faptul că se foloseau simboluri diferite pentru a exprima obiecte specifice lor, anume $\cdot$, 0, 1; $\leq$; respectiv I, A, B. (Anumite simboluri, ca $\rightarrow$, erau comune – precum în logica propozițională – și de aceea au fost fixate mai sus.)

Signaturi și structuri

Definim, așadar, o **signatură de ordinul I** ca fiind un triplet $\sigma = (F, R, r)$ astfel încât $F \cap R = \emptyset$, $(F \cup R) \cap (V \cup \{\bot, \to, \forall, =\}) = \emptyset$ și $r : F \cup R \to \mathbb{N}$.

Dacă $\sigma = (F, R, r)$ este o signatură de ordinul I, atunci numim elementele lui R **simbolurile de relație** ale lui σ, iar elementele lui F **simbolurile de funcție** ale lui σ; pentru orice $s \in F \cup R$, numim $r(s)$ **aritatea** lui s; în particular, acele $s \in F$ pentru care $r(s) = 0$ se numesc **constantele** lui σ. Mai definim și mulțimea

$$S_\sigma := \{\bot, \to, \forall, =\} \cup V \cup F \cup R.$$

Dacă $\sigma = (F, R, r)$ este o signatură de ordinul I, atunci o σ-**structură** va fi o pereche $(A, \{A_s\}_{s \in F \cup R})$, unde $A \neq \emptyset$ (și se va numi **universul**, **mulțimea suport** sau **mulțimea subiacentă** a structurii), pentru orice $s \in F$, $A_s : A^{r(s)} \to A$ și pentru orice $s \in R$, $A_s \subseteq A^{r(s)}$. Structurile vor reprezenta domeniile despre care vor vorbi formulele corespunzătoare signaturilor.

Exemple

Putem obține signaturile sugerate mai devreme dacă punem $\sigma := (F, R, r)$, iar F, R, r sunt, pe rând:

- $F = \{\cdot, 0, 1\}$, $R = \emptyset$, $r(\cdot) = 2$, $r(0) = r(1) = 0$ – atunci σ-structurile vor fi tuplurile $(A, \cdot, 0, 1)$ unde $\cdot : A^2 \to A$, iar 0, $1 \in A$, de exemplu $(\mathbb{Z}, +, 2, 7)$. Observăm că nu impunem în definiția structurii ca ea să respecte anumite legi, precum inversabilitatea de mai devreme – acest lucru se va face eventual ulterior, după ce vom defini riguros formulele și satisfacerea lor.
- $F = \emptyset$, $R = \{\leq\}$, $r(\leq) = 2$ – atunci σ-structurile vor fi perechi $(A, \leq)$ unde $\leq$ este o relație binară pe A, de exemplu $(\mathbb{N}, >)$.
- $F = \emptyset$, $R = \{I, A, B\}$, $r(I) = r(A) = r(B) = 1$.

Dacă punem $F = R = \emptyset$, atunci obținem o signatură care, dat fiind că singurele fapte pe care le vom putea exprima peste ea vor folosi semnul $=$, se va numi **signatura egalității**.

Signatura aritmeticii

De asemenea, vom defini **signatura aritmeticii** ca fiind

$$\sigma_{\mathrm{ar}} := (\{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0}\}, \{\dot{<}\}, r),$$

unde $r(\dot{+}) = r(\dot{\times}) = r(\dot{<}) = 2$, $r(\dot{S}) = 1$, iar $r(\dot{0}) = 0$. Dacă definim funcția $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin $S(n) := n^+$, iar

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, (N_s)_{s \in F \cup R}),$$

unde $N_{\dot{+}} = +$, $N_{\dot{\times}} = \cdot$, $N_{\dot{S}} = S$, $N_{\dot{0}} = 0$, iar $N_{\dot{<}} =<$, avem că $\mathcal{N}$ este o σ_{ar}-structură.

De remarcat că există și alte σ_{ar}-structuri, de exemplu putem înzestra mulțimea 2 cu $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0 și $<$ pentru a obține o altă σ_{ar}-structură.

