Logică matematică
CURS 7

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I

Semestrul II, 2023/2024

Logica propozițională

În acest moment putem începe studiul sistemelor logice. Dintre ele, logicii de ordinul I i se poate observa de pe acum relevanța, deoarece cu ajutorul ei se vor putea formaliza riguros axiomele teoriei mulțimilor ZFC, care au fost studiate în capitolul precedent.

În definirea și în studiul acestor sisteme, vom folosi, însă, aparatul teoriei mulțimilor. Apare astfel o problemă de genul „ce a fost înainte, oul sau găina?" care va trebui clarificată la un moment dat.

Înainte de a studia ideile și conceptele logicii de ordinul I, le vom studia pe cele ale logicii propoziționale, care deseori sunt imagini în miniatură ale primelor și pot ajuta la formarea unei intuiții.

Motto

"An exposition of what logicians call the propositional calculus can annoy and mystify mathematicians. It looks like a lot of fuss [...], it puts much emphasis on the alphabet and it gives detailed consideration to 'variables' (which do not in any sense vary). Despite (or because of?) all the pedantic machinery, it is hard to see what genuine content the subject has. Insofar as it talks about implications between propositions, everything it says looks obvious. Does it really have any mathematical value?"

– Paul Halmos, *I Want to Be a Mathematician: An Automathography* (1985)

Tabele de adevăr – recapitulare

În liceu, la disciplina Logică și argumentare (și nu numai acolo), s-au studiat tabele de adevăr. Acestea serveau la soluționarea unor cerințe precum: să se arate că formula $p \to ((q \to r) \to p)$ este tautologie.

p	q	r	$q \to r$	$(q \to r) \to p$	$p \to ((q \to r) \to p)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

Vom arăta acum un prim mod de a formula și rezolva riguros o asemenea cerință.

Operații pe 2

Reamintim: $2 = \{0, 1\}$. Vom mai nota, ocazional, $\bot := 0$ și $\top := 1$. Vom defini operațiile $\neg : 2 \to 2$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$: $2^2 \to 2$ în mod exhaustiv, prin următoarele tabele:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabelul de adevăr riguros

Prin urmare, enunțul anterior se poate reformula ca: să se arate că pentru orice p, q, $r \in 2$, avem $p \to ((q \to r) \to p) = 1$.

p	q	r	$q \to r$	$(q \to r) \to p$	$p \to ((q \to r) \to p)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

Proprietăți imediate

Propoziție

Fie $p,\ q \in 2$. Atunci:

- $\neg p = p \to \bot$; $\top = \neg\bot = \bot \to \bot$;
- $\neg p = 1 \Leftrightarrow p = 0$, $\neg p = 0 \Leftrightarrow p = 1$, $\neg\neg p = p$;
- $p \to q = 1 \Leftrightarrow p \leq q$;
- $p \to q = \neg p \vee q$, $p \vee q = \neg p \to q$;
- $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$;
- $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$, $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ (de Morgan);
- $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

În particular, toate operațiile definite anterior se pot exprima în funcție de $\bot$ și $\to$. În continuare, vom dezvolta formalismul logicii propoziționale, al cărui prim câștig va fi faptul că vom putea formula și demonstra chiar mai mult decât atât, anume că orice operație la care ne-am fi putut gândi se poate exprima în funcție de $\bot$ și $\to$.

Simboluri

Ideea este de a defini formulele logice ca obiecte matematice în sine, anume ca șiruri finite de simboluri. Vom **fixa** două obiecte $\bot$ și $\to$ astfel încât $\bot \neq \to$ (ele pot fi orice, de pildă numerele 7 și 31), precum și o mulțime Q – ale cărei elemente vor reprezenta **variabilele** sau **simbolurile propoziționale** – cu proprietatea că $\bot, \to \notin Q$. Mulțimea simbolurilor care vor apărea în formule va fi, deci, $S(Q) := Q \cup \{\bot, \to\}$.

