Logică matematică
CURS 11

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2023/2024

Complet analog celor din logica propozițională, vom introduce noțiuni de satisfiabilitate pentru mulțimi de formule, precum și semnificații corespunzătoare ale semnului $\models$.

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$. Pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, spunem că $\mathcal{A}$ **satisface** Γ sau că $\mathcal{A}$ este **model** pentru Γ, și scriem $\mathcal{A} \models \Gamma$, dacă pentru orice $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models \varphi$.

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există o σ-structură $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \Gamma$; că este **nesatisfiabilă** dacă nu este satisfiabilă; și că este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Ca exemplu, fie $\Gamma := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$. Atunci o structură satisface Γ dacă și numai dacă mulțimea ei subiacentă este infinită.

Proprietăți

Următoarele proprietăți se demonstrează perfect analog celor din logica propozițională.

Proprietăți

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$, $\Delta \subseteq \Gamma$ și $\mathcal{A}$ o σ-structură. Avem următoarele:

- Dacă $\mathcal{A} \models \Gamma$, atunci $\mathcal{A} \models \Delta$.
- Dacă Δ este nesatisfiabilă, atunci Γ este nesatisfiabilă.
- Avem că $\mathcal{A} \models \Gamma$ dacă și numai dacă pentru orice $\Sigma \subseteq \Gamma$ finită, $\mathcal{A} \models \Sigma$.

Deducție semantică din mulțimi

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ și $\varphi \in E_\sigma$. Spunem că din Γ **se deduce semantic** φ, și scriem $\Gamma \models \varphi$, dacă pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \Gamma$ avem $\mathcal{A} \models \varphi$. Această noțiune are următoarele proprietăți analoage celor din logica propozițională și demonstrabile similar.

Proprietăți

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$, $\Delta \subseteq \Gamma$ și φ, $\psi \in E_\sigma$. Avem următoarele:

- Dacă $\Delta \models \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.
- Mulțimea Γ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă $\Gamma \models \bot$.
- Avem $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- Avem $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

Teorema de compacitate

Din nou ca în logica propozițională, vom putea enunța Teorema de compacitate, în cele două variante ale ei. Această teoremă reprezintă temelia întregii teorii a modelelor logicii de ordinul I.

Teorema de compacitate

- Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ și $\varphi \in E_\sigma$. Atunci $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi$.
- O mulțime de enunțuri este satisfiabilă dacă și numai dacă este finit satisfiabilă.

Precum în cazul logicii propoziționale, fiecare dintre variante are câte o implicație imediată, iar implicațiile care rămân sunt echivalente între ele (cu demonstrații perfect analoage). Ceea ce ne rămâne va fi demonstrarea următorului rezultat.

Teoremă (TK2$\Leftarrow$)

Orice mulțime de enunțuri finit satisfiabilă este satisfiabilă.

Instrumentul cu care s-a demonstrat acel rezultat la logica propozițională a fost **ultraprodusul**. Vom indica în continuare cum se definește această noțiune pentru structuri de ordinul I, definiția fiind mai elaborată decât cea pentru evaluări propoziționale (cronologic, ea a apărut, însă, anterior).

Considerăm $\sigma = (F, R, r)$ signatura peste care lucrăm. Fie I o mulțime nevidă, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ o familie de σ-structuri, astfel încât, pentru orice $i \in I$, $\mathcal{A}_i = (A_i, (A_{i,s})_{s \in F \cup R})$ și U un ultrafiltru pe I. Vom nota cu $\mathcal{A}^U = (A^U, (A_s^U)_{s \in F \cup R})$ σ-structura care va reprezenta ultraprodusul familiei $\mathcal{A}$ relativ la U și pe care o vom defini în continuare.

Cum, pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$, aplicând Axioma alegerii, avem că $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Ultraproduse de ordinul I

Vom defini o relație de echivalență pe $\prod_{i\in I} A_i$, notată cu $\sim_U$, în felul următor: pentru orice $(f_i)_{i\in I}$, $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, spunem că $(f_i)_{i\in I} \sim_U (g_i)_{i\in I}$ dacă

$$\{i \in I \mid f_i = g_i\} \in U,$$

și vom pune $A^U := \prod_{i\in I} A_i / \sim_U$.

