Logică matematică
CURS 5

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I

Semestrul II, 2023/2024

Axioma alegerii

Așadar, mai este nevoie să demonstrăm doar că orice mulțime este bine-ordonabilă. Pentru aceasta, vom avea nevoie de o nouă axiomă.

Propoziție

Următoarele enunțuri sunt echivalente:

- Pentru orice S cu $\emptyset \notin S$ există $(g_y)_{y \in S}$ astfel încât pentru orice $y \in S$, $g_y \in y$.
- Pentru orice I și orice familie de mulțimi **nevide** indexată după I, $(F_i)_{i \in I}$, avem că $\prod_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, i.e. există $(f_i)_{i \in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $f_i \in F_i$.
- Pentru orice I și orice familie de mulțimi **nevide**, **disjuncte două câte două**, indexată după I, $(D_i)_{i \in I}$, avem că $\prod_{i \in I} D_i \neq \emptyset$, i.e. există $(d_i)_{i \in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $d_i \in D_i$.

Oricare dintre cele trei enunțuri de mai sus este cunoscut ca **Axioma alegerii**. În continuare, le vom demonstra echivalența.

Echivalența enunțurilor

Arătăm întâi echivalența dintre prima și a doua formă.

Pentru a demonstra că primul enunț îl implică pe al doilea, notăm $S := \{F_i \mid i \in I\}$ și obținem că există $(g_y)_{y \in S}$ astfel încât pentru orice $y \in S$, $g_y \in y$. Pentru orice $i \in I$, cum $F_i \in S$, notăm $f_i := g_{F_i}$. Atunci familia $(f_i)_{i \in I}$ este cea căutată, deoarece pentru orice $i \in I$, avem $f_i = g_{F_i} \in F_i$.

Invers, acum! Presupunem că avem S și notăm $F := \{(i, i) \mid i \in S\}$. Atunci F este o familie indexată după S și pentru orice $i \in S$, $F_i = i$. Ca urmare, există $(f_y)_{y \in S}$ astfel încât pentru orice $y \in S$, $f_y \in F_y = y$ și am terminat.

Mulțimi disjuncte

Rămâne de demonstrat că al treilea enunț îl implică pe al doilea.

Pentru orice $i \in I$ punem $D_i := \{i\} \times F_i$. Atunci familia $(D_i)_{i \in I}$ satisface condițiile din al treilea enunț, deci există $(d_i)_{i \in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $d_i \in D_i$.

Avem că pentru orice $i \in I$ există și este unic $a \in F_i$ cu $d_i = (i, a)$ – unicitatea este imediată, iar existența rezultă din faptul că pentru orice $i \in I$, $d_i \in D_i = \{i\} \times F_i$.

Punem, pentru orice $i \in I$, f_i să fie acel $a \in F_i$ cu $d_i = (i, a)$. Atunci familia $(f_i)_{i \in I}$ este cea căutată.

Axioma alegerii pe mulțimi finite

Pentru mulțimi finite, Axioma alegerii este o teoremă care rezultă din axiomele prezentate anterior. De exemplu, în prima formulare:

Propoziție

Pentru orice S **finită** cu $\emptyset \notin S$ există $(g_y)_{y \in S}$ astfel încât pentru orice $y \in S$, $g_y \in y$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după cardinalul n al lui S. Pentru $n = 0$, avem $S = \emptyset$ și putem lua $g := \emptyset$. Arătăm acum pentru un S de cardinal n^+. Atunci există T și s cu $|T| = n$ și $S = T \cup \{s\}$. Din ipoteza de inducție, fie $(h_y)_{y \in T}$ astfel încât pentru orice $y \in T$, $h_y \in y$. Cum $\emptyset \notin S$, $s \neq \emptyset$, deci există $z \in s$. Putem, atunci, defini pe $(g_y)_{y \in S}$, cel căutat, punând, pentru orice $y \in S$, $g_y := h_y$, dacă $y \in T$, și $g_y := z$, dacă $y = s$.

Variantele finite ale celorlalte formulări rămân ca exercițiu.

Lema lui Zorn

Axioma alegerii ne permite să demonstrăm un rezultat util în matematică, anume Lema lui Zorn.

