Logică matematică
CURS 3

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I

Semestrul II, 2023/2024

Mulțimi finite

Până acum, am vorbit informal de mulțimi „cu un element”, „cu trei elemente”, dar nu puteam face noțiunea să fie precisă.

Definiție

Fie A o mulțime. Dacă $n \in \mathbb{N}$, spunem că A **are** n **elemente** dacă există o bijecție de la n la A. Dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A are n elemente, spunem că A este **finită**. Dacă A nu este finită, spunem că A este **infinită**.

Firește, mai trebuie demonstrat că acel n, dacă există, este unic determinat de A.

Mulțimi finite – proprietăți

Lemă

Un număr natural (și ca urmare, o mulțime finită) nu este în bijecție cu o parte strictă a sa.

Demonstrație

Fie n numărul și demonstrăm prin inducție după n. Pentru $n = 0$, rezultatul este trivial, dat fiind că nu există părți stricte ale lui $\emptyset$. Presupunem adevărat pentru n și demonstrăm pentru n^+. Presupunem că ar exista X o parte strictă a lui n^+ și o bijecție $f : n^+ \to X$. Distingem două cazuri. Dacă $n \notin X$, atunci funcția $g : n \to X \setminus \{f(n)\} \subsetneq n$, definită, pentru orice $m \in n$, prin $g(m) := f(m)$, este bine definită și bijectivă, contradicție. Dacă $n \in X$, demonstrația rămâne ca exercițiu.

Peste câteva cursuri, vom demonstra și reciproca acestei propoziții, anume că o mulțime infinită este în bijecție cu o parte strictă a sa, dar anumite cazuri particulare le vom putea arăta imediat.

Mulțimi finite – proprietăți

Corolar

- Dacă n, $m \in \mathbb{N}$ și $n \neq m$, nu există bijecție între n și m. Ca urmare, numărul de elemente al unei mulțimi finite este unic.
- Funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definită, pentru orice n, prin $f(n) := n^+$ este bijectivă. Ca urmare, $\mathbb{N}$ este infinită.

Demonstrație

- Dacă $n \neq m$, știm că $n < m$ sau $m < n$. Presupunem fără a restrânge generalitatea (engl. *without loss of generality*, prescurtat de obicei w.l.o.g.) că $n < m$. Atunci pentru orice $p < n$, avem $p < m$ (din tranzitivitate), deci $n \subsetneq m$. Atunci concluzia rezultă din lema precedentă.
- Injectivitatea a fost demonstrată mai devreme, iar surjectivitatea rezultă dintr-un exercițiu din seminar.

Mulțimi finite – proprietăți

Propoziție

- O submulțime a unei mulțimi finite este finită.
- Imaginea printr-o funcție a unei mulțimi finite este finită.
- Reuniunea a două mulțimi finite este finită.
- Reuniunea unei familii finite de mulțimi finite este finită.
- Mulțimea părților unei mulțimi finite este finită.

Demonstrație

Exercițiu (parțial la seminar).

Echipotență

Vedem, așadar, că mulțimile finite sunt „măsurate” cu ajutorul numerelor naturale și al bijecțiilor.

Cum măsurăm mulțimile infinite? Deocamdată, nu avem un analog al numerelor naturale, dar ne putem folosi încă de bijecții pentru a măsura mulțimile doar după ele însele.

Definiție

Două mulțimi A și B se numesc **echipotente** – și notăm $A \sim B$ – dacă există o bijecție de la A la B.

Echipotența ca „relație de echivalență”

Am putea fi tentați să spunem că echipotența este o relație binară, dar aceasta nu ar avea sens, dat fiind că ar fi trebuit să fie o relație pe „mulțimea tuturor mulțimilor”. Totuși, ea are proprietățile caracteristice unei relații de echivalență.

Propoziție

Fie A, B, C. Atunci:

- $A \sim A$;
- Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$;
- Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Demonstrație

Demonstrațiile sunt imediate. Considerăm $\mathrm{id}_A : A \to A$. Dacă avem $f : A \to B$ bijecție, atunci f^{-1} este tot bijecție. Dacă avem $f : A \to B$ și $g : B \to C$ bijecții, atunci și $g \circ f$ este bijecție.

Clase de echivalență?

Apare totuși întrebarea: chiar dacă $\sim$ nu este o relație de echivalență, putem considera clasele ei, adică, pentru orice A, să notăm $|A|$ mulțimea tuturor mulțimilor echipotente cu A? Ideea ar fi ca atunci să definim **cardinalul** unei mulțimi, după cum a făcut-o Cantor, ca fiind clasa ei de echipotență.