Atunci când știm $\kappa := |Q|$, vom fixa tacit o bijecție $f : \kappa \to Q$, iar pentru orice $\alpha \in \kappa$, vom nota $f(\alpha)$ cu v_α. Dacă Q este finită și nevidă, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$Q = \{v_i \mid i \leq n\} = \{v_0, \ldots, v_n\},$$

iar dacă Q este numărabilă,

$$Q = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Formule

Formulele vor fi, deci, elemente ale lui $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(S(Q))$, iar proprietățile pe care o mulțime $A \subseteq \mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(S(Q))$ trebuie să le verifice pentru ca ea să fie mulțime de formule vor fi:

- $\mathrm{Seq}_1(Q) \subseteq A$ (adică variabilele „sunt" formule);
- $\langle \bot \rangle \in A$;
- dacă φ, $\psi \in A$, atunci $\rightarrow \varphi\psi \in A$.

Submulțimile lui $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(S(Q))$ care verifică aceste proprietăți formează o mulțime Moore. Așadar, putem lua minimul ei, pe care îl notăm cu $E(Q)$ (în particular, $E(Q)$ este nevidă, fiindcă va conține pe $\langle \bot \rangle$). Numim elementele acestei mulțimi **formule** sau **enunțuri** peste Q (atenție, doar la Logica propozițională aceste două concepte vor coincide).

Observăm că am folosit forma **prefixată** a formulelor pentru a le defini – am scris $\rightarrow \varphi\psi$ în loc de $\varphi \rightarrow \psi$ – deoarece ne va fi mai comod la unele demonstrații. În scurt timp, vom oferi un mod prin care vom putea folosi în discursul nostru forma obișnuită, i.e. **infixată**.

Limbaje formale

În general, dacă Σ este o mulțime oarecare, o putem gândi ca pe un alfabet, iar atunci $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$ va fi mulțimea **cuvintelor** cu „litere" din Σ. De pildă, dacă a, $b \in \Sigma$, atunci vom scrie $ab \in \mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$, unde prin ab înțelegem șirul $\{(0, a), (1, b)\}$. **Lungimea** unui cuvânt este pur și simplu domeniul său (în exemplul anterior, acela este 2). O submulțime a lui $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$ se va numi **limbaj formal** peste Σ – de pildă, $E(Q)$ este limbaj formal peste $S(Q)$.

Avem că $\emptyset \in \mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$ – în acest context se numește **cuvântul vid** și se notează în general cu λ.

Reamintim că notația $\langle \perp \rangle$ folosită pe slide-ul anterior nu înseamnă nimic altceva decât $\{(0, \perp)\}$, adică șirul de lungime 1 al cărui unic element este $\perp$.

Principiul inducției pe formule

Următoarea teoremă reprezintă o formă de inducție **structurală** pe mulțimea formulelor.

Principiul inducției pe formule

Fie $B \subseteq E(Q)$ astfel încât:

- $\mathrm{Seq}_1(Q) \subseteq B$;
- $\langle \perp \rangle \in B$;
- dacă φ, $\psi \in B$, atunci $\rightarrow \varphi\psi \in B$.

Atunci $B = E(Q)$.

Enunțul rezultă imediat din faptul că B este una din mulțimile ce participă la intersecția prin care a fost definit $E(Q)$.

Citirea formulelor

Proprietatea de citire

Fie $\chi \in E(Q)$. Atunci se întâmplă exact una dintre următoarele alternative:

- $\chi \in \mathrm{Seq}_1(Q)$;
- $\chi = \langle \perp \rangle$;
- există φ, $\psi \in E(Q)$ cu $\chi = \rightarrow \varphi\psi$.

Demonstrație

Notăm cu B mulțimea formulelor ce se pot scrie sub acele forme. Atunci, clar, B verifică condițiile Principiului de inducție și deci $B = E(Q)$. Faptul că se întâmplă cel mult una dintre alternative rezultă din condițiile $\perp \neq \rightarrow$ și $\perp, \rightarrow \notin Q$.