Definiție

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată și $B \subseteq A$. B se numește **lanț** al lui A dacă pentru orice $x, y \in B$, avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Definiție

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Ea se numește **inductiv ordonată** dacă orice lanț al său admite majorant, i.e. pentru orice $B \subseteq A$ care este lanț, există $z \in A$ astfel încât pentru orice $x \in B$, $x \leq z$. (Observăm că, dacă aplicăm condiția pentru $B := \emptyset$, obținem $A \neq \emptyset$.)

Lema lui Zorn

Orice mulțime inductiv ordonată admite un element maximal.

Demonstrația lemei lui Zorn

Presupunem prin absurd că există o mulțime inductiv ordonată $(A, \leq)$ fără element maximal. Facem observația că pentru orice lanț $B \subseteq A$ există $z \in A$ astfel încât pentru orice $y \in B$ avem $y \leq z$, iar, cum z nu e maximal, există x cu $z < x$, deci, pentru orice $y \in B$, avem $y < x$.

Aplicăm Axioma alegerii pentru mulțimea $I := \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ și obținem o familie $(g_i)_{i \in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $g_i \in i$. Fie $b \notin A$ și vom defini o operație pe ordinali F prin recursie. Fie α un ordinal. Presupunem că am definit, pentru orice $\gamma < \alpha$, $F(\gamma)$ și definim $F(\alpha)$.

În cazul în care, pentru orice $\gamma < \alpha$, $F(\gamma) \in A$ și există $x \in A$ astfel încât pentru orice $\gamma < \alpha$, $F(\gamma) < x$, punem

$$F(\alpha) := g_{\{x \in A \mid \text{pentru orice } \gamma < \alpha,\ F(\gamma) < x\}},$$

altfel punem $F(\alpha) := b$.

Demonstrăm acum prin inducție că, pentru orice ordinal α, $F(\alpha) \in A$ și pentru orice $\beta < \alpha$, $F(\beta) < F(\alpha)$. Presupunem enunțul adevărat pentru orice $\gamma < \alpha$ și demonstrăm pentru α. Fie

$$L := \{F(\gamma) \mid \gamma < \alpha\} \subseteq A.$$

Atunci, pentru orice β, δ cu $\beta < \delta < \alpha$, din ipoteza de inducție avem că $F(\beta)$, $F(\delta) \in A$ și $F(\beta) < F(\delta)$. Deci L este lanț și așadar există x astfel încât pentru orice $\gamma < \alpha$, $F(\gamma) < x$. Atunci, din definiția lui F, $F(\alpha)$ este un asemenea x și am încheiat.

Wikipedia: *"This sequence is **really long**."*

Definim acum $f : h(A) \to A$, pentru orice $\alpha \in h(A)$, prin $f(\alpha) := F(\alpha)$. Atunci f este injectivă și deci $|h(A)| \leq |A|$, ceea ce contrazice definiția ordinalului Hartogs.

Teorema lui Zermelo

În acest moment, putem arăta enunțul dorit.

Teorema bunei ordonări (Zermelo)

Orice mulțime este bine-ordonabilă.

Demonstrația teoremei lui Zermelo

Fie X o mulțime. Observăm că pentru orice $A \subseteq X$ și orice $R \subseteq A \times A$, avem $(A, R) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X \times X)$, deci pot defini

$$W := \{(A, R) \mid A \subseteq X \text{ și } R \text{ este o relație de bună ordine pe } A\}.$$

Pe W definesc următoarea relație de ordine: pentru orice (A, R), $(B, S) \in W$, avem $(A, R) \leq (B, S)$ dacă $A \subseteq B$ și $R = S \cap (A \times A)$.

Fie $L \subseteq W$ un lanț. Notăm

$$M := \{A \subseteq X \mid \text{există } R \text{ cu } (A, R) \in L\}$$

și

$$N := \{R \subseteq X \times X \mid \text{există } A \text{ cu } (A, R) \in L\}.$$

Atunci $(\bigcup M, \bigcup N) \in W$ și este majorant pentru L (exercițiu!). Deci $(W, \leq)$ este inductiv ordonată și, deci, aplicând Lema lui Zorn, admite un element maximal pe care îl notăm cu (A, R).

