Logică matematică
CURS 14

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I

Semestrul II, 2023/2024

Aplicații ale teoriei modelelor în algebră

Motto

"Every field of mathematics has its zenith and its nadir. The zenith of logic is model theory (we do not dare state what we believe will be its nadir). The sure sign that we are dealing with a zenith is that as we, ignorant and dumb non-logicians, attempt to read the stuff, we feel that the material should be rewritten for the benefit of a general audience."

– Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Teorema Löwenheim-Skolem

Teorema Löwenheim-Skolem în sus, pe care am studiat-o, este o variantă mai slabă a următorului rezultat, pe care nu îl vom demonstra.

Teorema Löwenheim-Skolem

Considerăm signatura $\sigma = (F, R, r)$. Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ astfel încât Γ are un model cu universul infinit și κ un cardinal cu

$$\max(|F \cup R|, \aleph_0) \leq \kappa.$$

Atunci Γ are măcar un model cu universul de cardinal **exact** κ.

Remarcăm, totuși, că noi am întâlnit o metodă de a construi modele care au cel mult un anume cardinal, anume cardinalul $\aleph_0$ – în demonstrația Teoremei de completitudine. Demonstrația Teoremei Löwenheim-Skolem folosește idei asemănătoare.

Definiția categoricității

Definiție

Dacă $\Gamma \subseteq E_\sigma$ și κ este un cardinal infinit, spunem că Γ este κ-**categorică** dacă pentru orice σ-structuri $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ care au universul de cardinal κ, iar $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $\mathcal{B} \models \Gamma$, avem $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Testul Łoś-Vaught

Teoremă (Testul Łoś-Vaught)

Considerăm signatura $\sigma = (F, R, r)$. Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ satisfiabilă astfel încât Γ nu are modele finite și κ un cardinal cu $\max(|F \cup R|, \aleph_0) \leq \kappa$ astfel încât Γ este κ-categorică. Atunci Γ este completă.

Demonstrație

Presupunem prin absurd că Γ nu este completă. Atunci există φ cu $\Gamma \not\models \varphi$ și $\Gamma \not\models \neg\varphi$, deci $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\varphi\}$ au modele, ce din ipoteză au necesar universul infinit. Aplicând Teorema Löwenheim-Skolem, obținem că există σ-structuri $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ cu universul de cardinal κ astfel încât $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, iar $\mathcal{B} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Cum Γ este κ-categorică, avem că $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, deci $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, ceea ce contrazice faptul că $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ și $\mathcal{B} \models \varphi$.

Teoria corpurilor

Considerăm signatura σ_a ce conține simbolurile de operație $+$, $-$, $\cdot$ ce au aritatea 2, precum și constantele 0 și 1. Putem codifica faptul că o σ_a-structură este inel, iar adăugând la acele enunțuri pe următoarele:

$$\neg(0 = 1)$$

$$\forall x(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$$

obținem că acea structură este chiar corp (engl. *field*).

Un corp k se numește **algebric închis** (engl. *algebraically closed field*) dacă orice $f \in k[x]$ neconstant are o rădăcină în k. Acest lucru se codifică în felul următor – pentru orice $n \in \mathbb{N}$, notăm cu φ_n enunțul

$$\forall a_0 \ldots \forall a_n \exists x \quad x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0.$$

Adăugând aceste enunțuri la mulțimea de enunțuri ce axiomatizează corpurile, obținem o mulțime pe care o notăm cu ACF. Orice corp algebric închis este infinit (exercițiu de algebră).

Caracteristica corpurilor

Cunoaștem de la algebră că, dat fiind un corp k, în cazul în care există un $n \in \mathbb{N}$ astfel încât 1 adunat cu el însuși de n ori este 0 în k, atunci acel n este prim și se numește **caracteristica** lui k, iar în cazul în care nu există un asemenea n, spunem că acea caracteristică este 0. Pentru orice număr prim p, notăm cu ψ_p enunțul

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{de } p \text{ ori}} = 0.$$

Vom nota apoi, pentru orice p, $ACF_p := ACF \cup \{\psi_p\}$, iar $ACF_0 := ACF \cup \{\neg\psi_q \mid q \text{ prim}\}$.

Teorema fundamentală a algebrei spune că $\mathbb{C}$ este un corp algebric închis, deci este model pentru ACF_0. Pentru orice număr prim p, există un „cel mai mic" corp algebric închis de caracteristică p, care este notat cu $\overline{\mathbb{F}}_p$. Vom folosi proprietatea ce spune că pentru orice p și orice $A \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p$ finită, cel mai mic subcorp al lui $\overline{\mathbb{F}}_p$ ce conține pe A este tot finit.

Categoricitate

Vom mai folosi un fapt de algebră fără demonstrație, ce spune că pentru orice caracteristică și orice cardinal nenumărabil, orice două corpuri algebric închise de acel cardinal și acea caracteristică sunt izomorfe. Avem deci:

Corolar

- ACF_0 nu are modele finite, iar pentru orice cardinal nenumărabil κ, este κ-categorică.
- Pentru orice număr prim p, ACF_p nu are modele finite, iar pentru orice cardinal nenumărabil κ, este κ-categorică.

Aplicând testul Łoś-Vaught, obținem:

Corolar

- ACF_0 este completă.
- Pentru orice număr prim p, ACF_p este completă.

