# Logică matematică
## CURS 0

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2024/2025

# Motto

*"Logic may be not very useful, if you know it, but very harmful, if you ignore it."*

– atribuit lui Georg Kreisel

# Aspecte organizatorice

# Desfășurare

Informații actualizate despre curs, incluzând acest suport, se pot găsi la pagina:

https://cs.unibuc.ro/~asipos/lm/

Activitățile didactice vor fi ținute de către următorii oameni:

- curs: Andrei Sipoș
- seminar:
  - grupele 101, 102: Andrei Sipoș
  - grupele 103, 104, 105: Horațiu Cheval

# Notare

Examenul va consta într-o lucrare scrisă ce va cuprinde probleme totalizând 12 puncte. Puteți avea la dispoziție orice materiale **fizice** (nu digitale). Problemele vor fi de un nivel de dificultate asemănător cu cel al problemelor din seminar (în particular, ele pot fi dintre enunțurile lăsate ca exercițiu la curs). În redactarea răspunsurilor puteți folosi orice rezultat din curs sau seminar care fie este **deja demonstrat**, fie este un exercițiu **ușor**.

Pentru promovarea examenului sunt necesare 5 puncte obținute în lucrarea scrisă.

# Introducere istorică

# Logica tradițională

Logica antică a cunoscut în genere două abordări (studiate în liceu la disciplina Logică și argumentare): **logica silogistică** (introdusă de Aristotel) și **logica propozițiilor compuse** (introdusă de filosofii stoici).

Prima dintre ele a fost abordarea dominantă timp de 2000 de ani (până în secolul al XIX-lea), timp în care a fost oarecum îmbunătățită de logicieni musulmani (Avicenna, Averroes) și scolastici (Abelard, Occam, Buridan).

În ultimele secole ale acestei perioade (epoca Renașterii și epoca modernă timpurie), nu s-au mai înregistrat progrese semnificative.

Au existat în secolul al XIX-lea încercări de algebrizare (Boole, Venn).

# Neajunsurile logicii tradiționale

Scopul acestor tehnici era realizarea unei argumentări corecte, însă multe enunțuri ce apăreau în argumentări nu se supuneau formelor studiate, de pildă enunțurile în care apăreau **generalități multiple**:

*O pisică este temută de orice șoarece.*

Ca urmare, logica avea o natură mai umanistă, în sensul că se limita la a preciza erori comune în argumentare, fără a avea pretenția de a caracteriza complet raționamentele corecte.

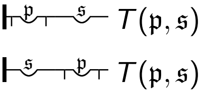
# Logica lui Frege

În 1879, Gottlob Frege, în lucrarea sa *Begriffsschrift* (aprox. „notația conceptelor”), a introdus primul sistem logic în care se putea formaliza (și dezambiguiza) enunțul precedent:

$$\exists p \forall s T(p, s)$$

$$\forall s \exists p T(p, s)$$

Sistemul lui reprezintă ceea ce acum se numește **logica predicatelor** sau **logica de ordinul întâi**, însă notația lui Frege nu era cea contemporană de mai sus, ci arăta cam așa:



# Alte abordări

Sistemul lui Frege nu a fost băgat în seamă până la Russell, însă ideea plutea în aer la acea vreme, un sistem similar fiind introdus de Charles Peirce începând cu anul 1882 (împreună cu studentul său, Oscar Mitchell). Sistemul său a fost mai apoi popularizat de Ernst Schröder și de Giuseppe Peano.

Peano a introdus și multe dintre simbolurile logicii actuale, de pildă semnul „$(\exists x)$" pentru „există $x$". (Noțiunea de „oricare $x$" era scrisă de el ca „$(x)$", notație întâlnită cam până la mijlocul secolului XX.)

# Logică și matematică

Toate aceste abordări doreau cumva să obțină și o legătură a logicii cu matematica – Frege dorea să deducă afirmațiile matematice din cele logice (**logicism**), iar Peano a formulat binecunoscuta sa axiomatizare logică a aritmeticii.

Între timp, însă, matematica își trăia propria sa criză a fundamentelor.