Demonstrația teoremei lui Zermelo

Vrem să arătăm că $A = X$ și atunci R va fi relația de bună ordine cerută.

Dacă $A \neq X$, există $a \in X \setminus A$. Atunci avem că

$$(A \cup \{a\}, R \cup \{(y, a) \mid y \in A\} \cup \{(a, a)\}) \in W$$

(exercițiu!), ceea ce contrazice maximalitatea lui (A, R). Demonstrația este deci încheiată.

Acest mod de aplicare a Lemei lui Zorn este tipic.

Marea echivalență

Mai mult, dacă admitem Teorema lui Zermelo, putem demonstra Axioma alegerii în felul următor. Fie S cu $\emptyset \notin S$. Fie $\leq$ o relație de bună ordine pe $\bigcup S$. Știm că pentru orice $y \in S$, avem $y \subseteq \bigcup S$. Definim atunci $(g_y)_{y \in S}$, punând, pentru orice $y \in S$,
$g_y := \min(y) \in y$.

Prin urmare, am arătat că Axioma alegerii, Lema lui Zorn și Teorema bunei ordonări sunt enunțuri echivalente.

Jerry Bona: *"The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?"*

Inverse la dreapta

La seminar se va demonstra că și următorul enunț este echivalent cu Axioma alegerii.

Propoziție

Fie X, Y mulțimi și $g : Y \to X$ surjectivă. Atunci există $f : X \to Y$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Funcția f se numește **inversa la dreapta** a lui g și se observă (exercițiu!) că este injectivă, deci $|X| \leq |Y|$.

Există și următorul enunț mai slab.

Principiul Partiției

Fie X, Y mulțimi și $g : Y \to X$ surjectivă. Atunci există $f : X \to Y$ injectivă.

Problemă deschisă (Levy, 1963): Este acest enunț echivalent cu Axioma alegerii sau este **strict** mai slab?

Axioma alegerii dependente

Teoremă (Axioma alegerii dependente)

Fie $X \neq \emptyset$ și $R \subseteq X \times X$ astfel încât, pentru orice $x \in X$, există $y \in X$ cu $(x, y) \in R$.
Atunci există $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, un șir X-valuat, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, x_{n+1}) \in R$.

Demonstrație

Aplicăm Axioma alegerii pentru mulțimea $I := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ și obținem o familie $(g_i)_{i \in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $g_i \in i$.
Cum $X \neq \emptyset$, $X \in I$. Definim acum șirul punând $x_0 := g_X$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} := g_{\{y \in X \mid (x_n, y) \in R\}}$.

Înapoi la cardinali

Prin urmare, Axioma alegerii ne permite să folosim fără probleme definiția cardinalilor ca ordinali inițiali. În particular, ordonarea cardinalilor este totală, iar pentru orice mulțime infinită A există un ordinal α cu $|A| = \aleph_\alpha$.

Propoziție

Orice mulțime infinită admite o submulțime numărabilă.

Demonstrație

Fie A o mulțime infinită și α astfel încât există o bijecție $g : \aleph_\alpha \to A$. Cum $\aleph_0 \leq \aleph_\alpha$, există o injecție $f : \aleph_0 \to \aleph_\alpha$. Fie B imaginea lui $g \circ f$. Atunci B este submulțimea căutată.

Faptul demonstrat că $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ se poate reformula acum ca $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. De asemenea, ipoteza continuumului se poate reformula ca

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Există suficiente mulțimi

Următoarea propoziție ne arată că avem, într-un anume sens, suficiente mulțimi de orice cardinal.

Propoziție

Fie A o mulțime și κ un cardinal. Atunci există B cu $|B| = \kappa$ astfel încât $A \cap B = \emptyset$.

Demonstrație

Fie $z \notin \bigcup\bigcup A$. Luăm $B := \{z\} \times \kappa$. Clar, $|B| = \kappa$. Presupunem că $A \cap B \neq \emptyset$. Atunci există $\alpha \in \kappa$ cu $(z, \alpha) \in A$, adică $\{\{z\}, \{z, \alpha\}\} \in A$. Rezultă $\{z\} \in \bigcup A$, deci $z \in \bigcup\bigcup A$. Contradicție!

