

Logică matematică

CURS 10

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2024/2025

Logica predicatelor sau Logica de ordinul I

După cum am spus și în Introducerea istorică, cealaltă abordare clasică studiată în liceu asupra logicii, pe lângă logica propozițiilor compuse (corespunzătoare în acest curs logicii propoziționale), a fost logica silogistică, unde întâlneam raționamente de genul următor:

Toți iepurii au blană.

Unele animale sunt iepuri.

Deci, unele animale au blană.

Formalizarea clasică a argumentului de mai sus era:

MaP

SiM

SiP

Șirul format, *a-i-i*, dădea (printre altele) denumirea acestui tip de raționament: DARII.

Metode de a formaliza diverse aserțiuni s-au întâlnit și la materiile matematice – de pildă, folosirea cuantificatorilor. Puteam exprima faptul că într-un corp orice element nenul este inversabil prin:

$$\forall x(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1)),$$

iar faptul că o relație de ordine admite un element maximal prin:

$$\exists x \forall y (x \leq y \rightarrow x = y).$$

Putem formaliza și argumentul prezentat anterior folosind cuantificatori, în felul următor:

$$\frac{\forall x(I(x) \rightarrow B(x)) \quad \exists x(A(x) \wedge I(x))}{\exists x(A(x) \wedge B(x))}$$

Aceste observații conduc la ideea de a defini un nou sistem logic, ce se va numi **logica predicatelor** sau **logica de ordinul I**, unde să avem la dispoziție cuantificatori și variabile, precum și simboluri prin care să exprimăm relații sau operații.

Deși logica propozițiilor compuse a fost prezentată în liceu ca o variantă mai dezvoltată a logicii silogistice (numită la acel moment și logica propozițiilor simple), observăm în exemplele anterioare că, dimpotrivă, logica propozițională, cu operatorii ei ca $\perp$, $\rightarrow$, este cea care va fi înglobată în acest sistem logic cuantificat.

Logica de ordinul I nu doar permite exprimarea riguroasă a enunțurilor de mai devreme (și, după cum am prefigurat, va putea exprima și axiomele teoriei mulțimilor), dar și, într-un anume sens precis (pe care nu îl vom detalia), este cel mai puternic sistem logic utilizabil practic – orice alt sistem mai puternic (cum ar fi, firește, logica de ordinul II) posedă neajunsuri esențiale.

Vom fixa patru obiecte $\perp, \rightarrow, \forall, =$, diferite două câte două și o mulțime numărabilă

$$V = \{x_0, x_1, \dots\},$$

cu $V \cap \{\perp, \rightarrow, \forall, =\} = \emptyset$, ale cărei elemente le vom numi **variabile**.

Atenție, însă, aceste variabile **nu** au un rol analog simbolurilor propoziționale. Ne putem întreba, totuși, care este, într-adevăr, analogul acestora din urmă. Observăm că în logica propozițională, dacă schimbam mulțimea simbolurilor, obțineam și o altă mulțime de formule. Și aici, după cum am văzut în exemplele anterioare, avem nevoie de mulțimi de formule diferite pentru a vorbi despre domenii de discurs diferite. Ceea ce dădea diferența între acele domenii era faptul că se foloseau simboluri diferite pentru a exprima obiecte specifice lor, anume $\cdot, 0, 1; \leq$; respectiv I, A, B . (Anumite simboluri, ca $\rightarrow$, erau comune – precum în logica propozițională – și de aceea au fost fixate mai sus.)

Signaturi și structuri

Definim, așadar, o **signatură de ordinul l** ca fiind un triplet $\sigma = (F, R, r)$ astfel încât $F \cap R = \emptyset$,
 $(F \cup R) \cap (V \cup \{\perp, \rightarrow, \forall, =\}) = \emptyset$ și $r : F \cup R \rightarrow \mathbb{N}$.

Dacă $\sigma = (F, R, r)$ este o semnătură de ordinul l , atunci numim elementele lui R **simbolurile de relație** ale lui σ , iar elementele lui F **simbolurile de funcție** ale lui σ ; pentru orice $s \in F \cup R$, numim $r(s)$ **aritatea** lui s ; în particular, acele $s \in F$ pentru care $r(s) = 0$ se numesc **constantele** lui σ . Mai definim și mulțimea

$$S_\sigma := \{\perp, \rightarrow, \forall, =\} \cup V \cup F \cup R.$$

Dacă $\sigma = (F, R, r)$ este o semnătură de ordinul l , atunci o **σ -structură** va fi o pereche $(A, \{A_s\}_{s \in F \cup R})$, unde $A \neq \emptyset$ (și se va numi **universul**, **mulțimea suport** sau **mulțimea subiacentă** a structurii), pentru orice $s \in F$, $A_s : A^{r(s)} \rightarrow A$ și pentru orice $s \in R$, $A_s \subseteq A^{r(s)}$. Structurile vor reprezenta domeniile despre care vor vorbi formulele corespunzătoare signaturilor.