În analiza matematică, nevoia de a formula și demonstra precis noi rezultate semnificative, precum teorema lui Fourier din 1807 ce spune că orice funcție continuă poate fi reprezentată ca o serie trigonometrică, a condus la definițiile moderne (cu $\varepsilon$ și $\delta$) ale limitei și continuității, datorate lui Augustin-Louis Cauchy, Bernard Bolzano și Karl Weierstrass.

Definirea riguroasă a conceptelor a permis descoperirea diverselor patologii, precum exemplul șocant al lui Weierstrass din 1872 de funcție reală continuă peste tot și derivabilă nicăieri.

# Teoria mulțimilor

În 1874, Georg Cantor, student al lui Weierstrass, analizând seriile trigonometrice, introduce primele noțiuni de **teoria mulțimilor**, incluzând faptul că (în limbaj actual) nu există o corespondență bijectivă între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{R}$.

În următorii ani, Cantor publică mai multe rezultate de teoria mulțimilor, incluzând (în 1878) formularea **ipotezei continuumului** – orice submulțime infinită a lui $\mathbb{R}$ este în bijecție cu $\mathbb{N}$ sau cu $\mathbb{R}$ – pe care nu reușește, însă, să o demonstreze.

Metodele teoriei mulțimilor, fiind foarte puternice, au fost primite cu entuziasm de anumiți matematicieni, printre care și David Hilbert.

# Hilbert

Hilbert îmbrățișase deja anumite metode matematice mai heterodoxe la acea vreme, rezolvând în 1888 o problemă pusă de Paul Gordan și demonstrând astfel că (în limbaj actual) orice ideal al unui inel de polinoame peste un corp într-un număr finit de nedeterminate este finit generat (**teorema bazei a lui Hilbert**), dar într-un mod complet neconstructiv, și nu computațional cum se rezolvaseră înainte anumite cazuri particulare.

Gordan: „*Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie.*"

Hilbert: "*No-one shall be able to expel us from the paradise that Cantor created for us.*"

# Problemele lui Hilbert

În 1900, Hilbert lansează o listă de 23 de probleme, de care, în opinia sa, trebuia să se ocupe matematica secolului XX.

Prima problemă de pe listă era ipoteza continuumului a lui Cantor.

A doua problemă se referea la **consistența** fundamentelor matematicii, anume de a ne asigura că metodele folosite în demonstrațiile matematice (inclusiv cele controversate folosite de Hilbert și de către alții) nu produc contradicții.

# Programul lui Hilbert

Aceste idei au condus la ceea ce a ajuns să fie numit **Programul lui Hilbert**, rezumat de obicei astfel:

1. Găsirea unui fundament adecvat pentru întreaga matematică.
2. Demonstrarea prin metode simple și necontroversate (așa-numitele **metode finitare**) că fundamentul găsit la primul punct nu produce contradicții.

Însă, contradicțiile începuseră deja să apară în sistemele existente la acea vreme.

# Paradoxul lui Russell

În 1899, Ernst Zermelo descoperise o contradicție în teoria lui Cantor, pe care Bertrand Russell o redescoperă doi ani mai târziu, în 1901. Ea poartă numele de **paradoxul lui Russell** și privește mulțimea $R = \{x \mid x \notin x\}$. Din definiția lui $R$, se deduce

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R,$$

absurd!

Russell observă că paradoxul se regăsește sub o anume formă și în sistemul lui Frege, iar în 1902 îi comunică faptul:

*"There is just one point where I have encountered a difficulty."*

# Răspunsul lui Frege

Frege realizează eroarea și include, un an mai târziu, o notă ca anexă a noii sale cărți:
*"There is nothing worse that can happen to a scientist than to have the foundation collapse just as the work is finished. I have been placed in this position by a letter from Mr. Bertrand Russell."*

La vederea cărții lui Frege, Hilbert îi scrie:
*"I believe Dr. Zermelo discovered it three or four years ago."*

De asemenea, în același an 1903, Russell însuși publică paradoxul în cartea sa *The Principles of Mathematics*:
*"Before taking leave of fundamental questions, it is necessary to examine more in detail the singular contradiction, already mentioned, with regard to predicates not predicable of themselves. [...] I may mention that I was led to it in the endeavour to reconcile Cantor's proof..."*

Fiecare dintre cei doi descoperitori ai paradoxului a propus câte un mod prin care el putea fi evitat.