Cardinalul reuniunii

Propoziție

Fie I o mulțime și λ un cardinal. Fie $(A_i)_{i \in I}$ astfel încât, pentru orice $i \in I$, $|A_i| \leq \lambda$. Atunci

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \leq |I| \cdot \lambda.$$

Demonstrație

Pentru orice $i \in I$, există $g : A_i \to \lambda$ injectivă și deci mulțimea $S_i := \{g : A_i \to \lambda \mid g \text{ injectivă}\}$ este nevidă. Aplicăm Axioma alegerii pentru $(S_i)_{i \in I}$ și obținem o familie $(s_i)_{i \in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, s_i este o injecție de la A_i la λ. (Acesta este un mod tipic de aplicare a Axiomei alegerii pentru a face un număr potențial infinit de alegeri.)

Cardinalul reuniunii

Demonstrație (cont.)

Fie $\leq$ o relație de bună ordine pe I. Definim o funcție $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to I$, pentru orice $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, astfel: știm că $\{i \in I \mid a \in A_i\} \neq \emptyset$ și atunci punem

$$f(a) := \min(\{i \in I \mid a \in A_i\}).$$

Definim apoi $h : \bigcup_{i \in I} A_i \to I \times \lambda$, pentru orice $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, prin

$$h(a) := (f(a), s_{f(a)}(a)).$$

Atunci h este injectivă (exercițiu!) și deci

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \leq |I \times \lambda| = |I| \cdot |\lambda| = |I| \cdot \lambda.$$

Cardinalul reuniunii cel mult numărabile

Corolar

O reuniune cel mult numărabilă de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Demonstrație

Din propoziția anterioară, cardinalul reuniunii trebuie să fie cel mult $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

Corolar

O reuniune numărabilă de mulțimi numărabile este numărabilă.

Demonstrație

Reuniunea conține o mulțime numărabilă și este deci infinită.

Are sens, deci, să studiem mai mult cum arată produsele de cardinali.

Propoziție

Pentru orice cardinal infinit κ, avem $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Demonstrație

Presupunem contrariul, și deci există un κ **minim** cu $\kappa \cdot \kappa \neq \kappa$. Cum $\kappa = \kappa \cdot 1 \leq \kappa \cdot \kappa$, avem $\kappa < \kappa \cdot \kappa$. Pe mulțimea $\kappa \times \kappa$ definim relația R astfel: pentru orice α, β, γ, $\delta \in \kappa$, avem

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) R (\gamma, \delta) :\Leftrightarrow\ & \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \\ & \text{SAU } \max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \text{ și } \alpha < \gamma \\ & \text{SAU } \max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \text{ și } \alpha = \gamma \text{ și } \beta < \delta.\end{aligned}$$

Avem că R este o relație de bună ordine strictă (exercițiu!). Deci există α astfel încât $(\kappa \times \kappa, R)$ este izomorfă cu $(\alpha, \in_\alpha)$ și fie f un izomorfism.

Demonstrație (cont.)

Atunci

$$\kappa < \kappa \cdot \kappa = |\kappa \times \kappa| = |\alpha| \leq \alpha,$$

deci $\kappa \in \alpha$ și prin urmare există β, $\gamma \in \kappa$ cu $f(\beta,\gamma) = \kappa$. Avem că mulțimea tuturor acelor (δ,ε) cu $(\delta,\varepsilon)R(\beta,\gamma)$ este de cardinal κ.

Avem că $\max(\beta,\gamma) < \kappa$ și deci $\varphi := \max(\beta,\gamma)^+ \leq \kappa$. Însă κ este inițial, deci nu e succesor, prin urmare $\varphi < \kappa$. Cum pentru orice δ, ε cu $(\delta,\varepsilon)R(\beta,\gamma)$, avem $\max(\delta,\varepsilon) \leq \max(\beta,\gamma) < \varphi$ și deci δ, $\varepsilon < \varphi$, avem

$$\kappa \leq |\varphi \times \varphi| = |\varphi| \cdot |\varphi|.$$

Dar cum avem $|\varphi| \leq \varphi < \kappa$, atunci, dacă $|\varphi|$ este finit, avem că $|\varphi| \cdot |\varphi|$ este tot finit, iar dacă $|\varphi|$ este infinit, avem, din minimalitatea lui κ, că $|\varphi| \cdot |\varphi| = |\varphi|$. În ambele cazuri, avem $|\varphi| \cdot |\varphi| < \kappa$. Contradicție!