Exemple

Putem obține signaturile sugerate mai devreme dacă punem

$\sigma := (F, R, r)$, iar F, R, r sunt, pe rând:

- $F = \{\cdot, 0, 1\}$, $R = \emptyset$, $r(\cdot) = 2$, $r(0) = r(1) = 0$ – atunci σ -structurile vor fi tuplurile $(A, \cdot, 0, 1)$ unde $\cdot : A^2 \rightarrow A$, iar $0, 1 \in A$, de exemplu $(\mathbb{Z}, +, 2, 7)$. Observăm că nu impunem în definiția structurii ca ea să respecte anumite legi, precum inversabilitatea de mai devreme – acest lucru se va face eventual ulterior, după ce vom defini riguros formulele și satisfacerea lor.
- $F = \emptyset$, $R = \{\leq\}$, $r(\leq) = 2$ – atunci σ -structurile vor fi perechi $(A, \leq)$ unde $\leq$ este o relație binară pe A , de exemplu $(\mathbb{N}, >)$.
- $F = \emptyset$, $R = \{I, A, B\}$, $r(I) = r(A) = r(B) = 1$.

Dacă punem $F = R = \emptyset$, atunci obținem o semnătură care, dat fiind că singurele fapte pe care le vom putea exprima peste ea vor folosi semnul $=$, se va numi **semnatura egalității**.

De asemenea, vom defini **signatura aritmeticii** ca fiind

$$\sigma_{\text{ar}} := (\{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0}\}, \{\dot{<}\}, r),$$

unde $r(\dot{+}) = r(\dot{\times}) = r(\dot{<}) = 2$, $r(\dot{S}) = 1$, iar $r(\dot{0}) = 0$. Dacă definim funcția $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin $S(n) := n^+$, iar

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, (N_s)_{s \in FUR}),$$

unde $N_{\dot{+}} = +$, $N_{\dot{\times}} = \cdot$, $N_{\dot{S}} = S$, $N_{\dot{0}} = 0$, iar $N_{\dot{<}} = <$, avem că $\mathcal{N}$ este o σ_{ar} -structură.

De remarcat că există și alte σ_{ar} -structuri, de exemplu putem înzestra mulțimea 2 cu $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0 și $<$ pentru a obține o altă σ_{ar} -structură.

Signaturi pentru varii structuri cunoscute

Am definit un graf ca fiind o mulțime înzestrată cu o relație ireflexivă și simetrică. Pentru a modela un graf, este suficient, așadar, să considerăm o signatură care are un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2. Orice graf va fi o structură corespunzătoare acestei signaturi.

În același mod, putem construi signaturi care să modeleze structuri algebrice (în spiritul primului exemplu dat mai devreme). Pentru inele, de pildă, putem considera signatura σ_a ce conține simbolurile de operație $+$, $-$, $\cdot$ ce au aritățile 2, 1, respectiv 2, precum și constantele 0 și 1.

Dacă $\sigma = (F, R, r)$ și $\sigma' = (F', R', r')$ sunt semnături, spunem că $\sigma \leq \sigma'$ dacă $F \subseteq F'$, $R \subseteq R'$ și $r = r'|_{F \cup R}$. În această situație, dacă $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ este o σ -structură, iar $\mathcal{B} = (B, (B_s)_{s \in F' \cup R'})$ este o σ' -structură, spunem că $\mathcal{A}$ este **redusa** lui $\mathcal{B}$ la σ sau că $\mathcal{B}$ este o **expansiune** a lui $\mathcal{A}$ la σ' dacă $A = B$, iar pentru orice $s \in F \cup R$, $A_s = B_s$. Se observă că:

- Redusa oricărei σ' -structuri la σ există și este unică (de aceea am folosit articolul hotărât).
- Există mereu o expansiune a unei σ -structuri $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ la σ' , obținută în felul următor: se fixează $a \in A \neq \emptyset$, simbolurilor de relație din $R' \setminus R$ li se asociază relații vide, iar simbolurilor de funcție din $F' \setminus F$ li se asociază funcții constante ce iau valoarea a .