Clar (din cele arătate mai devreme), o mulțime este echipotentă cu $\emptyset$ dacă și numai dacă este $\emptyset$, deci $|\emptyset|$ ar fi $\{\emptyset\}$ – aici nu avem probleme.

Este imediat, însă, că o mulțime este echipotentă cu $\{\emptyset\}$ dacă și numai dacă este singleton. Or, am demonstrat la seminar că nu există mulțimea tuturor mulțimilor singleton. Ca urmare, nu putem vorbi de clase de echivalență pentru $\sim$.

Cardinali

Totuși, de obicei (de pildă, în liceu), se definește cardinalul unei mulțimi cu n elemente ca fiind n. Aceasta – precum și modul în care au fost definite aici numerele naturale – ne sugerează o altă abordare – anume de a fixa pentru fiecare „clasă" un reprezentant, iar acela să fie cardinalul oricărei mulțimi din „clasă".

Vom face așadar următoarea presupunere: există un soi de mulțimi numite **cardinali** astfel încât oricărei mulțimi X i se asociază un cardinal, notat cu $|X|$, astfel încât $X \sim |X|$, pentru orice cardinal κ avem $|\kappa| = \kappa$, pentru orice n și orice X cu n elemente avem $|X| = n$ și pentru orice X și Y avem că $X \sim Y$ dacă și numai dacă $|X| = |Y|$. (Deci $|\emptyset|$ este $\emptyset$, iar nu $\{\emptyset\}$ ca mai devreme.)

Vom justifica presupunerea mai târziu. Deocamdată, însă, se va putea observa că orice formulăm și demonstrăm cu ajutorul acestei notații se poate face într-o egală măsură și fără a face uz de ea.

Compararea mulțimilor

Pentru a compara mulțimi ce au eventual cardinal diferit, ne folosim de injecții pentru a defini o nouă pseudo-relație.

Definiție

Fie A, B. Spunem că A este **de cardinal mai mic sau egal ca** B – și notăm $A \preceq B$ – dacă există o injecție de la A la B.

Această definiție este compatibilă cu relația $\sim$, în felul următor (demonstrația este imediată):

Propoziție

Fie A, B, C. Atunci:

- Dacă $A \preceq B$ și $A \sim C$, atunci $C \preceq B$;
- Dacă $A \preceq B$ și $B \sim C$, atunci $A \preceq C$.

Putem defini, deci, fără probleme $|A| \leq |B|$ dacă $A \preceq B$. Observăm și că putem spune riguros ce înseamnă „a avea același cardinal ca" și „a avea cardinalul mai mic sau egal ca" fără a ști ce înseamnă cardinal.

Cardinalii sunt parțial ordonați

Vom vedea acum că $\leq$ are proprietățile unei relații de ordine parțială. Reflexivitatea și tranzitivitatea se demonstrează la fel ca pentru $\sim$:

Propoziție

Fie A, B, C. Atunci:

- $|A| \leq |A|$;
- Dacă $|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |C|$, atunci $|A| \leq |C|$.

Antisimetria, însă, este un rezultat netrivial:

Teorema Cantor-Bernstein-Schröder

Dacă X și Y sunt astfel încât $X \preceq Y$ și $Y \preceq X$, atunci $X \sim Y$.

Pentru a-l demonstra, ne vom folosi de o lemă ce este practic un caz particular al său.

Lemă

Fie A, B, A_1 cu $A_1 \subseteq B \subseteq A$ și $A \sim A_1$. Atunci $A \sim B$.

Mai întâi, să vedem de ce lema ne demonstrează teorema. Dacă X și Y sunt ca în enunțul teoremei, iar $f : X \to Y$ și $g : Y \to X$ sunt injecții, atunci $f_*(X) \subseteq Y$ și, deci,

$$(g \circ f)_*(X) = g_*(f_*(X)) \subseteq g_*(Y) \subseteq X.$$

Cum $g \circ f$ este injectivă, avem $X \sim g_*(f_*(X))$. Aplicând lema, avem $X \sim g_*(Y)$. Cum g este injectivă, $g_*(Y) \sim Y$ și, deci, $X \sim Y$.

Demonstrăm acum lema. Fie $f : A \to A_1$ bijectivă. Definim recursiv $A_0 := A$ și pentru orice n, $A_{n+1} := f_*(A_n)$ și analog, $B_0 := B$ și pentru orice n, $B_{n+1} := f_*(B_n)$. Cum $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$, avem pentru orice n, $A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$. Notăm, pentru orice n, $C_n := A_n \setminus B_n$ și apoi $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, $D := A \setminus C$.