Acest corolar ne furnizează alte exemple de structuri neizomorfe care sunt elementar echivalente.

Mai departe, avem:

Corolar

- Mulțimea consecințelor lui ACF_0 este decidabilă.
- Pentru orice număr prim p, mulțimea consecințelor lui ACF_p este decidabilă.

Corolar

$Th(\mathbb{C})$ este decidabilă.

Demonstrație

Cum $\mathbb{C} \models ACF_0$, iar ACF_0 este completă, avem că $ACF_0 \sim Th(\mathbb{C})$, deci mulțimea consecințelor lui ACF_0 este egală cu mulțimea consecințelor lui $Th(\mathbb{C})$. Dar prima este decidabilă, iar a doua este chiar $Th(\mathbb{C})$, ceea ce ne rezolvă problema.

Echivalența

Propoziție

Fie $\varphi \in E_{\sigma_a}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- $\mathbb{C} \models \varphi$;
- $ACF_0 \models \varphi$;
- există $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models ACF_0 \cup \{\varphi\}$;
- pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $p > m$ prim și $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models ACF_p \cup \{\varphi\}$;
- există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $p > m$ prim, $ACF_p \models \varphi$.

Demonstrație

Echivalența primelor trei afirmații este dată de faptul că ACF_0 este completă. Demonstrăm că a doua afirmație o implică pe a cincea. Din Teorema de compacitate, avem că există $m \in \mathbb{N}$ cu $ACF \cup \{\neg\psi_q \mid q < m\} \models \varphi$. Dar pentru orice $p > m$ prim, avem că $ACF_p \models ACF \cup \{\neg\psi_q \mid q < m\}$, deci $ACF_p \models \varphi$, ceea ce trebuia demonstrat.

Echivalența

Demonstrație (cont.)

Faptul că a cincea afirmație o implică pe a patra este imediat.

Demonstrăm acum că a patra afirmație o implică pe a doua. Presupunem prin absurd că $ACF_0 \not\models \varphi$. Cum ACF_0 este completă, avem că $ACF_0 \models \neg\varphi$. Aplicând același raționament ca mai înainte, obținem că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $q > n$ prim, $ACF_q \models \neg\varphi$, ceea ce contrazice ipoteza.

Funcții injective pe mulțimi finite

Următoarea propoziție este un exercițiu de teoria mulțimilor.

Propoziție

Fie A o mulțime finită și $f : A \to A$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- f este injectivă;
- f este surjectivă;
- f este bijectivă.

Corolar

Fie $n \in \mathbb{N}$, k un corp finit și $f : k^n \to k^n$ polinomială injectivă. Atunci f este surjectivă.

Caracteristică primă

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}$, p un număr prim și $f : (\overline{\mathbb{F}}_p)^n \to (\overline{\mathbb{F}}_p)^n$ polinomială injectivă. Atunci f este surjectivă.

Demonstrație

Presupunem prin absurd că există p prim și $f : (\overline{\mathbb{F}}_p)^n \to (\overline{\mathbb{F}}_p)^n$ polinomială injectivă nesurjectivă, deci există $x \in (\overline{\mathbb{F}}_p)^n \setminus \mathrm{Im} f$. Fie A mulțimea coeficienților componentelor lui f, iar B mulțimea componentelor lui x. Atunci $A \cup B$ este finită, iar, din cele spuse mai devreme, cel mai mic subcorp al lui $\overline{\mathbb{F}}_p$ ce conține pe $A \cup B$ este și el finit și îl notăm cu k. Atunci f induce o funcție polinomială injectivă nesurjectivă de la k^n la k^n, contradicție!

Teorema Ax-Grothendieck

Teorema Ax-Grothendieck

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinomială injectivă. Atunci f este surjectivă.

Demonstrație

Pentru orice $n, d \in \mathbb{N}$, există (exercițiu!) un σ_a-enunț $\chi_{n,d}$ astfel încât pentru orice corp k, avem că $k \models \chi_{n,d}$ dacă și numai dacă pentru orice $f : k^n \to k^n$ polinomială injectivă astfel încât toate componentele lui f sunt de grad cel mult d, avem că f este surjectivă. Propoziția precedentă spune, deci, că pentru orice p prim și orice $n, d \in \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{F}}_p \models \chi_{n,d}$. Din echivalența de mai devreme, avem că pentru orice $n, d \in \mathbb{N}$, avem $\mathbb{C} \models \chi_{n,d}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru a pune punct

Dacă doriți să știți mai multe

Acest curs a acoperit, firește, doar o mică parte din logica matematică, însă pe pagina cursului:

https://cs.unibuc.ro/~asipos/lm/

am indicat anumite referințe bibliografice suplimentare, dintre care evidențiez acum ghidul exhaustiv al lui Peter Smith, intitulat *Beginning Mathematical Logic: A Study Guide*, accesibil la adresa:

https://www.logicmatters.net/tyl/

În FMI

Reamintesc că în facultatea noastră există un număr de profesori care își desfășoară activitatea științifică în logica matematică, o parte dintre ei fiind grupați în Centrul de Cercetare în Logică, Optimizare și Securitate (LOS):

https://los.cs.unibuc.ro/

care organizează și seminarul științific de logică:

https://ilds.ro/logic-seminar/

Vă mulțumesc pentru atenție.

Succes la examen!