Pentru orice $s \in F \cup R$ și orice $(a_{1,i})_{i\in I}, \ldots, (a_{r(s),i})_{i\in I}$, punem, dacă $s \in F$,

$$A_s^U(\widehat{(a_{1,i})_{i\in I}}, \ldots, \widehat{(a_{r(s),i})_{i\in I}}) := \widehat{(A_{i,s}(a_{1,i}, \ldots, a_{r(s),i}))_{i\in I}},$$

iar dacă $s \in R$,

$$(\widehat{(a_{1,i})_{i\in I}}, \ldots, \widehat{(a_{r(s),i})_{i\in I}}) \in A_s^U :\Leftrightarrow \{i \in I \mid (a_{1,i}, \ldots, a_{r(s),i}) \in A_{i,s}\} \in U.$$

Se poate demonstra că aceste definiții sunt corecte (nu depind de reprezentanți) și, deci, am terminat de definit ultraprodusul $\mathcal{A}^U$.

Funcții cu valori într-un produs cartezian

Având în vedere că în definirea ultraprodusului se folosește produsul cartezian (de aici îi vine și denumirea, lucru care nu era vizibil în logica propozițională), vom da niște definiții ce se referă la funcții cu valori într-o asemenea mulțime.

Fie I o mulțime și $(A_i)_{i \in I}$. Fie $v : V \to \prod_{i \in I} A_i$ și U un ultrafiltru pe I. Pentru orice $i \in I$, definim $v_i : V \to A_i$, punând, pentru orice $x \in V$, $v_i(x) := v(x)_i$, și mai definim $v^U : V \to A^U$, punând, pentru orice $x \in V$, $v^U(x) := \widehat{v(x)}$.

Proprietăți

Fie $x \in V$ și $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Avem următoarele:

- Pentru orice $i \in I$, $(v_{x \leftarrow a})_i = (v_i)_{x \leftarrow a_i}$.
- Avem $(v_{x \leftarrow a})^U = (v^U)_{x \leftarrow \widehat{a}}$.

Teorema fundamentală a ultraproduselor

Teorema fundamentală a ultraproduselor (Łoś)

Fie I o mulțime nevidă, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ o familie de σ-structuri astfel încât pentru orice $i \in I$, notăm cu A_i universul lui $\mathcal{A}_i$, $v : V \to \prod_{i \in I} A_i$ și U un ultrafiltru pe I. Atunci:

- Pentru orice $t \in T_\sigma$,

$$t_{v^U}^{\mathcal{A}^U} = \widehat{(t_{v_i}^{\mathcal{A}_i})_{i \in I}}.$$

- Pentru orice $\chi \in F_\sigma$,

$$\|\chi\|_{v^U}^{\mathcal{A}^U} = 1 \Leftrightarrow \{i \in I \mid \|\chi\|_{v_i}^{\mathcal{A}_i} = 1\} \in U.$$

Demonstrația depășește cadrul cursului. Ea poate fi, însă, un exercițiu pentru cei interesați – se face prin inducție structurală; cazul oarecum mai netrivial este cel al cuantificatorului universal, unde se vor folosi și proprietățile care au fost (cu acest scop) indicate anterior ale funcțiilor cu valori într-un produs cartezian.

Corolar

Fie I o mulțime nevidă, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ o familie de σ-structuri și U un ultrafiltru pe I. Atunci, pentru orice $\chi \in E_\sigma$,

$$\mathcal{A}^U \models \chi \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \chi\} \in U.$$

Următorul rezultat se deduce întocmai ca la logica propozițională.

Teorema fundamentală a ultraproduselor – versiunea 2

Fie I o mulțime nevidă, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ o familie de σ-structuri și U un ultrafiltru pe I. Atunci, pentru orice $\Delta \subseteq E_\sigma$ finită,

$$\mathcal{A}^U \models \Delta \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \Delta\} \in U.$$

Trucul lui Scott

Pentru a demonstra Teorema de compacitate, mai avem nevoie de un rezultat, anume o formă mai tare a Axiomei alegerii.

Teoremă (Axioma alegerii pentru proprietăți)

Fie P o proprietate ce are două argumente și I o mulțime astfel încât pentru orice $i \in I$, există x cu $P(i,x)$. Atunci există o familie $(x_i)_{i \in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $P(i, x_i)$.

Demonstrație

Vom folosi faptul că orice mulțime are rang. Pentru orice $i \in I$, punem α_i să fie acel ordinal α **minim** cu proprietatea că există $x \in V_\alpha$ cu $P(i,x)$ și apoi punem

$$X_i := \{x \in V_{\alpha_i} \mid P(i,x)\} \neq \emptyset.$$

(Acest procedeu de formare a mulțimilor X_i se numește **trucul lui Scott**.) Aplicăm, apoi, Axioma alegerii pe familia $(X_i)_{i \in I}$ și obținem familia cerută.