Corolar

Orice formulă are lungimea cel puțin 1 (i.e. $\lambda \notin E(Q)$).

Despre segmente inițiale

Lemă

Fie $\chi \in E(Q)$. Atunci nu există $\alpha \in E(Q)$ care să fie segment inițial strict al lui χ.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție, dar nu structurală, ci inducție completă pe numere după lungimea lui χ. Presupunem că există α ca în enunț. Din proprietatea de citire, distingem trei cazuri. Dacă $\chi \in \mathrm{Seq}_1(Q)$ sau $\chi = \langle \perp \rangle$, atunci $\alpha = \lambda$, ceea ce nu se poate. Dacă există φ, ψ cu $\chi = \rightarrow \varphi\psi$, atunci, fie $\alpha = \lambda$, ceea ce nu se poate, fie există φ', ψ' cu $\alpha = \rightarrow \varphi'\psi'$. Dacă φ și φ' ar avea lungimi diferite, atunci unul ar fi segment inițial strict al celuilalt, contradicție cu ipoteza de inducție. Așadar, $\varphi = \varphi'$ și deci ψ și ψ' au lungimi diferite, de unde rezultă din nou o contradicție cu ipoteza de inducție.

Citirea unică a formulelor

Proprietatea de citire unică

Fie φ, ψ, φ', $\psi' \in E(Q)$ cu $\to \varphi\psi = \to \varphi'\psi'$. Atunci $\varphi = \varphi'$ și $\psi = \psi'$.

Demonstrație

Dacă φ și φ' ar avea lungimi diferite, atunci unul ar fi segment inițial strict al celuilalt, contradicție. Rezultă că φ și φ' au aceeași lungime. Dar de aici rezultă imediat concluzia dorită.

Operații pe $E(Q)$

Pentru a putea folosi, după cum am anunțat, o notație infixată, definim pe $E(Q)$ operația $\rightarrow$: $E(Q)^2 \rightarrow E(Q)$, pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$, prin

$$\varphi \rightarrow \psi := \rightarrow \varphi\psi.$$

Atenție: $\rightarrow$ reprezintă obiecte complet diferite în stânga și în dreapta respectivei ecuații – anume, în stânga este vorba de operația pe care o definim acum, iar în dreapta este vorba de simbolul fixat mai devreme. Ele sunt, însă, utilizate în contexte destul de asemănătoare cât să folosim același semn grafic. În același mod, vom nota $\bot := \langle \bot \rangle$.

De asemenea, putem defini obiectele derivate $\top \in E(Q)$; $\neg : E(Q) \rightarrow E(Q)$; $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$: $E(Q)^2 \rightarrow E(Q)$ luând inspirație de la legile pe care le respectă T, $\boldsymbol{\neg}$, $\boldsymbol{\wedge}$, $\boldsymbol{\vee}$, respectiv $\boldsymbol{\leftrightarrow}$, i.e., pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$, prin

$$\top := \bot \rightarrow \bot, \quad \neg\varphi := \varphi \rightarrow \bot, \quad \varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi),$$

$$\varphi \vee \psi := (\neg\varphi) \rightarrow \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi).$$

Principiul recursiei pe formule

În spiritul slide-ului anterior, vom nota și, pentru orice $v \in Q$, șirul $\langle v \rangle$, adică șirul de lungime 1 al cărui unic element este v, pur și simplu prin v.

Principiul recursiei pe formule

Fie A o mulțime și $G_0 : Q \to A$, $G_\perp \in A$, $G_\to : A^2 \to A$. Atunci există și este unică $F : E(Q) \to A$ astfel încât:

- pentru orice $v \in Q$, $F(v) = G_0(v)$;
- $F(\perp) = G_\perp$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$, $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$.