Signaturi pentru varii structuri cunoscute

Am definit un graf ca fiind o mulțime înzestrată cu o relație ireflexivă și simetrică. Pentru a modela un graf, este suficient, așadar, să considerăm o signatură care are un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2. Orice graf va fi o structură corespunzătoare acestei signaturi.

În același mod, putem construi signaturi care să modeleze structuri algebrice (în spiritul primului exemplu dat mai devreme). Pentru inele, de pildă, putem considera signatura σ_{a} ce conține simbolurile de operație $+$, $-$, $\cdot$ ce au aritățile 2, 1, respectiv 2, precum și constantele 0 și 1.

Reduse și expansiuni

Dacă $\sigma = (F, R, r)$ și $\sigma' = (F', R', r')$ sunt signaturi, spunem că $\sigma \leq \sigma'$ dacă $F \subseteq F'$, $R \subseteq R'$ și $r = r'_{|F \cup R}$. În această situație, dacă $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ este o σ-structură, iar $\mathcal{B} = (B, (B_s)_{s \in F' \cup R'})$ este o σ'-structură, spunem că $\mathcal{A}$ este **redusa** lui $\mathcal{B}$ la σ sau că $\mathcal{B}$ este o **expansiune** a lui $\mathcal{A}$ la σ' dacă $A = B$, iar pentru orice $s \in F \cup R$, $A_s = B_s$. Se observă că:

- Redusa oricărei σ'-structuri la σ există și este unică (de aceea am folosit articolul hotărât).
- Există mereu o expansiune a unei σ-structuri $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ la σ', obținută în felul următor: se fixează $a \in A \neq \emptyset$, simbolurilor de relație din $R' \setminus R$ li se asociază relații vide, iar simbolurilor de funcție din $F' \setminus F$ li se asociază funcții constante ce iau valoarea a.

Termeni

Formulele corespunzătoare unei signaturi $\sigma = (F, R, r)$ vor fi cuvinte peste alfabetul S_σ. Înainte de a defini formulele, va trebui să definim **termenii** (de pildă, $x \cdot y$ de mai devreme). Ei se definesc ca fiind cea mai mică mulțime $A \subseteq \mathrm{Seq_{fin}}(S_\sigma)$ astfel încât:

- $V \subseteq A$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in A$, avem $st_1 \ldots t_{r(s)} \in A$ (în particular, dacă $r(s) = 0$, $s \in A$).

Mulțimea termenilor peste σ se va nota cu T_σ.

Inducție și recursie pe termeni

Principiul inducției pe termeni

Fie $B \subseteq T_\sigma$ astfel încât:

- $V \subseteq B$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in B$, avem $st_1 \dots t_{r(s)} \in B$.

Atunci $B = T_\sigma$.

Principiul recursiei pe termeni

Fie A o mulțime și $G_0 : V \to A$, iar pentru orice $s \in F$, $G_s : A^{r(s)} \to A$. Atunci există și este unică $F : T_\sigma \to A$ astfel încât:

- pentru orice $x \in V$, $F(x) = G_0(x)$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$, $F(st_1 \dots t_{r(s)}) = G_s(F(t_1), \dots, F(t_{r(s)}))$.

Mulțimea variabilelor unui termen

Ca exemplu, putem defini recursiv mulțimea variabilelor unui termen. Practic, definim funcția $Var : T_\sigma \to \mathcal{P}(V)$, prin:

- pentru orice $x \in V$, $Var(x) := \{x\}$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$, $Var(st_1 \ldots t_{r(s)}) := Var(t_1) \cup \ldots \cup Var(t_{r(s)})$ (în particular, dacă $r(s) = 0$, $Var(s) = \emptyset$).

Evaluarea termenilor

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură. Atunci pentru orice $v : V \to A$ există și este unică o funcție $(\cdot)_v^{\mathcal{A}} : T_\sigma \to A$ astfel încât

- pentru orice $x \in V$, $x_v^{\mathcal{A}} = v(x)$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$, $(st_1 \ldots t_{r(s)})_v^{\mathcal{A}} = A_s((t_1)_v^{\mathcal{A}}, \ldots, (t_{r(s)})_v^{\mathcal{A}})$ (în particular, dacă $r(s) = 0$, $s_v^{\mathcal{A}} = A_s$).