Aritmetica cardinalilor

Corolar

Fie κ un cardinal infinit și $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Atunci $\kappa^n = \kappa$.

Corolar

Fie λ, μ cardinali cu $\lambda \leq \mu$ și μ infinit. Atunci $\lambda + \mu = \mu$.

Demonstrație

Avem $\mu \leq \lambda + \mu \leq \mu + \mu = 2 \cdot \mu \leq \mu \cdot \mu = \mu$.

Corolar

Fie λ, μ cardinali cu $1 \leq \lambda \leq \mu$ și μ infinit. Atunci $\lambda \cdot \mu = \mu$.

Demonstrație

Avem $\mu = 1 \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu \leq \mu \cdot \mu = \mu$.

Caracterizarea mulțimilor infinite

Propoziție

Fie X infinită. Atunci există $Y \subsetneq X$ cu $X \sim Y$.

Demonstrație

Avem că $X \sim |X| \sim |X|^+$. Fie $g : |X|^+ \to X$ o bijecție. Luăm Y să fie imaginea lui $|X|$ prin g.

Așadar, o mulțime este infinită dacă și numai dacă este în bijecție cu o parte strictă a sa.

Părți finite

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și X, definim $\mathcal{P}_n(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = n\}$.

Propoziție

Pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și orice X infinită, avem $|\mathcal{P}_n(X)| = |X|$.

Demonstrație

Pentru a găsi o injecție de la X la $\mathcal{P}_n(X)$, fixăm întâi $a_0, \ldots, a_n \in X$, diferite două câte două. Apoi, orice $x \in \{a_i \mid i \leq n\}$ va fi dus în $\{a_i \mid i \leq n\} \setminus \{x\}$, iar orice x din afara acelei mulțimi va fi dus în $\{a_i \mid i < n - 1\} \cup \{x\}$.

În sens invers, bine-ordonăm X și atunci fiecărui element $\{x_i \mid i < n\}$ al lui $\mathcal{P}_n(X)$, considerând w.l.o.g. $x_0 < \ldots < x_{n-1}$ îi asociem elementul $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in X^n$. Așadar, $|\mathcal{P}_n(X)| \leq |X^n| = |X|$.

Părți finite

Pentru orice X, definim $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ finită}\}$.

Propoziție

Pentru orice X infinită, avem $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)| = |X|$.

Demonstrație

Cum

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(X),$$

avem

$$|\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)| \leq |\mathbb{N}| \cdot |X| = |X|$$

și, pe de altă parte,

$$|X| = |\mathcal{P}_1(X)| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)|.$$

Baze în spații vectoriale

Considerăm cunoscută de la Algebră liniară noțiunea de spațiu vectorial.

Definiție

Fie k un corp, V un k-spațiu vectorial și $A \subseteq V$.

- A se numește **sistem de generatori** pentru V dacă pentru orice $v \in V$ există $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, $v_1, \ldots, v_n \in A$ cu $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.
- A se numește **sistem liniar independent** pentru V dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, $v_1, \ldots, v_n \in A$ cu $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, avem că, pentru orice i, $\lambda_i = 0$.
- A se numește **bază** pentru V dacă este și sistem de generatori pentru V, și sistem liniar independent pentru V.

Este aproape imediat faptul că, dat fiind un corp k, două k-spații vectoriale care admit respectiv două baze echipotente sunt izomorfe.

Caracterizarea bazelor

Propoziție

Fie k un corp, V un k-spațiu vectorial și $A \subseteq V$. Atunci A este bază pentru V dacă și numai dacă A este sistem liniar independent **maximal** pentru V.