Principiul recursiei pe formule

Demonstrație

Unicitatea rezultă imediat prin inducție structurală (exercițiu!). Pentru existență, vom construi $S \subseteq E(Q) \times A$ astfel încât să verifice:

- pentru orice $v \in Q$, $(v, G_0(v)) \in S$;
- $(\bot, G_\bot) \in S$;
- pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$ și a, $b \in A$ cu $(\varphi, a) \in S$ și $(\psi, b) \in S$, avem $(\varphi \to \psi, G_\to(a, b)) \in S$,

și să fie cea mai mică cu aceste proprietăți – ca mai înainte, o construim luând intersecția, la care participă $E(Q) \times A$, a tuturor submulțimilor care verifică proprietățile.

Rămâne de arătat că S este grafic între $E(Q)$ și A – atunci, clar, $F := (E(Q), A, S)$ va fi funcția căutată.

Principiul recursiei pe formule

Demonstrație (cont.)

Trebuie să arătăm că pentru orice $\varphi \in E(Q)$ există și este unic $a \in A$ cu $(\varphi, a) \in S$. Existența rezultă prin inducție structurală (exercițiu!), astfel că vom demonstra în continuare unicitatea.

Fie B mulțimea acelor $\varphi \in E(Q)$ cu proprietatea că există și este unic $a \in A$ cu $(\varphi, a) \in S$. Presupunem prin absurd că $B \neq E(Q)$. Atunci, din contrapusa principiului de inducție pe formule, avem că fie $\mathrm{Seq}_1(Q) \not\subseteq B$, fie $\bot \notin B$, fie există φ_0, $\psi_0 \in B$ cu $\varphi_0 \to \psi_0 \notin B$. Ultimul caz este cel mai complex și de aceea îl vom demonstra doar pe acela, primele două rămânând ca exercițiu.

Presupunem, deci, că avem φ_0, $\psi_0 \in B$ cu $\varphi_0 \to \psi_0 \notin B$. Cum φ_0, $\psi_0 \in B$, există și sunt unice a_0, b_0 cu $(\varphi_0, a_0) \in S$ și $(\psi_0, b_0) \in S$, deci avem $(\varphi_0 \to \psi_0, G_\to(a_0, b_0)) \in S$. Cum $\varphi_0 \to \psi_0 \notin B$, există $q \neq G_\to(a_0, b_0)$ cu $(\varphi_0 \to \psi_0, q) \in S$.

Principiul recursiei pe formule

Demonstrație (cont.)

Iau $T := S \setminus \{(\varphi_0 \to \psi_0, q)\}$. Vom arăta că T verifică cele trei proprietăți, ceea ce va contrazice faptul că S este cea mai mică asemenea mulțime.

Fie $v \in Q$. Atunci $(v, G_0(v)) \in S$, iar cum $(v, G_0(v)) \neq (\varphi_0 \to \psi_0, q)$, avem $(v, G_0(v)) \in T$. Cea de-a doua proprietate se arată analog.

Pentru a treia, fie φ, $\psi \in E(Q)$ și a, $b \in A$ cu $(\varphi, a) \in T$ și $(\psi, b) \in T$. Vrem $(\varphi \to \psi, G_\to(a, b)) \in T$.

Cum $(\varphi, a) \in S$ și $(\psi, b) \in S$, avem $(\varphi \to \psi, G_\to(a, b)) \in S$. Dacă $(\varphi \to \psi, G_\to(a, b)) \notin T$, înseamnă că $(\varphi \to \psi, G_\to(a, b)) = (\varphi_0 \to \psi_0, q)$, deci $\varphi \to \psi = \varphi_0 \to \psi_0$ și $G_\to(a, b) = q$.

Demonstrație (cont.)

Cum $\varphi \to \psi = \varphi_0 \to \psi_0$, din Proprietatea de citire unică avem $\varphi = \varphi_0$ și $\psi = \psi_0$. Cum $\varphi = \varphi_0$, $(\varphi_0, a) = (\varphi, a) \in S$. Dar cum $(\varphi_0, a_0) \in S$ și $\varphi_0 \in B$, avem $a = a_0$. Analog, $b = b_0$. Deci $q = G_{\to}(a, b) = G_{\to}(a_0, b_0)$, contradicție cu presupunerea inițială $q \neq G_{\to}(a_0, b_0)$.