Atenție, din nou: funcția v din definiția de mai sus **nu** are un rol similar cu cel al funcțiilor $e : Q \to 2$ din logica propozițională, cu toate că ar putea părea astfel.

Lema variabilelor (pentru termeni)

Lema variabilelor (pentru termeni)

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură, v_1, $v_2 : V \to A$ și $t \in T_\sigma$ astfel încât $v_{1|Var(t)} = v_{2|Var(t)}$. Atunci $t^{\mathcal{A}}_{v_1} = t^{\mathcal{A}}_{v_2}$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după termeni. Dacă $x \in V$, atunci $x \in \{x\} = Var(x)$ și deci $v_1(x) = v_2(x)$, i.e. $x^{\mathcal{A}}_{v_1} = x^{\mathcal{A}}_{v_2}$.

Fie acum $s \in F$ și $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$ ce verifică concluzia lemei. Fie $i \in \{1, \ldots, r(s)\}$. Atunci $Var(t_i) \subseteq Var(t)$ și deci $v_{1|Var(t_i)} = v_{2|Var(t_i)}$. Din ipoteza de inducție, avem $(t_i)^{\mathcal{A}}_{v_1} = (t_i)^{\mathcal{A}}_{v_2}$ și așadar:

$$\begin{aligned}
(st_1 \ldots t_{r(s)})^{\mathcal{A}}_{v_1} &= A_s((t_1)^{\mathcal{A}}_{v_1}, \ldots, (t_{r(s)})^{\mathcal{A}}_{v_1}) \\
&= A_s((t_1)^{\mathcal{A}}_{v_2}, \ldots, (t_{r(s)})^{\mathcal{A}}_{v_2}) \\
&= (st_1 \ldots t_{r(s)})^{\mathcal{A}}_{v_2}.
\end{aligned}$$

Formule

Fie $\sigma = (F, R, r)$ o signatură. Numim **formulă atomică** peste σ un șir de forma $= tu$, cu t, $u \in T_\sigma$ sau un șir de forma $st_1 \ldots t_n$ cu $s \in R$, $n = r(s)$ și $t_1, \ldots, t_n \in T_\sigma$. Mulțimea formulelor atomice peste σ se va nota cu Fa_σ. Mulțimea **formulelor** peste σ se definește ca fiind cea mai mică mulțime $A \subseteq \mathrm{Seq_{fin}}(S_\sigma)$ astfel încât:

- formulele atomice aparțin lui A;
- $\bot \in A$;
- dacă φ, $\psi \in A$, atunci $\rightarrow \varphi\psi \in A$;
- dacă $\varphi \in A$ și $x \in V$, atunci $\forall x \varphi \in A$.

Mulțimea formulelor peste σ se va nota cu F_σ.

Notație infixată și conectori derivați

Vom folosi aceeași metodă pe care am folosit-o la logica propozițională pentru a putea nota formulele infixat – pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\varphi \to \psi$ în loc de $\to \varphi\psi$, dar și, pentru orice $t, u \in T_\sigma$, $t = u$ în loc de $= tu$.

De asemenea, vom nota, ca mai înainte, pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$,

$$\top := \bot \to \bot, \quad \neg\varphi := \varphi \to \bot, \quad \varphi \land \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi),$$

$$\varphi \lor \psi := (\neg\varphi) \to \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi).$$

dar și, pentru orice $x \in V$ și $\varphi \in F_\sigma$,

$$\exists x\varphi := \neg\forall x\neg\varphi.$$

Inducție pe formule

Principiul inducției pe formule

Fie $B \subseteq F_\sigma$ astfel încât:

- formulele atomice aparțin lui B;
- $\perp \in B$;
- dacă $\varphi, \psi \in B$, atunci $\varphi \rightarrow \psi \in B$;
- dacă $\varphi \in B$ și $x \in V$, atunci $\forall x \varphi \in B$.

Atunci $B = F_\sigma$.