Bertrand Russell și Alfred North Whitehead au dezvoltat ceea ce astăzi se numește **teoria tipurilor** și au fundamentat matematica într-un asemenea sistem. Această muncă a fost publicată, începând cu 1910, în cartea lor *Principia Mathematica*. Notația adoptată de ei a fost în mare parte cea a lui Peano.

*"An analysis of the paradoxes to be avoided shows that they all result from a kind of vicious circle. The vicious circles in question arise from supposing that a collection of objects may contain members which can only be defined by means of the collection as a whole. [...] The principle which enables us to avoid illegitimate totalities may be stated as follows: whatever involves all of a collection must not be one of the collection. [...] We shall call this the vicious-circle principle, because it enables us to avoid the vicious circles involved in the assumption of illegitimate totalities."*

Zermelo a propus în schimb în 1908 o listă de axiome ce modelau (și deci restricționau) comportamentul mulțimilor lui Cantor. În următoarele decenii, Abraham Fraenkel, Thoralf Skolem și John von Neumann au extins această listă, ajungându-se la ceea ce se numește astăzi teoria axiomatică a mulțimilor **ZFC** (**Z**ermelo-**F**raenkel set theory with the axiom of **C**hoice).

ZFC a devenit în timp extrem de popular prin simplitatea lui și este în prezent sistemul îndeobște acceptat prin care este fundamentată matematica. Răspândirea lui a condus la ubicuitatea modelului

$$\text{matematică} = \text{logică} + \text{axiome},$$

renunțându-se așadar la proiectul logicist al lui Frege de a deduce matematica exclusiv din legi pur logice.

# Logica propozițională

Vedem totuși că legile logice stăteau încă la temelie, și de aceea Hilbert și-a început realizarea programului său cu cele mai slabe asemenea legi, cele ale logicii propoziționale clasice. Prima problemă importantă tratată a fost cea a completitudinii axiomelor sale, anume dacă orice tautologie este demonstrabilă – în limbajul de astăzi, dacă pentru orice $\varphi$, avem

$$\models \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \varphi.$$

Hilbert și asistentul său, Paul Bernays, în 1917-8, au demonstrat completitudinea unui set de axiome propoziționale gândit de ei.

În 1921, Emil Post a oferit și el o demonstrație a completitudinii logicii propoziționale, de data aceasta axiomele alese fiind cele din fragmentul corespunzător al *Principia Mathematica*.

# Logica predicatelor

Pasul următor era logica predicatelor, cea echivalentă cu sistemul lui Frege și cea în care toate axiomele matematice (cum ar fi ZFC) puteau fi exprimate.

Hilbert și un alt student al său, Wilhelm Ackermann, publică în 1928 cartea *Grundzüge der theoretischen Logik*, în care formulează logica predicatelor într-un mod care a rămas valabil până astăzi și în care ridică problema completitudinii.

În anul următor, **teorema de completitudine a logicii predicatelor** este demonstrată de Kurt Gödel, în teza sa de doctorat (exact în formularea Hilbert/Ackermann; demonstrația a fost încorporată în următoarele ediții ale cărții).

# Aritmetica

Reamintim că prima parte a programului lui Hilbert cerea să se găsească un fundament adecvat pentru întreaga matematică.

În 1930, însă, tot Gödel dă prima lovitură programului, anunțând **prima sa teoremă de incompletitudine**: există propoziții aritmetice pe care sistemul din *Principia Mathematica* – iar, apoi, s-a observat că acesta poate fi înlocuit cu orice alt fundament plauzibil (din nou, cum ar fi ZFC) – nu le poate nici confirma, nici infirma.

Instrumentul principal al demonstrației a fost ceea ce se numește acum **Gödelizare**: codificarea formulelor și demonstrațiilor sub formă aritmetică.

# Ierarhia sistemelor

Așadar, nu poate exista un singur sistem din care să se poată demonstra toate teoremele matematice, ci există o multitudine de sisteme „parțiale" cu puteri variate.