Demonstrația este acum încheiată.

Mulțimea variabilelor

Corolar

Există și este unică $Var : E(Q) \to \mathcal{P}(Q)$ astfel încât:

- pentru orice $v \in Q$, $Var(v) = \{v\}$;
- $Var(\perp) = \emptyset$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$, $Var(\varphi \to \psi) = Var(\varphi) \cup Var(\psi)$.

De exemplu, $Var(\neg v_0 \to v_1) = Var(\neg v_0) \cup Var(v_1) = Var(v_0 \to \perp) \cup Var(v_1) = (Var(v_0) \cup \emptyset) \cup Var(v_1) = \{v_0\} \cup \{v_1\} = \{v_0, v_1\}$.

Următorul enunț se arată prin inducție structurală.

Corolar

Pentru orice $\varphi \in E(Q)$, $Var(\varphi)$ este finită.

Observăm și că, pentru orice $\varphi \in E(Q)$, $\varphi \in E(Var(\varphi))$.

Evaluarea formulelor

Corolar

Fie $e : Q \to 2$. Atunci există și este unică $e^+ : E(Q) \to 2$ astfel încât:

- pentru orice $v \in Q$, $e^+(v) = e(v)$;
- $e^+(\bot) = \bot = 0$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$, $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$.

Corolar

Fie $e : Q \to 2$ și $\varphi, \psi \in E(Q)$. Atunci:

- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$;
- $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$;
- $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$;
- $e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi)$.

Semnul $\models$

Vom introduce acum semnul $\models$, care va avea un număr foarte mare de semnificații pe parcursul cursului.

Definiție

- Fie $e : Q \to 2$ și $\varphi \in E(Q)$. Spunem că e **satisface** φ sau că e este **model** pentru φ și notăm $e \models \varphi$ dacă $e^{+}(\varphi) = 1$. Mulțimea modelelor unei formule φ se notează cu $Mod(\varphi)$.
- Fie $\varphi \in E(Q)$. Spunem că φ este **tautologie** și scriem $\models \varphi$ dacă pentru orice e, $e \models \varphi$, i.e. dacă $Mod(\varphi) = 2^{Q}$.
- Spunem că $\varphi \in E(Q)$ este **satisfiabilă** dacă există e cu $e \models \varphi$, i.e. dacă $Mod(\varphi) \neq \emptyset$.
- Spunem că o formulă φ este **nesatisfiabilă** dacă φ nu este satisfiabilă, i.e. dacă $Mod(\varphi) = \emptyset$. Exemplu: $\bot$.
- Fie $\varphi, \psi \in E(Q)$. Spunem că din φ **se deduce semantic** ψ și scriem $\varphi \models \psi$ dacă pentru orice e cu $e \models \varphi$ avem $e \models \psi$, i.e. dacă $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)$.

Tautologii și formule nesatisfiabile

Propoziție

Fie $\varphi \in E(Q)$. Atunci:

- φ este tautologie dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă;
- φ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Implicația formală vs. implicația materială

Propoziție

Fie $\varphi, \psi \in E(Q)$. Atunci $\varphi \models \psi$ dacă și numai dacă $\models \varphi \to \psi$.

Demonstrație

Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \models \psi &\Leftrightarrow \text{pentru orice } e : Q \to 2 \text{ cu } e \models \varphi,\ e \models \psi \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e : Q \to 2 \text{ cu } e^+(\varphi) = 1,\ e^+(\psi) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\varphi) \leq e^+(\psi) \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\varphi \to \psi) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e \models \varphi \to \psi \\
&\Leftrightarrow \models \varphi \to \psi.
\end{aligned}$$

Mulțimi diferite de variabile

Până acum, am lucrat cu o mulțime fixă de variabile Q. Este interesant de văzut ce se întâmplă atunci când considerăm aceeași formulă ca făcând parte din mulțimile enunțurilor peste două mulțimi de variabile diferite.