Recursie pe formule

Principiul recursiei pe formule

Fie A o mulțime și $G_0 : Fa_\sigma \to A$, $G_\bot \in A$, $G_\to : A^2 \to A$, $G_\forall : V \times A \to A$. Atunci există și este unică $F : F_\sigma \to A$ astfel încât:

- pentru orice $\varphi \in Fa_\sigma$, $F(\varphi) = G_0(\varphi)$;
- $F(\bot) = G_\bot$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $F(\forall x \varphi) = G_\forall(x, F(\varphi))$.

Mulțimea variabilelor libere ale unei formule

Ca exemplu, putem defini recursiv mulțimea variabilelor **libere** ale unei formule. Definim funcția $FV : F_\sigma \to \mathcal{P}(V)$, prin:

- pentru orice $t, u \in T_\sigma$, $FV(t = u) := Var(t) \cup Var(u)$;
- pentru orice $s \in R$ și orice $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$, $FV(st_1 \ldots t_{r(s)}) := Var(t_1) \cup \ldots \cup Var(t_{r(s)})$;
- $FV(\bot) := \emptyset$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $FV(\varphi \to \psi) := FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $FV(\forall x \varphi) := FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

Dacă $\varphi \in F_\sigma$ cu $FV(\varphi) = \emptyset$, atunci φ se numește **enunț**. Mulțimea enunțurilor peste σ se notează cu E_σ.

Spre evaluarea formulelor

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură. Pentru orice $v : V \to A$, $x \in V$, $a \in A$, definim $v_{x \leftarrow a} : V \to A$, pentru orice $y \in V$, prin

$$v_{x \leftarrow a}(y) := \begin{cases} v(y), & \text{dacă } y \neq x, \\ a, & \text{dacă } y = x. \end{cases}$$

Observăm că pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $v : V \to A$ și orice a, $b \in A$, avem că

$$(v_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (v_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $v_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Așadar, pentru orice $z \in V$,

$$v_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(z) = \begin{cases} v(z) & \text{dacă } z \neq x \text{ și } z \neq y, \\ a & \text{dacă } z = x, \\ b & \text{dacă } z = y. \end{cases}$$

Evaluarea formulelor

Avem că există și este unică o funcție $\|\cdot\|^{\mathcal{A}} : F_\sigma \to 2^{A^V}$ astfel încât, pentru orice $v : V \to A$, avem:

- pentru orice t, $u \in T_\sigma$, $\|t = u\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow t_v^{\mathcal{A}} = u_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $s \in R$ și orice $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$, $\|st_1 \ldots t_{r(s)}\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow ((t_1)_v^{\mathcal{A}}, \ldots, (t_{r(s)})_v^{\mathcal{A}}) \in A_s$;
- $\|\bot\|_v^{\mathcal{A}} = \bot = 0$;
- pentru orice φ, $\psi \in F_\sigma$, $\|\varphi \to \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \to \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $\|\forall x \varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow$ pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$.

Dacă $\varphi \in F_\sigma$ este astfel încât pentru orice $\mathcal{A}$ și v, $\|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$, spunem că φ este **validă**.

Evaluarea conectorilor derivați

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură. Este acum imediat că pentru orice $v : V \to A$, avem:

- $\|\top\|_v^{\mathcal{A}} = \mathsf{T} = 1$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\|\varphi \wedge \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \mathbin{\pmb{\wedge}} \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\|\varphi \vee \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \mathbin{\pmb{\vee}} \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\|\varphi \leftrightarrow \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \mathbin{\pmb{\leftrightarrow}} \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $\|\exists x \varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow$ există $a \in A$ cu $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$.

Tautologii

Definiție

Spunem că $\chi \in F_\sigma$ se numește **tautologie** dacă pentru orice $F : F_\sigma \to 2$ astfel încât $F(\perp) = 0$ și pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $F(\varphi \to \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$, avem $F(\chi) = 1$.

Propoziție

Orice tautologie este formulă validă.