Demonstrația teoremei de compacitate

Putem, acum, demonstra acea implicație rămasă a Teoremei de compacitate.

Teoremă (TK2$\Leftarrow$)

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ finit satisfiabilă. Atunci Γ este satisfiabilă.

Demonstrație

Fie $I := \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Gamma) = \{\Delta \in \mathcal{P}(\Gamma) \mid \Delta \text{ finită}\}$. Cum $\emptyset \in I$, $I \neq \emptyset$. Pentru orice $\Delta \in I$, există o σ-structură $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \Delta$. Din teorema precedentă, există o familie de σ-structuri $(\mathcal{A}_\Delta)_{\Delta \in I}$ astfel încât, pentru orice $\Delta \in I$, $\mathcal{A}_\Delta \models \Delta$.

Demonstrația **curge** apoi întocmai ca la logica propozițională. **A se observa** că avem nevoie de Axioma alegerii de multe ori (inclusiv în Teorema fundamentală a ultraproduselor, pe care nu am demonstrat-o!).

Fie Γ, $\Delta \subseteq E_\sigma$. Vom nota:

- prin $\Gamma \models \Delta$ faptul că pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \Gamma$ avem $\mathcal{A} \models \Delta$;
- prin $\Gamma \sim \Delta$ faptul că pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Gamma$ dacă și numai dacă $\mathcal{A} \models \Delta$.

Observăm că $\Gamma \sim \Delta$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \Delta$ și $\Delta \models \Gamma$.

Știind aceste noțiuni, vom putea prezenta câteva aplicații ale Teoremei de compacitate.

Aplicații ale teoremei de compacitate

Propoziție

Fie $\Gamma, \Sigma \subseteq E_\sigma$ cu $\Gamma \models \Sigma$ și Σ finită. Atunci există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \Sigma$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după cardinalul lui Σ. Pentru cazul $|\Sigma| = 0$, i.e. $\Sigma = \emptyset$, putem lua $\Delta := \emptyset$.

Presupunem acum că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|\Sigma| = n^+$ și luăm $\Sigma' \subseteq E_\sigma$ și $\varphi \in E_\sigma$ cu $|\Sigma'| = n$ și $\Sigma = \Sigma' \cup \{\varphi\}$. Atunci avem $\Gamma \models \Sigma'$ și $\Gamma \models \varphi$. Din prima afirmație, aplicând ipoteza de inducție, avem că există $\Delta' \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta' \models \Sigma'$, iar din a doua, aplicând Teorema de compacitate, avem că există $\Delta'' \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta'' \models \varphi$. Atunci $\Delta := \Delta' \cup \Delta''$ este mulțimea finită căutată.

Aplicații ale teoremei de compactitate

Corolar

Fie $\Gamma, \Sigma \subseteq E_\sigma$ cu $\Gamma \sim \Sigma$ și Σ finită. Atunci există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Gamma \sim \Delta$, sau, echivalent, $\Sigma \sim \Delta$.

Demonstrație

Cum $\Gamma \models \Sigma$ și Σ este finită, din propoziția precedentă obținem că există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \Sigma$. Dar $\Sigma \models \Gamma$, deci $\Delta \models \Gamma$. Mai mult, cum $\Delta \subseteq \Gamma$, avem $\Gamma \models \Delta$, deci $\Gamma \sim \Delta$.

Propoziție

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ astfel încât pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există $\mathcal{A} \models \Gamma$ astfel încât universul lui $\mathcal{A}$ are cardinalul mai mare sau egal cu m. Atunci Γ are un model cu universul infinit.

Demonstrație

Fie $\Sigma := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$. Clar, dacă Σ ar fi satisfiabilă, atunci un model al său ar fi un model al lui Γ cu universul infinit. Din Teorema de compactitate, este suficient să arătăm că Σ este finit satisfiabilă.

Fie $\Delta \subseteq \Sigma$ finită și vrem să arătăm că Δ este satisfiabilă. Avem că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid 1 \leq n \leq m\}$.

Știm că există $\mathcal{A} \models \Gamma$ astfel încât universul lui $\mathcal{A}$ are cardinalul mai mare sau egal cu m. Atunci $\mathcal{A} \models \Delta$, deci Δ este satisfiabilă.

Aplicații ale teoremei de compacitate

Propoziție

Nu există $\Gamma \subseteq E_\sigma$ astfel încât pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, avem $\mathcal{A} \models \Gamma$ dacă și numai dacă universul lui $\mathcal{A}$ este finit (altfel spus, logica de ordinul I nu poate captura finitudinea).