Propoziție

Fie $Q' \subseteq Q$, deci $E(Q') \subseteq E(Q)$. Fie $f \in 2^Q$ și $e := f_{|Q'}$. Atunci, pentru orice $\varphi \in E(Q')$, $e^+(\varphi) = f^+(\varphi)$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție structurală după φ. Dacă $\varphi \in Q'$, atunci $e^+(\varphi) = e(\varphi) = f(\varphi) = f^+(\varphi)$. Dacă $\varphi = \bot$, avem $e^+(\varphi) = 0 = f^+(\varphi)$. Cazul implicației rămâne ca exercițiu.

Evaluări ce coincid pe variabilele formulei

Corolar

Fie $e_1, e_2 \in 2^Q$ și $\varphi \in E(Q)$. Presupunem că pentru orice $v \in Var(\varphi)$, $e_1(v) = e_2(v)$. Atunci $e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Demonstrație

Notăm $Q' := Var(\varphi)$. Atunci $\varphi \in E(Q') \subseteq E(Q)$. Notăm $e := e_{1|Q'} = e_{2|Q'}$. Atunci, folosind propoziția anterioară,

$$e_1^+(\varphi) = e^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Noțiunea de funcție booleană

Definiție

Fie I o mulțime. O **funcție booleană** peste I este o funcție de la 2^I la 2.

Avem că $\neg$ este o funcție booleană peste 1, $\bot$ și $\top$ sunt asemenea funcții peste 0, iar $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ sunt asemenea funcții peste 2.
Orice Q și orice $\varphi \in E(Q)$ determină o funcție booleană $F_\varphi^Q : 2^Q \to 2$, definită, pentru orice $e \in 2^Q$, prin $F_\varphi^Q(e) := e^+(\varphi)$.
Obținem, așadar, o funcție

$$\Psi_Q : E(Q) \to 2^{2^Q}$$

definită, pentru orice $\varphi \in E(Q)$, prin $\Psi_Q(\varphi) := F_\varphi^Q$.

Vom arăta că dacă Q este **finită**, atunci Ψ_Q este surjectivă, i.e. orice funcție booleană provine dintr-o formulă. Aceasta ne va arăta lucrul pe care ni l-am propus mai devreme, i.e. faptul că $\bot$ și $\rightarrow$ sunt suficienți.

Q infinită

Mai întâi, însă, să vedem că acest enunț este fals atunci când Q este infinită, i.e. atunci există $G \in 2^{2^Q}$ astfel încât pentru orice φ, $G \neq F_\varphi^Q$. Definim G, pentru orice $e \in 2^Q$, prin:

$$G(e) = 1 :\Leftrightarrow \{v \in Q \mid e(v) = 1\} \text{ este infinită.}$$

Presupunem că există φ cu $G = F_\varphi^Q$. Definim $e_0 : Q \to 2$, pentru orice $v \in Q$, prin

$$e_0(v) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } v \in Var(\varphi), \\ 0, & \text{dacă } v \notin Var(\varphi). \end{cases}$$

Definim $e_1 : Q \to 2$ ca fiind funcția constantă 1. Cum $Var(\varphi)$ este finită, avem $G(e_0) = 0$ și, cum Q este infinită, $G(e_1) = 1$, deci $0 = F_\varphi^Q(e_0) = e_0^+(\varphi)$ și $1 = F_\varphi^Q(e_1) = e_1^+(\varphi)$. Însă, pentru orice $v \in Var(\varphi)$, $e_0(v) = e_1(v) = 1$, deci $e_0^+(\varphi) = e_1^+(\varphi)$, contradicție.

Q finită

Acum arătăm că dacă Q este finită, pentru orice $G \in 2^{2^Q}$ există φ cu $G = F_\varphi^Q$. Demonstrăm prin inducție după cardinalul lui Q. Primul pas este acela când $Q = \emptyset$.