Demonstrație

Fie χ o tautologie. Fie $\mathcal{A}$ și v. Definim $F : F_\sigma \to 2$, pentru orice $\varphi \in F_\sigma$, prin $F(\varphi) := \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}}$. Atunci F verifică condițiile din definiția tautologiei, deci $F(\chi) = 1$, i.e. $\|\chi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$.

Lema variabilelor libere

Lema variabilelor libere

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ-structură, $v_1, v_2 : V \to A$ și $\varphi \in F_\sigma$ astfel încât $v_{1|FV(\varphi)} = v_{2|FV(\varphi)}$. Atunci $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{v_1} = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{v_2}$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după formule. Vom demonstra doar cazul cel mai greu, anume atunci când știm că concluzia lemei este valabilă pentru un $\varphi \in F_\sigma$, avem $x \in V$ și vrem să o demonstrăm pentru $\forall x \varphi$. Dat fiind că $\|\forall x \varphi\|^{\mathcal{A}}_{v_1} = 1$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{(v_1)_{x \leftarrow a}} = 1$, iar $\|\forall x \varphi\|^{\mathcal{A}}_{v_2} = 1$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{(v_2)_{x \leftarrow a}} = 1$, este suficient să arătăm că pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{(v_1)_{x \leftarrow a}} = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{(v_2)_{x \leftarrow a}}$. Fie $a \in A$. Din ipoteza de inducție, este suficient să arătăm că $((v_1)_{x \leftarrow a})_{|FV(\varphi)} = ((v_2)_{x \leftarrow a})_{|FV(\varphi)}$. Fie $y \in FV(\varphi)$. Atunci, fie $y = x$, iar atunci $(v_1)_{x \leftarrow a}(y) = a = (v_2)_{x \leftarrow a}(y)$, fie $y \neq x$, iar atunci $y \in FV(\varphi) \setminus \{x\} = FV(\forall x \varphi)$. Avem $(v_1)_{x \leftarrow a}(y) = v_1(y) = v_2(y) = (v_2)_{x \leftarrow a}(y)$.

Evaluarea enunțurilor

Așadar, dacă $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ este o σ-structură și φ este enunț, pentru orice v_1, $v_2 : V \to A$, avem $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{v_1} = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{v_2}$, deci este echivalent faptul că pentru orice $v : V \to A$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{v} = 1$ cu faptul că există $v : V \to A$ cu $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_{v} = 1$. Notăm această stare de fapt cu

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

și spunem că $\mathcal{A}$ **satisface** φ sau că $\mathcal{A}$ este **model** pentru φ.

Iată, deci, că structurile de ordinul I reprezintă analogul funcțiilor $e : Q \to 2$ întâlnite în logica propozițională. De aici provine și numele acelei ramuri a logicii care studiază structurile de ordinul I în conjuncție cu enunțurile satisfăcute de ele: **teoria modelelor**.

Semnul $\models$ în logica de ordinul I

Vom defini următoarele concepte, precum și noi semnificații ale semnului $\models$, prin analogie cu logica propozițională:

- Dacă $\varphi \in E_\sigma$ și φ este valid, vom scrie $\models \varphi$.
- Spunem că $\varphi \in E_\sigma$ este **satisfiabil** dacă există $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \varphi$.
- Spunem că un enunț φ este **nesatisfiabil** dacă φ nu este satisfiabil.
- Fie $\varphi, \psi \in E_\sigma$. Spunem că din φ **se deduce semantic** ψ și scriem $\varphi \models \psi$ dacă pentru orice $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \varphi$ avem $\mathcal{A} \models \psi$.

Clar, $\bot$ este enunț, iar pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, avem $\mathcal{A} \not\models \bot$, i.e. $\bot$ este nesatisfiabil.

Un exemplu

Vom ilustra în continuare toate conceptele de până acum. Fie σ prima signatură dată ca exemplu în curs și considerăm σ-formula

$$\varphi := \forall x_0 (x_0 \cdot 1 = x_0).$$

Atunci

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= FV(x_0 \cdot 1 = x_0) \setminus \{x_0\} \\ &= (Var(x_0 \cdot 1) \cup Var(x_0)) \setminus \{x_0\} \\ &= (Var(x_0) \cup Var(1) \cup Var(x_0)) \setminus \{x_0\} \\ &= (\{x_0\} \cup \emptyset \cup \{x_0\}) \setminus \{x_0\} = \emptyset, \end{aligned}$$

deci φ este enunț.