Sistemele concepute de oameni sunt grupate în general, după puterea lor de demonstrare, în trei categorii, anume, în ordine crescătoare:

- „aritmetică";
- „analiză";
- „teoria mulțimilor".

Ele alcătuiesc **ierarhia Gödel**.

# Consistența

Mai rămânea partea a doua a programului lui Hilbert, anume demonstrarea prin metode finitare a faptului că aceste sisteme sunt consistente (necontradictorii).

În 1931, Gödel publică demonstrația primei sale teoreme (care va reprezenta rezultatul central al tezei sale de abilitare, susținută în anul următor) împreună cu o **a doua teoremă**, ce spune că sistemele respective, **dacă** sunt consistente, **nu** își pot demonstra propria consistență (von Neumann reușise să deducă acest rezultat pornind doar de la primul anunț al lui Gödel).

# Cum se aplică a doua teoremă

Acest rezultat zdrobește programul lui Hilbert! Să vedem cum.

Fie $S$ un sistem consistent și notăm propoziția ce îi exprimă consistența prin $Con(S)$. Este posibil, uneori, să o demonstrăm într-un sistem $T$, mai puternic ca $S$ și scriem $T \vdash Con(S)$. Însă, noi vrem să dobândim încredere în $S$. Or, acest lucru nu este posibil, având în vedere că ni s-ar cere ca, în prealabil, să avem încredere în sistemul mai puternic $T$.

De aceea, Hilbert dorea să arate consistența cu metode finitare, adică într-un sistem mai slab ca $S$, notat cu $F$. Dacă aceasta ar fi posibil, deci dacă am avea $F \vdash Con(S)$, atunci, cum $F \subseteq S$, am avea și $S \vdash Con(S)$. Însă, exact acest lucru este interzis de a doua teoremă a lui Gödel.

# *Entscheidungsproblem*

O altă problemă ridicată în cartea Hilbert/Ackermann 1928 a fost așa-numita *Entscheidungsproblem* („problema de decizie”) – care se referă la o potențială proprietate a logicii predicatelor mai puternică decât completitudinea – anume, dacă există o **procedură de decizie** pentru ea, un algoritm care să spună dacă un enunț dat în acea logică este sau nu universal adevărat.

Pentru aceasta, trebuia spus mai întâi ce înseamnă (ca obiect matematic, așadar) un algoritm, o procedură de decizie: în fond, a se spune când o funcție este calculabilă.

# Funcții primitiv-recursive

Ideea de la care s-a pornit a fost cea de recursivitate, metodă prin care multe funcții (de pildă șirul lui Fibonacci) erau deja în mod uzual definite, și care are schema generală

$$f(0) := m, \quad f(n+1) := g\left(f_{|\{0,\ldots,n\}}\right)$$

Pornind de la această schemă, Skolem a introdus în 1923 clasa funcțiilor **primitiv-recursive**. Definiția precisă a fost dată de Gödel în cursul demonstrării teoremei de incompletitudine, funcțiile primitiv-recursive fiind un ingredient esențial al acelei demonstrații.

# Funcții recursive

Gabriel Sudan (1927) și Wilhelm Ackermann (1928) au găsit, însă, exemple de funcții evident calculabile, dar care nu erau primitiv-recursive.

Exemplul oferit de obicei în cărțile actuale este o variantă a funcției lui Ackermann datorată lui Rózsa Péter, unul dintre părinții teoriei recursiei. Este vorba de acea unică funcție $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n$, $m \in \mathbb{N}$, avem:

$$\begin{aligned} A(0, n) &= n + 1 \\ A(m + 1, 0) &= A(m, 1) \\ A(m + 1, n + 1) &= A(m, A(m + 1, n)) \end{aligned}$$

Ca urmare, Gödel a definit în 1934 clasa funcțiilor **general-recursive**, care includea și aceste exemple.

În 1936, Alonzo Church și Alan Turing introduc noi moduri de a defini funcțiile calculabile – modele de calcul – **calculul lambda**, respectiv **mașina Turing**. Fiecare dintre ei demonstrează că în modelul său nu poate fi decisă *Entscheidungsproblem*, folosindu-se în demonstrațiile lor de forme de Gödelizare. Problema pusă de Hilbert și Ackermann are, așadar, un răspuns negativ.