Finalizare

Se arată apoi (exercițiu!) că pentru orice n, $f_*(C_n) = C_{n+1}$ și, deci, $f_*(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} C_n$.

Definim acum $g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, prin:

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in C; \\ x, & \text{dacă } x \in D. \end{cases}$$

Se arată atunci (exercițiu!) că g este bine definită și bijectivă. Așadar, $A \sim B$.

Am terminat de demonstrat, deci, că $\leq$ are proprietățile unei relații de ordine parțială. Am putea crede că vom demonstra acum că $\leq$ este totală, adică pentru orice A, B, avem $|A| \leq |B|$ sau $|B| \leq |A|$. Aceasta este adevărat în ZFC, dar o vom putea arăta doar mai târziu.

Mulțimi numărabile

Definiție

O mulțime se numește **numărabilă** dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.

Vom extinde presupunerea făcută punând pentru orice mulțime numărabilă A, $|A| = \mathbb{N}$ și îl vom nota în acest context pe $\mathbb{N}$ și cu $\aleph_0$ ($\aleph$, alef, este prima literă a alfabetului ebraic).

Propoziție

Dacă A este infinită, $|B| = \aleph_0$ și $A \subseteq B$, $|A| = \aleph_0$.

Demonstrație

Fie $g : \mathbb{N} \to B$ bijecție. Vom construi o bijecție $f : \mathbb{N} \to A$ prin Teorema recursiei complete, punând, pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$m := \min\{n \in \mathbb{N} \mid g(n) \in A \setminus f_*(k)\}$$

(faptul că A este infinită ne garantează că mulțimea respectivă este nevidă și, deci, are minim) și apoi $f(k) := g(m)$.

Așadar, $\aleph_0$ este cel mai mic cardinal infinit.

Mulțimi cel mult numărabile

Propoziție-Definiție

Fie A o mulțime. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- A este finită sau numărabilă;
- există B numărabilă (putem lua chiar $B := \mathbb{N}$) și $f : A \to B$ injectivă.

Atunci A se numește **cel mult numărabilă**.

Demonstrație

Dacă A este finită, există $n \in \mathbb{N}$ și $g : A \to n$ bijecție. Cum $n \subseteq \mathbb{N}$, putem prelungi pe g la $f : A \to \mathbb{N}$ injecție. Dacă A este numărabilă, atunci din start avem $f : A \to \mathbb{N}$ bijecție.

Pentru implicația inversă, dacă A nu este finită și $A \sim \mathrm{Im} f$, avem că $\mathrm{Im} f$ este infinită. Cum $\mathrm{Im} f \subseteq B$, avem că $\mathrm{Im} f$ numărabilă și, deci, că A este numărabilă.

Imaginea mulțimilor numărabile

Propoziție

Fie B o mulțime și $f : \mathbb{N} \to B$. Atunci $\mathrm{Im} f$ este cel mult numărabilă.

Demonstrație

Definim $g : \mathrm{Im} f \to \mathbb{N}$, pentru orice $b \in \mathrm{Im} f$, prin

$$g(b) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = b\}.$$

Atunci pentru orice $b \in \mathrm{Im} f$, avem $f(g(b)) = b$, deci g este injectivă. Prin urmare, $\mathrm{Im} f$ este cel mult numărabilă.

Corolar

Fie A, B cu A numărabilă și $f : A \to B$. Atunci $\mathrm{Im} f$ este cel mult numărabilă.

Reuniunea mulțimilor numărabile

Propoziție

Fie A, B numărabile. Atunci $A \cup B$ este numărabilă.

Demonstrație

Fie $f : \mathbb{N} \to A$ și $g : \mathbb{N} \to B$ bijecții. Definim $h : \mathbb{N} \to A \cup B$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin

$$h(n) := \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right), & \text{dacă } n \text{ este par;} \\ g\left(\frac{n-1}{2}\right), & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Avem că h este surjectivă, deci $A \cup B$ este cel mult numărabilă. Cum A este infinită, $A \cup B$ este infinită și, deci, numărabilă.

Corolar

Reuniunea unei familii finite nevide de mulțimi numărabile este numărabilă.

Produsul cartezian al mulțimilor numărabile

Propoziție

Mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Demonstrație

Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pentru orice $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, prin

$$f(n, k) := 2^k(2n + 1) - 1.$$

Avem că f este bijecție.