Un exemplu

Fie acum $\mathcal{A}$ o σ-structură având pe A ca univers și $v : V \to A$. Avem că

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow & \|\forall x_0 (x_0 \cdot 1 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A,\ \|x_0 \cdot 1 = x_0\|_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A,\ (x_0 \cdot 1)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = (x_0)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} \\
& \Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A,\ A_.((x_0)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}, 1_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}) = (x_0)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} \\
& \Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A,\ A_.(v_{x_0 \leftarrow a}(x_0), A_1) = v_{x_0 \leftarrow a}(x_0) \\
& \Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A,\ A_.(a, A_1) = a,
\end{aligned}$$

deci $\mathcal{A} \models \varphi$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in A$, $A_.(a, A_1) = a$.

Numărul de elemente

Tot în orice signatură σ, are sens să definim, pentru orice $n \geq 2$, enunțul

$$\exists^{\geq n} := \exists x_1 \ldots \exists x_n(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots),$$

iar pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, și orice $n \geq 2$, avem $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n}$ dacă și numai dacă universul lui $\mathcal{A}$ are cardinalul cel puțin n. Putem defini și $\exists^{\geq 1}$ ca fiind $\exists x_1(x_1 = x_1)$, care va fi un enunț valid, dat fiind că am presupus că orice structură are universul nevid. De asemenea, vom mai defini, pentru orice $n \geq 1$:

$$\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n^+},$$
$$\exists^{= n} := \exists^{\geq n} \wedge \exists^{\leq n},$$

ce vor avea semnificațiile lor firești.

Substituția pe termeni

Pentru orice t, $u \in T_\sigma$ și $y \in V$, vom defini termenul $t[y := u]$ (citim, de pildă, „t în care y a fost substituit prin u"), în mod recursiv, astfel:

- dacă $t \in V$,

$$t[y := u] = \begin{cases} u, & \text{dacă } y = t, \\ t, & \text{dacă } y \neq t. \end{cases}$$

- pentru orice $s \in F$, $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,

$$(st_1 \ldots t_{r(s)})[y := u] = s(t_1[y := u]) \ldots (t_{r(s)}[y := u]).$$

Substituția pe formule

Pentru orice $\chi \in F_\sigma$, $y \in V$ și $u \in T_\sigma$, vom defini formula $\chi[y := u]$ (citim, de pildă, „χ în care y a fost substituit prin u”), în mod recursiv, astfel:

- pentru orice $t, v \in T_\sigma$,
  $(t = v)[y := u] := ((t[y := u]) = (v[y := u]))$;
- pentru orice $s \in R$, $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,
  $$(st_1 \ldots t_{r(s)})[y := u] := s(t_1[y := u]) \ldots (t_{r(s)}[y := u]);$$
- $\bot[y := u] := \bot$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$,
  $(\varphi \to \psi)[y := u] := (\varphi[y := u]) \to (\psi[y := u])$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$,
  $$(\forall x\varphi)[y := u] := \begin{cases} \forall x(\varphi[y := u]), & \text{dacă } y \neq x, \\ \forall x\varphi, & \text{dacă } y = x. \end{cases}$$

Deziderate

Am dori ca pentru orice χ, y, u, formula

$$\forall y \chi \to (\chi[y := u])$$

să fie validă.

Din păcate, acest lucru nu este adevărat. De pildă, luăm $\chi := \neg\forall x_0(x_0 = x_1)$, $y := x_1$, $u := x_0$. Atunci

$$\begin{aligned}
\chi[y := u] &= (\neg\forall x_0(x_0 = x_1))[x_1 := x_0] \\
&= \neg((\forall x_0(x_0 = x_1))[x_1 := x_0]) \\
&= \neg\forall x_0((x_0 = x_1)[x_1 := x_0]) \\
&= \neg\forall x_0(x_0[x_1 := x_0] = x_1[x_1 := x_0]) \\
&= \neg\forall x_0(x_0 = x_0).
\end{aligned}$$