Formulele corespunzătoare unei semnături $\sigma = (F, R, r)$ vor fi cuvinte peste alfabetul S_σ . Înainte de a defini formulele, va trebui să definim **termenii** (de pildă, $x \cdot y$ de mai devreme). Ei se definesc ca fiind cea mai mică mulțime $A \subseteq \text{Seq}_{\text{fin}}(S_\sigma)$ astfel încât:

- $V \subseteq A$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in A$, avem $st_1 \dots t_{r(s)} \in A$ (în particular, dacă $r(s) = 0$, $s \in A$).

Mulțimea termenilor peste σ se va nota cu T_σ .

Principiul inducției pe termeni

Fie $B \subseteq T_\sigma$ astfel încât:

- $V \subseteq B$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in B$, avem $st_1 \dots t_{r(s)} \in B$.

Atunci $B = T_\sigma$.

Principiul recursiei pe termeni

Fie A o mulțime și $G_0 : V \rightarrow A$, iar pentru orice $s \in F$, $G_s : A^{r(s)} \rightarrow A$. Atunci există și este unică $F : T_\sigma \rightarrow A$ astfel încât:

- pentru orice $x \in V$, $F(x) = G_0(x)$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,
 $F(st_1 \dots t_{r(s)}) = G_s(F(t_1), \dots, F(t_{r(s)}))$.

Mulțimea variabilelor unui termen

Ca exemplu, putem defini recursiv mulțimea variabilelor unui termen. Practic, definim funcția $Var : T_\sigma \rightarrow \mathcal{P}(V)$, prin:

- pentru orice $x \in V$, $Var(x) := \{x\}$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,
 $Var(st_1 \dots t_{r(s)}) := Var(t_1) \cup \dots \cup Var(t_{r(s)})$ (în particular, dacă $r(s) = 0$, $Var(s) = \emptyset$).

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ -structură. Atunci pentru orice $v : V \rightarrow A$ există și este unică o funcție $(\cdot)_v^{\mathcal{A}} : T_\sigma \rightarrow A$ astfel încât

- pentru orice $x \in V$, $x_v^{\mathcal{A}} = v(x)$;
- pentru orice $s \in F$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,
 $(st_1 \dots t_{r(s)})_v^{\mathcal{A}} = A_s((t_1)_v^{\mathcal{A}}, \dots, (t_{r(s)})_v^{\mathcal{A}})$ (în particular, dacă $r(s) = 0$, $s_v^{\mathcal{A}} = A_s$).

Atenție, din nou: funcția v din definiția de mai sus **nu** are un rol similar cu cel al funcțiilor $e : Q \rightarrow 2$ din logica propozițională, cu toate că ar putea părea astfel.

Lema variabilelor (pentru termeni)

Lema variabilelor (pentru termeni)

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o σ -structură, $v_1, v_2 : V \rightarrow A$ și $t \in T_\sigma$ astfel încât $v_1|_{\text{Var}(t)} = v_2|_{\text{Var}(t)}$. Atunci $t_{v_1}^{\mathcal{A}} = t_{v_2}^{\mathcal{A}}$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după termeni. Dacă $x \in V$, atunci $x \in \{x\} = \text{Var}(x)$ și deci $v_1(x) = v_2(x)$, i.e. $x_{v_1}^{\mathcal{A}} = x_{v_2}^{\mathcal{A}}$.

Fie acum $s \in F$ și $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$ ce verifică concluzia lemei. Fie $i \in \{1, \dots, r(s)\}$. Atunci $\text{Var}(t_i) \subseteq \text{Var}(t)$ și deci $v_1|_{\text{Var}(t_i)} = v_2|_{\text{Var}(t_i)}$. Din ipoteza de inducție, avem $(t_i)_{v_1}^{\mathcal{A}} = (t_i)_{v_2}^{\mathcal{A}}$ și așadar:

$$\begin{aligned}(st_1 \dots t_{r(s)})_{v_1}^{\mathcal{A}} &= A_s((t_1)_{v_1}^{\mathcal{A}}, \dots, (t_{r(s)})_{v_1}^{\mathcal{A}}) \\ &= A_s((t_1)_{v_2}^{\mathcal{A}}, \dots, (t_{r(s)})_{v_2}^{\mathcal{A}}) \\ &= (st_1 \dots t_{r(s)})_{v_2}^{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Fie $\sigma = (F, R, r)$ o semnatură. Numim **formulă atomică** peste σ un şir de forma $=tu$, cu $t, u \in T_\sigma$ sau un şir de forma $st_1 \dots t_n$ cu $s \in R$, $n = r(s)$ şi $t_1, \dots, t_n \in T_\sigma$. Mulţimea formulelor atomice peste σ se va nota cu Fa_σ . Mulţimea **formulelor** peste σ se defineşte ca fiind cea mai mică mulţime $A \subseteq \text{Seq}_{\text{fin}}(S_\sigma)$ astfel încât:

- formulele atomice aparţin lui A ;
- $\perp \in A$;
- dacă $\varphi, \psi \in A$, atunci $\rightarrow \varphi\psi \in A$;
- dacă $\varphi \in A$ şi $x \in V$, atunci $\forall x\varphi \in A$.

Mulţimea formulelor peste σ se va nota cu F_σ .

Notăție infixată și conectori derivați

Vom folosi aceeași metodă pe care am folosit-o la logica propozițională pentru a putea nota formulele infixat – pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\varphi \rightarrow \psi$ în loc de $\rightarrow \varphi \psi$, dar și, pentru orice $t, u \in T_\sigma$, $t = u$ în loc de $= tu$.

De asemenea, vom nota, ca mai înainte, pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$,

$$\top := \perp \rightarrow \perp, \quad \neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp, \quad \varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi),$$

$$\varphi \vee \psi := (\neg\varphi) \rightarrow \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi).$$

dar și, pentru orice $x \in V$ și $\varphi \in F_\sigma$,

$$\exists x\varphi := \neg\forall x\neg\varphi.$$

Principiul inducției pe formule

Fie $B \subseteq F_\sigma$ astfel încât:

- formulele atomice aparțin lui B ;
- $\perp \in B$;
- dacă $\varphi, \psi \in B$, atunci $\varphi \rightarrow \psi \in B$;
- dacă $\varphi \in B$ și $x \in V$, atunci $\forall x \varphi \in B$.

Atunci $B = F_\sigma$.

Principiul recursiei pe formule

Fie A o mulțime și $G_0 : Fa_\sigma \rightarrow A$, $G_\perp \in A$, $G_\rightarrow : A^2 \rightarrow A$, $G_\forall : V \times A \rightarrow A$. Atunci există și este unică $F : F_\sigma \rightarrow A$ astfel încât:

- pentru orice $\varphi \in Fa_\sigma$, $F(\varphi) = G_0(\varphi)$;
- $F(\perp) = G_\perp$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_\rightarrow(F(\varphi), F(\psi))$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $F(\forall x \varphi) = G_\forall(x, F(\varphi))$.

Mulțimea variabilelor libere ale unei formule

Ca exemplu, putem defini recursiv mulțimea variabilelor **libere** ale unei formule. Definim funcția $FV : F_\sigma \rightarrow \mathcal{P}(V)$, prin:

- pentru orice $t, u \in T_\sigma$, $FV(t = u) := Var(t) \cup Var(u)$;
- pentru orice $s \in R$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,
 $FV(st_1 \dots t_{r(s)}) := Var(t_1) \cup \dots \cup Var(t_{r(s)})$;
- $FV(\perp) := \emptyset$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $FV(\varphi \rightarrow \psi) := FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $FV(\forall x \varphi) := FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

Dacă $\varphi \in F_\sigma$ cu $FV(\varphi) = \emptyset$, atunci φ se numește **enunț**.

Mulțimea enunțurilor peste σ se notează cu E_σ .

Spre evaluarea formulelor

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in \text{FUR}})$ o σ -structură. Pentru orice $v : V \rightarrow A$, $x \in V$, $a \in A$, definim $v_{x \leftarrow a} : V \rightarrow A$, pentru orice $y \in V$, prin

$$v_{x \leftarrow a}(y) := \begin{cases} v(y), & \text{dacă } y \neq x, \\ a, & \text{dacă } y = x. \end{cases}$$

Observăm că pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $v : V \rightarrow A$ și orice $a, b \in A$, avem că

$$(v_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (v_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $v_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Așadar, pentru orice $z \in V$,

$$v_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(z) = \begin{cases} v(z) & \text{dacă } z \neq x \text{ și } z \neq y, \\ a & \text{dacă } z = x, \\ b & \text{dacă } z = y. \end{cases}$$