Demonstrație

Implicația „$\Rightarrow$" rămâne ca exercițiu. Pentru „$\Leftarrow$", presupunem că A nu ar fi sistem de generatori pentru V și, ca urmare, există $v \in V$ ce nu este generat de A, în particular $v \notin A$. Vom arăta că $A \cup \{v\}$ este sistem liniar independent pentru V, contrazicând maximalitatea lui A. Fie $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in k$, $v_1, \ldots, v_n \in A$ cu $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \lambda v$. Presupunem $\lambda \neq 0$. Atunci $v = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, contrazicând modul cum a fost ales v. Deci $\lambda = 0$, prin urmare $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$, așadar, din faptul că A este sistem liniar independent pentru V, pentru orice i, $\lambda_i = 0$.

Existența bazei

Propoziție

Fie k un corp, V un k-spațiu vectorial. Atunci V admite o bază.

Demonstrație

Fie $\mathcal{F}$ mulțimea tuturor sistemelor liniar independente pentru V. Atunci $(\mathcal{F}, \subseteq)$ este inductiv ordonată (pentru orice lanț $X \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcup X$ este majorant pentru X), deci admite un element maximal, care, din propoziția anterioară, este chiar baza căutată.

Cu titlu informativ, menționăm că faptul că orice spațiu vectorial admite o bază este echivalent cu Axioma alegerii. Mai menționăm și că orice două baze au același cardinal, iar acest fapt este strict mai slab decât Axioma alegerii.

Cardinalul spațiilor vectoriale I

Propoziție

Fie k un corp, V un k-spațiu vectorial și B o bază pentru V cu $B \neq \emptyset$ (i.e. $V \neq \{0_V\}$). Atunci $\max(|B|, |k|) \leq |V|$.

Demonstrație

Cum $B \neq \emptyset$, fie $v \in B$. Considerăm $f : k \to V$, definită, pentru orice $\alpha \in k$, prin $f(\alpha) := \alpha \cdot v$. Atunci f este injectivă și, deci, $|k| \leq |V|$. Cum $B \subseteq V$, avem $|B| \leq |V|$, de unde obținem concluzia dorită.

Cardinalul spațiilor vectoriale II

Propoziție

Fie k un corp infinit, V un k-spațiu vectorial și B o bază pentru V cu $B \neq \emptyset$ și B finită. Atunci $|V| = |k|$.

Demonstrație

Avem că V este izomorf cu $k^{|B|}$, deci $|V| = |k|^{|B|} = |k|$.

Teoremă

Fie k un corp infinit, V un k-spațiu vectorial și B o bază pentru V cu B infinită. Atunci $|V| = \max(|B|, |k|)$.

Demonstrație

Avem

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(B)} \langle D \rangle,$$

deci $|V| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(B)| \cdot |k| = |B| \cdot |k| = \max(|B|, |k|)$.

Aplicația 1: $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

Mulțimea funcțiilor de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{Q}$, notată cu $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, are o structură naturală de $\mathbb{Q}$-spațiu vectorial.

Propoziție

Fie B o bază pentru $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Atunci $|B| = \mathfrak{c}$.

Demonstrație

Avem că $\left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{Q}|^{|\mathbb{N}|} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Clar, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \neq \{0_{\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}}\}$, deci $B \neq \emptyset$. Presupunem că B este finită. Atunci $\left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, contradicție.

Rezultă că B este infinită, de unde scoatem $\left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right| = \max(|B|, |\mathbb{Q}|) = \max(|B|, \aleph_0) = |B|$, deci $|B| = \mathfrak{c}$.

Aplicația 2: $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{C},+)$

Știm că $(\mathbb{R},+)$ are o structură naturală de $\mathbb{Q}$-spațiu vectorial. Fie B o bază a lui. Clar, $B \neq \emptyset$, iar, dacă B ar fi finită, am avea $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}|$, fals. Deci B este infinită, de unde scoatem $|\mathbb{R}| = \max(|B|, |\mathbb{Q}|)$, deci $|B| = |\mathbb{R}|$.

Analog, $(\mathbb{C},+)$ are o structură naturală de $\mathbb{Q}$-spațiu vectorial și, pentru orice bază B' a sa, avem $|B'| = |\mathbb{R}|$.

Așadar, $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{C},+)$ sunt izomorfe ca $\mathbb{Q}$-spații vectoriale, și, deci, și ca grupuri abeliene. În particular, $(\mathbb{R},+)$ are o structură naturală de $\mathbb{C}$-spațiu vectorial.