Corolar

Fie A, B numărabile. Atunci $A \times B$ este numărabilă.

Corolar

Produsul cartezian al unei familii finite nevide de mulțimi numărabile este numărabil.

Familii numărabile

Propoziție

Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și pentru orice n, o surjecție $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este cel mult numărabilă.

Demonstrație

Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, pentru orice $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, prin $f(n, k) := f_n(k)$. Atunci f este surjecție.

Un număr numărabil de șiruri

Propoziție

Mulțimea $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ este numărabilă.

Demonstrație

Avem că $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Seq}_n(\mathbb{N})$. Vom defini, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, în mod recursiv, o funcție surjectivă $f_n : \mathbb{N} \to \mathrm{Seq}_n(\mathbb{N})$ și apoi vom aplica propoziția precedentă pentru a arăta că $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ este cel mult numărabilă. Cum $\mathbb{N} \sim \mathrm{Seq}_1(\mathbb{N}) \subseteq \mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, avem că $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ este infinită, deci numărabilă.

Punem $f_0 : \mathbb{N} \to \mathrm{Seq}_0(\mathbb{N}) = \{\emptyset\}$ funcția ce asociază fiecărui număr mulțimea vidă. Fixăm o bijecție $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și apoi definim, pentru orice n, $f_{n+1} : \mathbb{N} \to \mathrm{Seq}_{n+1}(\mathbb{N})$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, punând $(a, b) := g(k)$ și $f_{n+1}(k) := f_n(a) \cup \{(n, b)\}$.

Corolar

Dacă A este numărabilă, atunci $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(A)$ este numărabilă.

Propoziție

Mulțimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

Demonstrație

Scriem $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Propoziție

Mulțimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Demonstrație

Definim $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, pentru orice (p, q), prin

$$f(p, q) := p/q.$$

Avem că f este surjecție, deci $\mathbb{Q}$ este cel mult numărabilă. Cum $\mathbb{Z}$ este infinită și $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ este infinită și, deci, numărabilă.

Funcția caracteristică

Pentru orice X, A, cu $A \subseteq X$, definim funcția $\chi_{A,X} : X \to 2$, pentru orice $x \in X$, prin

$$\chi_{A,X}(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \notin A, \end{cases}$$

și o numim **funcția caracteristică** sau **funcția indicator** a lui A în X (o vom nota deseori doar cu χ_A atunci când X va fi clar din context).

Propoziție

Pentru orice X, $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$.

Aceasta rezultă din existența bijecțiilor naturale $A \mapsto \chi_A$ și $f \mapsto f^*(\{1\})$ între cele două mulțimi.

Mulțimi nenumărabile

Propoziție

Pentru orice X, nu există o surjecție de la X la $\mathcal{P}(X)$, deci $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Demonstrație

Presupunem că ar exista $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjecție. Notăm $A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Cum f este surjectivă, există $z \in X$ cu $f(z) = A$. Dar atunci

$$z \in A \Leftrightarrow z \notin f(z) \Leftrightarrow z \notin A,$$

o contradicție.

Ca urmare, $\mathbb{N} \not\sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, deci $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ este infinită, nenumărabilă.

Vom arăta în continuare că $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$ folosind teorema Cantor-Bernstein. Ca urmare, vom construi injecții $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ și $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Prima injecție

Punem, pentru orice $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\phi(A) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}.$$

Trebuie mai întâi să arătăm că funcția ϕ e bine definită, deci că limita considerată mai sus există. Sumele au doar termeni nenegativi, de unde reiese că șirul este crescător. Mai mult, pentru orice n din $\mathbb{N}$, avem:

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{3^i} = 2\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \leq 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 3.$$

Așadar, șirul este mărginit. Fiind și monoton, obținem din teorema Weierstrass că este convergent, deci ϕ este bine definită.