Deziderate

Formula despre care vrem să fie validă va fi

$$\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1) \to \neg \forall x_0 (x_0 = x_0).$$

Dar dacă luăm $\mathcal{A}$ o σ-structură al cărei univers este mulțimea $2 = \{0, 1\}$, iar $v : V \to 2$ oarecare, cum pentru orice $a \in 2$ există $b \in 2$ cu $a \neq b$, avem

$$\|\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1)\|_v^{\mathcal{A}} = 1,$$

iar cum nu este adevărat că există $a \in 2$ cu $a \neq a$, avem

$$\|\neg \forall x_0 (x_0 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} = 0.$$

Ca urmare,

$$\begin{aligned}
&\|\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1) \to \neg \forall x_0 (x_0 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} \\
&= \|\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1)\|_v^{\mathcal{A}} \rightarrow \|\neg \forall x_0 (x_0 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} \\
&= 1 \rightarrow 0 = 0,
\end{aligned}$$

deci formula nu este validă.

Soluționare

Problema este că în termenul u apare variabila x_0 care este apoi „capturată accidental" de cuantificatorul $\forall x_0$ ce apare în formula χ. Soluția va fi să păstrăm definiția dată doar pentru situațiile în care acest fenomen nu poate apărea. Aceste situații „bune", ce depind, firește, de χ, y și u, vor fi definite în continuare sub titulatura „y este **liber pentru** u în χ".

Definiția lui „y este liber pentru u în χ" este recursivă și are forma următoare:

- y este liber pentru u în orice formulă atomică sau în $\perp$;
- y este liber pentru u în $\varphi \to \psi$ dacă y este liber pentru u în φ și y este liber pentru u în ψ;
- y este liber pentru u în $\forall x \varphi$ dacă fie avem că $y \notin FV(\forall x \varphi)$, fie avem că $x \notin Var(u)$ și y este liber pentru u în φ.

Mulțimea variabilelor unei formule

Pentru a oferi un exemplu general de caz în care această situație are loc, definim mulțimea variabilelor unei formule (nu doar cele libere), prin funcția $Var : F_\sigma \to \mathcal{P}(V)$, definită recursiv prin:

- pentru orice $t, u \in T_\sigma$, $Var(t = u) := Var(t) \cup Var(u)$;
- pentru orice $s \in R$ și orice $t_1, \ldots, t_{r(s)} \in T_\sigma$, $Var(st_1 \ldots t_{r(s)}) := Var(t_1) \cup \ldots \cup Var(t_{r(s)})$;
- $Var(\bot) := \emptyset$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $Var(\varphi \to \psi) := Var(\varphi) \cup Var(\psi)$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $Var(\forall x \varphi) := Var(\varphi) \cup \{x\}$.

Exemplul general

Propoziție

Fie $\chi \in F_\sigma$, $y \in V$, $u \in T_\sigma$. Atunci, dacă $Var(\chi) \cap Var(u) = \emptyset$, avem că y este liber pentru u în χ.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după χ. Cazul netrivial este cel în care χ este de forma $\forall x \varphi$. Știm că $Var(\forall x \varphi) \cap Var(u) = \emptyset$, iar cum $Var(\varphi) \subseteq Var(\forall x \varphi)$, avem $Var(\varphi) \cap Var(u) = \emptyset$. Din ipoteza de inducție, avem că y este liber pentru u în φ.

Presupunem că $y \in FV(\varphi)$. Rămâne de arătat că $x \notin Var(u)$. Dar aceasta este adevărat, dat fiind că $x \in Var(\forall x \varphi)$, iar $Var(\forall x \varphi) \cap Var(u) = \emptyset$.

Proprietățile substituției libere

Pentru a arăta că, în acest caz de „substituție liberă”, formulele pe care le doream valide într-adevăr sunt așa, vom folosi următoarele proprietăți, ale căror demonstrații le lăsăm ca exercițiu.