În acest caz 2^Q are un singur element, funcția vidă, deci 2^{2^Q} va avea două elemente: G_0, care duce funcția vidă în 0, și G_1, care duce funcția vidă în 1.

Se observă acum (exercițiu!) că $G_0 = F_\perp^Q$ și $G_1 = F_\top^Q$.

Presupunem, acum, că există $n \in \mathbb{N}$ cu $Q = \{v_0, \ldots, v_n\}$. Notăm $Q' := \{v_i \mid i < n\}$, iar pentru orice $e \in 2^{Q'}$, definim e^0, $e^1 \in 2^Q$ ce prelungesc pe e, cu $e^0(v_n) = 0$ și $e^1(v_n) = 1$.

Fie $G : 2^Q \to 2$. Definim G_0, $G_1 : 2^{Q'} \to 2$, pentru orice $e \in 2^{Q'}$, prin $G_0(e) := G(e^0)$ și $G_1(e) := G(e^1)$. Din ipoteza de inducție, există φ_0, $\varphi_1 \in E(Q')$ cu $G_0 = F_{\varphi_0}^{Q'}$ și $G_1 = F_{\varphi_1}^{Q'}$. Notăm $\varphi := (\neg v_n \to \varphi_0) \wedge (v_n \to \varphi_1)$. Vom arăta că $F_\varphi^Q = G$.

Fie $f \in 2^Q$ și presupunem w.l.o.g. că $f(v_n) = 0$. Notăm $e := f_{|Q'}$ și, deci, $f = e^0$, iar $e^+(\varphi_0) = f^+(\varphi_0)$. Atunci am terminat, deoarece avem, pe de o parte,

$$F_\varphi^Q(f) = f^+(\varphi) = (1 \to f^+(\varphi_0)) \wedge (0 \to f^+(\varphi_1)) = f^+(\varphi_0),$$

iar, pe de alta,

$$G(f) = G(e^0) = G_0(e) = F_{\varphi_0}^{Q'}(e) = e^+(\varphi_0) = f^+(\varphi_0).$$

Echivalența semantică

Pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$, spunem că φ și ψ sunt **echivalente semantic** – și notăm $\varphi \sim \psi$ sau $\varphi \,\text{⫤}\!\vDash \psi$ – dacă pentru orice $e \in 2^Q$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$ sau, altfel spus, dacă $F_\varphi^Q = F_\psi^Q$, sau, încă, dacă $Mod(\varphi) = Mod(\psi)$.

Avem că $\sim$ este o relație de echivalență (exercițiu!), iar astfel putem defini o funcție $\widetilde{\Psi}_Q : E(Q)/\sim \to 2^{2^Q}$, punând, pentru orice $\varphi \in E(Q)$,

$$\widetilde{\Psi}_Q(\widehat{\varphi}) := \Psi_Q(\varphi) = F_\varphi^Q,$$

care este injectivă.

Dat fiind că, atunci când Q este finită, $\widetilde{\Psi}$ este și surjectivă, obținem următorul rezultat.

Corolar

Dacă Q este finită, $|E(Q)/\sim| = 2^{2^{|Q|}}$.

Cardinalul lui $E(Q)$

Dacă Q este cel mult numărabilă, se arată ușor (exercițiu!) că $E(Q)$ este numărabilă. Următoarele propoziții ne oferă un răspuns pentru cazul când Q este o mulțime infinită oarecare.

Propoziție

Fie A o mulțime infinită. Atunci $|\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(A)| = |A|$.

Demonstrație

Avem $|\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(A)| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n| \leq |\mathbb{N}| \cdot |A| = |A|$.

Propoziție

Dacă Q este infinită, $|E(Q)| = |Q|$.

Demonstrație

Avem $Q \subseteq E(Q) \subseteq \mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(S(Q))$ și, deci,
$|Q| \leq |E(Q)| \leq |\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(S(Q))| = |S(Q)| = |Q|$.