Demonstrație

Presupunem că ar exista un asemenea Γ. Din propoziția precedentă, este suficient să arătăm că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există $\mathcal{A} \models \Gamma$ astfel încât universul lui $\mathcal{A}$ are cardinalul mai mare sau egal cu m. Fie $m \in \mathbb{N}$. Luăm $\mathcal{A}$ o σ-structură având ca univers pe m^+ (de ce există așa ceva?). Atunci $\mathcal{A}$ are universul finit, deci, din ipoteză, $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $\mathcal{A}$ este cea căutată.

Aplicații ale teoremei de compacitate

Propoziție

Nu există $\Gamma \subseteq E_\sigma$ **finită** astfel încât pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, avem $\mathcal{A} \models \Gamma$ dacă și numai dacă universul lui $\mathcal{A}$ este infinit.

Demonstrație

Presupunem că ar exista un asemenea Γ. Atunci $\Gamma \sim \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$. Dintr-o propoziție anterioară, există $m \in \mathbb{N}$ cu $\Gamma \sim \{\exists^{\geq n} \mid 1 \leq n \leq m\}$. Fie $\mathcal{A}$ o σ-structură având ca univers pe m^+. Atunci $\mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid 1 \leq n \leq m\}$, deci $\mathcal{A} \models \Gamma$. Însă $\mathcal{A}$ are universul finit, ceea ce contrazice ipoteza făcută despre Γ.

Teorema Löwenheim-Skolem în sus

Teorema Löwenheim-Skolem în sus

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ astfel încât Γ are un model cu universul infinit și κ un cardinal. Atunci Γ are un model cu universul de cardinal mai mare sau egal decât κ.

Demonstrație

Aplicând o propoziție veche, fie C o mulțime astfel încât $C \cap S_\sigma = \emptyset$ și $|C| = \kappa$. Fixăm o bijecție $f : \kappa \to C$ și notăm, pentru orice $\alpha \in \kappa$, $f(\alpha)$ cu c_α. Dacă avem $\sigma = (F, R, r)$, notăm $\sigma' := (F \cup C, R, r')$ unde $r'_{|F \cup R} = r$ și, pentru orice $c \in C$, $r'(c) = 0$. Atunci σ' este o signatură cu $\sigma \leq \sigma'$. Notăm

$$\Sigma := \Gamma \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) \mid \alpha, \beta \in \kappa,\ \alpha \neq \beta\} \subseteq E_{\sigma'}.$$

Vom arăta că Σ este satisfiabilă.

Demonstrație (cont.)

De ce ne rezolvă problema faptul că Σ este satisfiabilă? Dacă avem $\mathcal{B}' \models \Sigma$, atunci $\mathcal{B}' \models \Gamma$. Fie $\mathcal{B}$ redusa lui $\mathcal{B}'$ la σ. Atunci $\mathcal{B} \models \Gamma$ (exercițiu!), iar $\mathcal{B}$ și $\mathcal{B}'$ au același univers, pe care îl notăm cu B. Considerăm funcția $g : \kappa \to B$, definită, pentru orice $\alpha \in \kappa$, prin $g(\alpha) := B'_{c_\alpha}$. Atunci g este injectivă și, deci, $\kappa \leq |B|$. Ca urmare, $\mathcal{B}$ este modelul căutat.

Din Teorema de compacitate, este suficient să arătăm că Σ este finit satisfiabilă. Fie $\Delta \subseteq \Sigma$ finită și vrem să arătăm că Δ este satisfiabilă. Avem că există $D \subseteq \kappa$ finită astfel încât

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) \mid \alpha,\ \beta \in D,\ \alpha \neq \beta\}.$$

Demonstrație (cont.)

Fie $\mathcal{A}$ un model al lui Γ cu universul infinit A și $h : D \to A$ injectivă. Fie $a \in A$ arbitrar. Fie $\mathcal{A}'$ o expansiune a lui $\mathcal{A}$ la σ' (avem $\mathcal{A}' \models \Gamma$ – exercițiu!), unde, pentru orice $\alpha \in \kappa$, avem

$$A'_{c_\alpha} := \begin{cases} h(\alpha), & \text{dacă } \alpha \in D, \\ a, & \text{dacă } \alpha \notin D. \end{cases}$$

Atunci $\mathcal{A}' \models \Delta$ și deci Δ este satisfiabilă.