Avem că există și este unică o funcție $\|\cdot\|^{\mathcal{A}} : F_{\sigma} \rightarrow 2^{A^V}$ astfel încât, pentru orice $v : V \rightarrow A$, avem:

- pentru orice $t, u \in T_{\sigma}$, $\|t = u\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow t_v^{\mathcal{A}} = u_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $s \in R$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_{\sigma}$,
 $\|st_1 \dots t_{r(s)}\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow ((t_1)_v^{\mathcal{A}}, \dots, (t_{r(s)})_v^{\mathcal{A}}) \in A_s$;
- $\|\perp\|_v^{\mathcal{A}} = \perp = 0$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_{\sigma}$, $\|\varphi \rightarrow \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \rightarrow \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi \in F_{\sigma}$ și $x \in V$,
 $\|\forall x \varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow$ pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$.

Dacă $\varphi \in F_{\sigma}$ este astfel încât pentru orice $\mathcal{A}$ și v , $\|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$, spunem că φ este **validă**.

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in FUR})$ o σ -structură. Este acum imediat că pentru orice $v : V \rightarrow A$, avem:

- $\|\top\|_v^{\mathcal{A}} = \top = 1$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\|\varphi \wedge \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \wedge \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\|\varphi \vee \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \vee \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $\|\varphi \leftrightarrow \psi\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} \leftrightarrow \|\psi\|_v^{\mathcal{A}}$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$,
 $\|\exists x \varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \Leftrightarrow$ există $a \in A$ cu $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$.

Definiție

Spunem că $\chi \in F_\sigma$ se numește **tautologie** dacă pentru orice $F : F_\sigma \rightarrow 2$ astfel încât $F(\perp) = 0$ și pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$, avem $F(\chi) = 1$.

Propoziție

Orice tautologie este formulă validă.

Demonstrație

Fie χ o tautologie. Fie $\mathcal{A}$ și v . Definim $F : F_\sigma \rightarrow 2$, pentru orice $\varphi \in F_\sigma$, prin $F(\varphi) := \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}}$. Atunci F verifică condițiile din definiția tautologiei, deci $F(\chi) = 1$, i.e. $\|\chi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$.

Lema variabilelor libere

Lema variabilelor libere

Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in \text{FUR}})$ o σ -structură, $v_1, v_2 : V \rightarrow A$ și $\varphi \in F_\sigma$ astfel încât $v_1|_{FV(\varphi)} = v_2|_{FV(\varphi)}$. Atunci $\|\varphi\|_{v_1}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{v_2}^{\mathcal{A}}$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după formule. Vom demonstra doar cazul cel mai greu, anume atunci când știm că concluzia lemei este valabilă pentru un $\varphi \in F_\sigma$, avem $x \in V$ și vrem să o demonstrăm pentru $\forall x \varphi$. Dat fiind că $\|\forall x \varphi\|_{v_1}^{\mathcal{A}} = 1$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|_{(v_1)_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$, iar $\|\forall x \varphi\|_{v_2}^{\mathcal{A}} = 1$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|_{(v_2)_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$, este suficient să arătăm că pentru orice $a \in A$, $\|\varphi\|_{(v_1)_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{(v_2)_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}$. Fie $a \in A$. Din ipoteza de inducție, este suficient să arătăm că $((v_1)_{x \leftarrow a})|_{FV(\varphi)} = ((v_2)_{x \leftarrow a})|_{FV(\varphi)}$. Fie $y \in FV(\varphi)$. Atunci, fie $y = x$, iar atunci $(v_1)_{x \leftarrow a}(y) = a = (v_2)_{x \leftarrow a}(y)$, fie $y \neq x$, iar atunci $y \in FV(\varphi) \setminus \{x\} = FV(\forall x \varphi)$. Avem $(v_1)_{x \leftarrow a}(y) = v_1(y) = v_2(y) = (v_2)_{x \leftarrow a}(y)$.

Așadar, dacă $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in FUR})$ este o σ -structură și φ este enunț, pentru orice $v_1, v_2 : V \rightarrow A$, avem $\|\varphi\|_{v_1}^A = \|\varphi\|_{v_2}^A$, deci este echivalent faptul că pentru orice $v : V \rightarrow A$, $\|\varphi\|_v^A = 1$ cu faptul că există $v : V \rightarrow A$ cu $\|\varphi\|_v^A = 1$. Notăm această stare de fapt cu

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

și spunem că $\mathcal{A}$ **satisface** φ sau că $\mathcal{A}$ este **model** pentru φ .