Proprietățile substituției libere

Fie $\chi \in F_\sigma$, t, $u \in T_\sigma$, $y \in V$, $\mathcal{A}$ o σ-structură cu universul A și $v : V \to A$. Atunci:

- $(t[y := u])^{\mathcal{A}}_v = t^{\mathcal{A}}_{v_{y \leftarrow u^{\mathcal{A}}_v}}$;
- dacă y este liber pentru u în χ, $\|\chi[y := u]\|^{\mathcal{A}}_v = \|\chi\|^{\mathcal{A}}_{v_{y \leftarrow u^{\mathcal{A}}_v}}$.

Validitatea

Acum putem demonstra rezultatul dorit.

Propoziție

Fie $\chi \in F_\sigma$, $y \in V$, $u \in T_\sigma$, $\mathcal{A}$ o σ-structură cu universul A și $v : V \to A$. Presupunem că y este liber pentru u în χ. Atunci avem

$$\|\forall y \chi \to (\chi[y := u])\|_v^{\mathcal{A}} = 1.$$

Demonstrație

Presupunem că avem $\|\forall y \chi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\|\chi\|_{v_{y \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$. În particular, $\|\chi\|_{v_{y \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}}^{\mathcal{A}} = 1$, deci, din propoziția precedentă,

$$\|(\chi[y := u])\|_v^{\mathcal{A}} = 1.$$

Variante libere

Pentru a putea defini corect substituția în cazul general, vom defini recursiv, pentru orice formulă χ și orice $W \subseteq V$ finită, **varianta** W**-liberă** a lui χ, notată cu χ^W, în felul următor:

- dacă χ este atomică sau $\bot$, $\chi^W := \chi$;
- $(\varphi \to \psi^W) := \varphi^W \to \psi^W$;
- $(\forall x \varphi)^W := \begin{cases} \forall z \left(\varphi^W[x := z]\right), & \text{dacă } x \in W, \\ \forall x \varphi^W, & \text{dacă } x \notin W, \end{cases}$

  unde z este variabila cu indice cel mai mic din mulțimea (nevidă) $V \setminus \left(W \cup Var\left(\varphi^W\right)\right)$.

A se observa că în acest ultim caz, cum $z \notin Var\left(\varphi^W\right)$, avem că $Var\left(\varphi^W\right) \cap Var(z) = \emptyset$, deci substituția din definiție este liberă.

Proprietăți ale variantelor libere

Aceste variante libere au următoarele proprietăți, ale căror demonstrații le lăsăm ca exercițiu.

Propoziție

Fie $\chi \in F_\sigma$.

- Fie $y \in V$, $u \in T_\sigma$. Atunci y este liber pentru u în $\chi^{Var(u)}$.
- Fie $W \subseteq V$ finită, $\mathcal{A}$ o σ-structură cu universul A și $v : V \to A$. Atunci $\left\|\chi^W\right\|_v^{\mathcal{A}} = \|\chi\|_v^{\mathcal{A}}$.

Substituții nelibere

Definim, acum, pentru orice χ, y, u astfel încât y **nu** este liber pentru u în χ,

$$\chi[y := u] := \chi^{Var(u)}[y := u].$$

Dat fiind că ne-am restrâns la cazul „neliber”, nu intrăm în conflict de limbaj cu folosirea operației de substituție din cadrul definirii variantei libere (și nici cu membrul drept de mai sus).

Propoziție

Fie χ, y, u astfel încât y nu este liber pentru u în χ. Atunci avem, pentru orice $\mathcal{A}$ și v, $\|\chi[y := u]\|_v^{\mathcal{A}} = \|\chi\|_{v_{y \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}}^{\mathcal{A}}$ și, deci, ca mai înainte, formula $\forall y \chi \to (\chi[y := u])$ este validă.

Demonstrație

Fie $\mathcal{A}$ și v. Avem, folosind proprietățile anterioare, că

$$\|\chi[y := u]\|_v^{\mathcal{A}} = \left\|\chi^{Var(u)}[y := u]\right\|_v^{\mathcal{A}} = \left\|\chi^{Var(u)}\right\|_{v_{y \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}}^{\mathcal{A}} = \|\chi\|_{v_{y \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}}^{\mathcal{A}}.$$