De ce este injectivă

Arătăm acum injectivitatea. Presupunem că $A \neq B$ și urmărim să demonstrăm că $\phi(A) \neq \phi(B)$. Deoarece A și B sunt diferite, există $j := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \chi_A(i) \neq \chi_B(i)\}$. Presupunem w.l.o.g. că $\chi_A(j) = 0$ și $\chi_B(j) = 1$. Notăm

$$a := \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i}.$$

Pentru orice $n \geq j+1$ avem:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} &= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} + \frac{2 \cdot 0}{3^j} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \\
&\leq a + 0 + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{2}{3^i} = a + \frac{2}{3^{j+1}} \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{3^i} \\
&= a + \frac{2}{3^{j+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j-1}}{1 - \frac{1}{3}} < a + \frac{2}{3^{j+1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = a + \frac{1}{3^j}.
\end{aligned}$$

De ce este injectivă

De aici scoatem

$$\phi(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \le \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{3^j}\right) = a + \frac{1}{3^j}.$$

Pentru orice $n \geq j+1$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} + \frac{2\cdot 1}{3^j} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^j}.$$

Așadar,

$$\phi(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{2}{3^j}\right) = a+\frac{2}{3^j} > a+\frac{1}{3^j} \geq \phi(A).$$

Deci, $\phi(A) < \phi(B)$, de unde $\phi(A) \neq \phi(B)$.

A doua injecție

Pentru a construi a doua injecție, ne folosim de o bijecție $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Punem acum, pentru orice $r \in \mathbb{R}$,

$$\psi(r) := \{n \in \mathbb{N} \mid j(n) \leq r\}.$$

Vrem să arătăm că ψ e injectivă.

Fie r_1 și r_2 două numere reale diferite și presupunem w.l.o.g. că $r_1 < r_2$. Din densitatea numerelor raționale, știm că există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r_1 < q < r_2$. Funcția j este surjectivă, deci există m un număr natural astfel încât $j(m) = q$. Deci $j(m) \leq r_2$ și $j(m) \not\leq r_1$, de unde avem $m \in \psi(r_2)$ și $m \notin \psi(r_1)$, demonstrând astfel că $\psi(r_1) \neq \psi(r_2)$.

Demonstrația este încheiată. Așadar, $\mathbb{R}$ este echipotentă cu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ și este și ea o mulțime infinită, nenumărabilă.

Adunarea cardinalilor

Pentru orice cardinali κ, λ, definim adunarea lor astfel: alegem A și B cu $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ și $A \cap B = \emptyset$ și punem

$$\kappa + \lambda := |A \cup B|.$$

Această definiție are sens fiindcă:

- pentru orice A, B există A', B' cu $|A'| = |A|$, $|B'| = |B|$ și $A' \cap B' = \emptyset$ (iau, de pildă, $A' := \{0\} \times A$ și $B' := \{1\} \times B$);
- pentru orice A, B, A', B' cu $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, $A \cap B = \emptyset$ și $A' \cap B' = \emptyset$, avem $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

Proprietăți imediate

Fie κ, κ', λ, μ cardinali. Atunci:

- $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$;
- $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$;
- $\kappa \leq \kappa + \lambda$;
- dacă $\kappa \leq \kappa'$ și $\lambda \leq \mu$, atunci $\kappa + \lambda \leq \kappa' + \mu$.

Înmulțirea cardinalilor

Pentru orice cardinali κ, λ, definim înmulțirea lor astfel: alegem A și B cu $|A| = \kappa$ și $|B| = \lambda$ și punem

$$\kappa \cdot \lambda := |A \times B|.$$

Această definiție are sens fiindcă pentru orice A, B, A', B' cu $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$, avem $|A \times B| = |A' \times B'|$.

Proprietăți imediate

Fie κ, κ', λ, μ cardinali. Atunci:

- $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;
- $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$;
- $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;
- dacă $0 < \lambda$, atunci $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda$;
- dacă $\kappa \leq \kappa'$ și $\lambda \leq \mu$, atunci $\kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \mu$.

Înmulțirea cu doi

Propoziție

Pentru orice cardinal κ, $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.

Demonstrație

Avem $|\{0\} \times \kappa| = |\{1\} \times \kappa| = \kappa$ și $(\{0\} \times \kappa) \cap (\{1\} \times \kappa) = \emptyset$, deci

$$\kappa + \kappa = |(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \kappa)|,$$

dar $(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \kappa) = 2 \times \kappa$, deci

$$|(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \kappa)| = |2 \times \kappa| = |2| \cdot |\kappa| = 2 \cdot \kappa.$$

Corolar

Pentru orice cardinal κ cu $2 \leq \kappa$, avem $\kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$.

Exponențierea cardinalilor

Pentru orice cardinali κ, λ, definim exponențierea lor astfel: alegem A și B cu $|A| = \kappa$ și $|B| = \lambda$ și punem

$$\kappa^\lambda := |A^B|.$$

Această definiție are sens fiindcă pentru orice A, B, A', B' cu $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$, avem $\left|A^B\right| = \left|{A'}^{B'}\right|$.