Iată, deci, că structurile de ordinul I reprezintă analogul funcțiilor $e : Q \rightarrow 2$ întâlnite în logica propozițională. De aici provine și numele acelei ramuri a logicii care studiază structurile de ordinul I în conjuncție cu enunțurile satisfăcute de ele: **teoria modelelor**.

Semnul $\models$ în logica de ordinul I

Vom defini următoarele concepte, precum și noi semnificații ale semnului $\models$, prin analogie cu logica propozițională:

- Dacă $\varphi \in E_\sigma$ și φ este valid, vom scrie $\models \varphi$.
- Spunem că $\varphi \in E_\sigma$ este **satisfiabil** dacă există $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \varphi$.
- Spunem că un enunț φ este **nesatisfiabil** dacă φ nu este satisfiabil.
- Fie $\varphi, \psi \in E_\sigma$. Spunem că din φ **se deduce semantic** ψ și scriem $\varphi \models \psi$ dacă pentru orice $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \varphi$ avem $\mathcal{A} \models \psi$.

Clar, $\perp$ este enunț, iar pentru orice σ -structură $\mathcal{A}$, avem $\mathcal{A} \not\models \perp$, i.e. $\perp$ este nesatisfiabil.

Vom ilustra în continuare toate conceptele de până acum. Fie σ prima semnătură dată ca exemplu în curs și considerăm σ -formula

$$\varphi := \forall x_0 (x_0 \cdot 1 = x_0).$$

Atunci

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= FV(x_0 \cdot 1 = x_0) \setminus \{x_0\} \\ &= (Var(x_0 \cdot 1) \cup Var(x_0)) \setminus \{x_0\} \\ &= (Var(x_0) \cup Var(1) \cup Var(x_0)) \setminus \{x_0\} \\ &= (\{x_0\} \cup \emptyset \cup \{x_0\}) \setminus \{x_0\} = \emptyset, \end{aligned}$$

deci φ este enunț.

Un exemplu

Fie acum $\mathcal{A}$ o σ -structură având pe A ca univers și $v : V \rightarrow A$.
Avem că

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 &\Leftrightarrow \|\forall x_0 (x_0 \cdot 1 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \\&\Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A, \|x_0 \cdot 1 = x_0\|_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1 \\&\Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A, (x_0 \cdot 1)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = (x_0)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} \\&\Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A, A((x_0)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}, 1_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}) = (x_0)_{v_{x_0 \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} \\&\Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A, A(v_{x_0 \leftarrow a}(x_0), A_1) = v_{x_0 \leftarrow a}(x_0) \\&\Leftrightarrow \text{pentru orice } a \in A, A.(a, A_1) = a,\end{aligned}$$

deci $\mathcal{A} \models \varphi$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in A$, $A.(a, A_1) = a$.

Tot în orice semnătură σ , are sens să definim, pentru orice $n \geq 2$, enunțul

$$\exists^{\geq n} := \exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots),$$

iar pentru orice σ -structură $\mathcal{A}$, și orice $n \geq 2$, avem $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n}$ dacă și numai dacă universul lui $\mathcal{A}$ are cardinalul cel puțin n . Putem defini și $\exists^{\geq 1}$ ca fiind $\exists x_1 (x_1 = x_1)$, care va fi un enunț valid, dat fiind că am presupus că orice structură are universul nevid. De asemenea, vom mai defini, pentru orice $n \geq 1$:

$$\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1},$$

$$\exists^=n := \exists^{\geq n} \wedge \exists^{\leq n},$$

ce vor avea semnificațiile lor firești.