Doar mașinile Turing reușesc să îl convingă pe Gödel că reprezintă o definiție adecvată, Turing oferind argumente că ele cuprind întreaga sferă a ceea ce se poate calcula din punct de vedere informal (afirmație cunoscută acum ca **teza Church-Turing**); el arată, însă, că ele sunt echivalente cu $\lambda$-calculul lui Church (în plus, sunt echivalente și cu funcțiile general-recursive ale lui Gödel).

# Gentzen

Ultima contribuție majoră (despre care vom vorbi) a acestei perioade a logicii îi aparține lui Gerhard Gentzen.

Urmând contribuțiile sale esențiale la teoria demonstrațiilor (el fiind și cel care a introdus notația „$(\forall x)$" pentru „oricare $x$"), Gentzen a propus o soluție inovatoare pentru problema consistenței.

# Consistența aritmeticii

Am văzut până acum că a demonstra consistența unui sistem consistent într-unul mai puternic era inutil, iar într-unul mai slab era imposibil.

Soluția lui Gentzen a fost de a o demonstra într-un sistem **incomparabil**, obținut prin adăugarea la metodele finitare principiul inducției finitare până la un ordinal **nefinitar**. El a obținut o asemenea demonstrație în 1936 pentru aritmetica de ordinul întâi, ordinalul respectiv fiind $\varepsilon_0$.

În anii următori, el a continuat să rafineze această demonstrație și să caute una valabilă și pentru sisteme mai puternice (de analiză), dar a murit prematur în 1945.

# Logica în secolul XX

La sfârșitul celui de-al Doilea Război Mondial, toate noțiunile principale ale logicii sunt precis definite, iar limitările fundamentale sunt în mare cunoscute. Logica matematică își atinge deci maturitatea, fiind de atunci în mod convențional împărțită în patru ramuri principale:

- teoria mulțimilor
- teoria calculabilității
- teoria modelelor
- teoria demonstrațiilor

împreună cu altele limitrofe: logica categorială, logicile neclasice, teoria algoritmică a informației etc.

Aceste patru ramuri sunt și cele recunoscute de forul internațional al logicii matematice, fondat în 1936, Association for Symbolic Logic (ASL).

# Aplicații

Pe lângă studiul ei ca domeniu de sine stătător, logica are aplicații și în alte arii ale matematicii, dintre care amintim:

- teoria algebrică și geometrică a modelelor
  - aplicații în algebră și geometrie algebrică, cum ar fi teorema Ax-Grothendieck sau demonstrația dată de Ehud Hrushovski conjecturii Mordell-Lang pentru corpuri de funcții (de orice caracteristică)
- proof mining
  - subdomeniu introdus de Georg Kreisel și adus la maturitate de școala lui Ulrich Kohlenbach, el constă în aplicarea pentru demonstrații matematice concrete (de ex. din analiză neliniară, algebră comutativă) a tehnicilor teoriei demonstrațiilor

# Planul cursului

În acest curs:

- vom studia teoria axiomatică a mulțimilor din punct de vedere naiv (cursurile 1-6);
- vom descrie logica propozițională (cursurile 7-9) și logica predicatelor (cursurile 10-12), împreună cu rezultatele lor principale și aplicațiile lor imediate;
- vom arăta cum se formalizează teoria mulțimilor în logica predicatelor, cum poate ea servi ca fundament al matematicii și cum poate fi productiv acest studiu logic al ei (cursul 13);
- vom arăta cum se poate aplica logica în alte ramuri ale matematicii (cursul 14).

# Logica în FMI

În facultatea noastră există un număr de profesori care își desfășoară activitatea științifică în logica matematică, o parte dintre ei fiind grupați în Centrul de Cercetare în Logică, Optimizare și Securitate (LOS):

https://los.cs.unibuc.ro/

care organizează și seminarul științific de logică:

https://ilds.ro/logic-seminar/

la care oricine interesat poate participa.