Proprietăți imediate

Fie κ, κ', λ, μ cardinali. Atunci:

- dacă $0 < \lambda$, atunci $\kappa \leq \kappa^\lambda$;
- dacă $1 < \kappa$, atunci $\lambda \leq \kappa^\lambda$;
- dacă $\kappa \leq \kappa'$ și $\lambda \leq \mu$, atunci $\kappa^\lambda \leq {\kappa'}^\mu$;
- $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

Alte proprietăți ale exponențierii

Teoremă

Fie κ, λ, μ cardinali. Atunci:

- $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$;
- $\kappa^{\lambda\cdot\mu} = (\kappa^\mu)^\lambda$;
- $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

Demonstrație

Fie K, L, M cu $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$, $|M| = \mu$. Pentru primul punct, vom presupune $L \cap M = \emptyset$. Atunci formăm bijecția de la $K^L \times K^M$ la $K^{L\cup M}$ care duce orice pereche (f, g) în funcția h ce duce orice $x \in L \cup M$ în $f(x)$, dacă $x \in L$, respectiv în $g(x)$, dacă $x \in M$.

Pentru al doilea punct, formăm bijecția de la $K^{L\times M}$ la $(K^M)^L$ care duce orice f în funcția $l \mapsto (m \mapsto f(l, m))$ (**currying**). Pentru al treilea punct, formăm bijecția de la $K^M \times L^M$ la $(K \times L)^M$ care duce orice pereche (f, g) în funcția $m \mapsto (f(m), g(m))$.

Avem că, pentru orice X,

$$|X| < |\mathcal{P}(X)| = \left|2^X\right| = |2|^{|X|} = 2^{|X|}.$$

Prin urmare, $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$ și mai avem $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$. Fie n, m, $p \in \mathbb{N}$ cu $0 < m$ și $1 < p$. Avem următoarele inegalități:

$$2^{\aleph_0} \leq n + 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 + 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+1} = 2^{\aleph_0},$$

$$2^{\aleph_0} \leq m \cdot 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

$$2^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^m \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0},$$

$$2^{\aleph_0} \leq p^{\aleph_0} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0},$$

despre care se observă acum că sunt de fapt egalități, și, deci, orice cardinal ce apare în ele este egal cu $2^{\aleph_0}$.

Puterea continuumului

Acest cardinal $2^{\aleph_0}$ se notează cu $\mathfrak{c}$ și se numește **cardinalul continuumului** sau **puterea continuumului**.

Propoziție

- Pentru orice $n > 0$, $|\mathbb{R}^n| = \mathfrak{c}$.
- $|\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$.
- $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.
- $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Diferența între continuum și numărabil

Teoremă

Fie A, B cu $A \subseteq B$, $|A| = \aleph_0$ și $|B| = \mathfrak{c}$. Atunci $|B \setminus A| = \mathfrak{c}$.

Demonstrație

Putem presupune $B = \mathbb{R}^2$ și e suficient să arătăm $\mathfrak{c} \leq |B \setminus A|$. Fie

$$P := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{există } y \text{ cu } (x, y) \in A\}.$$

Definim funcția surjectivă $f : A \to P$, pentru orice $(x, y) \in A$, prin $f(x, y) := x$. Rezultă $|P| \leq \aleph_0$, deci există $z \in \mathbb{R} \setminus P$.

Definim funcția injectivă $g : \mathbb{R} \to B \setminus A$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin $g(y) := (z, y)$. Rezultă $\mathfrak{c} \leq |B \setminus A|$.

Corolar

$|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$.

Ipoteza continuumului

Dat fiind că $\mathfrak{c}$ este un cardinal ubicuu în matematică, apare problema firească de a-i calibra mărimea. Cantor a formulat, fără însă a și demonstra, următorul enunț, pe care, reamintim din Introducerea istorică, Hilbert l-a pus în fruntea listei sale de probleme pentru secolul XX:

Ipoteza continuumului

Nu există cardinal nenumărabil mai mic decât $\mathfrak{c}$.

Rezultatele lui Gödel (1940) și Cohen (1963) au arătat că acest enunț nu se poate nici infirma, respectiv nici confirma pornind de la axiomele ZFC (presupunând că acestea sunt consistente). Pentru această clarificare completă a chestiunii, Cohen a primit în 1966 medalia Fields.

Mulțimi mai mari decât $\mathfrak{c}$

Știm că $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$ și avem că

$$2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}} \leq \aleph_0^{2^{\aleph_0}} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Ca urmare, $|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$ și $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$.