Substituția pe termeni

Pentru orice $t, u \in T_\sigma$ și $y \in V$, vom defini termenul $t[y := u]$ (citim, de pildă, „ t în care y a fost substituit prin u ”), în mod recursiv, astfel:

- dacă $t \in V$,

$$t[y := u] = \begin{cases} u, & \text{dacă } y = t, \\ t, & \text{dacă } y \neq t. \end{cases}$$

- pentru orice $s \in F$, $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,

$$(st_1 \dots t_{r(s)})[y := u] = s(t_1[y := u]) \dots (t_{r(s)}[y := u]).$$

Substituția pe formule

Pentru orice $\chi \in F_\sigma$, $y \in V$ și $u \in T_\sigma$, vom defini formula $\chi[y := u]$ (citim, de pildă, „ χ în care y a fost substituit prin u ”), în mod recursiv, astfel:

- pentru orice $t, v \in T_\sigma$,
 $(t = v)[y := u] := ((t[y := u]) = (v[y := u]));$
- pentru orice $s \in R$, $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,

$$(st_1 \dots t_{r(s)})[y := u] := s(t_1[y := u]) \dots (t_{r(s)}[y := u]);$$

- $\perp[y := u] := \perp$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$,
 $(\varphi \rightarrow \psi)[y := u] := (\varphi[y := u]) \rightarrow (\psi[y := u]);$
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$,

$$(\forall x \varphi)[y := u] := \begin{cases} \forall x (\varphi[y := u]), & \text{dacă } y \neq x, \\ \forall x \varphi, & \text{dacă } y = x. \end{cases}$$

Am dori ca pentru orice χ, y, u , formula

$$\forall y \chi \rightarrow (\chi[y := u])$$

să fie validă.

Din păcate, acest lucru nu este adevărat. De pildă, luăm $\chi := \neg \forall x_0 (x_0 = x_1)$, $y := x_1$, $u := x_0$. Atunci

$$\begin{aligned}\chi[y := u] &= (\neg \forall x_0 (x_0 = x_1))[x_1 := x_0] \\ &= \neg ((\forall x_0 (x_0 = x_1))[x_1 := x_0]) \\ &= \neg \forall x_0 ((x_0 = x_1)[x_1 := x_0]) \\ &= \neg \forall x_0 (x_0[x_1 := x_0] = x_1[x_1 := x_0]) \\ &= \neg \forall x_0 (x_0 = x_0).\end{aligned}$$

Formula despre care vrem să fie validă va fi

$$\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1) \rightarrow \neg \forall x_0 (x_0 = x_0).$$

Dar dacă luăm $\mathcal{A}$ o σ -structură al cărei univers este mulțimea $2 = \{0, 1\}$, iar $v : V \rightarrow 2$ oarecare, cum pentru orice $a \in 2$ există $b \in 2$ cu $a \neq b$, avem

$$\|\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1)\|_v^{\mathcal{A}} = 1,$$

iar cum nu este adevărat că există $a \in 2$ cu $a \neq a$, avem

$$\|\neg \forall x_0 (x_0 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} = 0.$$

Ca urmare,

$$\begin{aligned} & \|\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1) \rightarrow \neg \forall x_0 (x_0 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} \\ &= \|\forall x_1 \neg \forall x_0 (x_0 = x_1)\|_v^{\mathcal{A}} \rightarrow \|\neg \forall x_0 (x_0 = x_0)\|_v^{\mathcal{A}} \\ &= 1 \rightarrow 0 = 0, \end{aligned}$$

deci formula nu este validă.

Problema este că în termenul u apare variabila x_0 care este apoi „capturată accidental” de cuantificatorul $\forall x_0$ ce apare în formula χ . Soluția va fi să păstrăm definiția dată doar pentru situațiile în care acest fenomen nu poate apărea. Aceste situații „bune”, ce depind, firește, de χ , y și u , vor fi definite în continuare sub titulatura „ y este **liber pentru** u în χ ”.

Definiția lui „ y este liber pentru u în χ ” este recursivă și are forma următoare:

- y este liber pentru u în orice formulă atomică sau în $\perp$;
- y este liber pentru u în $\varphi \rightarrow \psi$ dacă y este liber pentru u în φ și y este liber pentru u în ψ ;
- y este liber pentru u în $\forall x\varphi$ dacă fie avem că $y \notin FV(\forall x\varphi)$, fie avem că $x \notin Var(u)$ și y este liber pentru u în φ .

Mulțimea variabilelor unei formule

Pentru a oferi un exemplu general de caz în care această situație are loc, definim mulțimea variabilelor unei formule (nu doar cele libere), prin funcția $Var : F_\sigma \rightarrow \mathcal{P}(V)$, definită recursiv prin:

- pentru orice $t, u \in T_\sigma$, $Var(t = u) := Var(t) \cup Var(u)$;
- pentru orice $s \in R$ și orice $t_1, \dots, t_{r(s)} \in T_\sigma$,
 $Var(st_1 \dots t_{r(s)}) := Var(t_1) \cup \dots \cup Var(t_{r(s)})$;
- $Var(\perp) := \emptyset$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in F_\sigma$, $Var(\varphi \rightarrow \psi) := Var(\varphi) \cup Var(\psi)$;
- pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $x \in V$, $Var(\forall x \varphi) := Var(\varphi) \cup \{x\}$.

Exemplul general

Propoziție

Fie $\chi \in F_\sigma$, $y \in V$, $u \in T_\sigma$. Atunci, dacă $\text{Var}(\chi) \cap \text{Var}(u) = \emptyset$, avem că y este liber pentru u în χ .

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după χ . Cazul netrivial este cel în care χ este de forma $\forall x\varphi$. Știm că $\text{Var}(\forall x\varphi) \cap \text{Var}(u) = \emptyset$, iar cum $\text{Var}(\varphi) \subseteq \text{Var}(\forall x\varphi)$, avem $\text{Var}(\varphi) \cap \text{Var}(u) = \emptyset$. Din ipoteza de inducție, avem că y este liber pentru u în φ .

Presupunem că $y \in FV(\varphi)$. Rămâne de arătat că $x \notin \text{Var}(u)$. Dar aceasta este adevărat, dat fiind că $x \in \text{Var}(\forall x\varphi)$, iar $\text{Var}(\forall x\varphi) \cap \text{Var}(u) = \emptyset$.

Pentru a arăta că, în acest caz de „substituție liberă”, formulele pe care le doream valide într-adevăr sunt așa, vom folosi următoarele proprietăți, ale căror demonstrații le lăsăm ca exercițiu.

Proprietățile substituției libere

Fie $\chi \in F_\sigma$, $t, u \in T_\sigma$, $y \in V$, $\mathcal{A}$ o σ -structură cu universul A și $v : V \rightarrow A$. Atunci:

- $(t[y := u])_v^{\mathcal{A}} = t_{v \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}$;
- dacă y este liber pentru u în χ , $\|\chi[y := u]\|_v^{\mathcal{A}} = \|\chi\|_{v \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}$.

Acum putem demonstra rezultatul dorit.

Propoziție

Fie $\chi \in F_\sigma$, $y \in V$, $u \in T_\sigma$, $\mathcal{A}$ o σ -structură cu universul A și $v : V \rightarrow A$. Presupunem că y este liber pentru u în χ . Atunci avem

$$\|\forall y \chi \rightarrow (\chi[y := u])\|_v^{\mathcal{A}} = 1.$$

Demonstrație

Presupunem că avem $\|\forall y \chi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\|\chi\|_{v_{y \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$. În particular, $\|\chi\|_{v_{y \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}}^{\mathcal{A}} = 1$, deci, din propoziția precedentă,

$$\|(\chi[y := u])\|_v^{\mathcal{A}} = 1.$$

Pentru a putea defini corect substituția în cazul general, vom defini recursiv, pentru orice formulă χ și orice $W \subseteq V$ finită, **variantea W -liberă** a lui χ , notată cu χ^W , în felul următor:

- dacă χ este atomică sau $\perp$, $\chi^W := \chi$;
- $(\varphi \rightarrow \psi^W) := \varphi^W \rightarrow \psi^W$;
- $(\forall x \varphi)^W := \begin{cases} \forall z (\varphi^W[x := z]), & \text{dacă } x \in W, \\ \forall x \varphi^W, & \text{dacă } x \notin W, \end{cases}$

unde z este variabila cu indice cel mai mic din mulțimea (nevidă) $V \setminus (W \cup \text{Var}(\varphi^W))$.

A se observa că în acest ultim caz, cum $z \notin \text{Var}(\varphi^W)$, avem că $\text{Var}(\varphi^W) \cap \text{Var}(z) = \emptyset$, deci substituția din definiție este liberă.

Aceste variante libere au următoarele proprietăți, ale căror demonstrații le lăsăm ca exercițiu.

Propoziție

Fie $\chi \in F_\sigma$.

- Fie $y \in V$, $u \in T_\sigma$. Atunci y este liber pentru u în $\chi^{Var(u)}$.
- Fie $W \subseteq V$ finită, $\mathcal{A}$ o σ -structură cu universul A și $v : V \rightarrow A$. Atunci $\|\chi^W\|_v^{\mathcal{A}} = \|\chi\|_v^{\mathcal{A}}$.

Substituții nelibere

Definim, acum, pentru orice χ , y , u astfel încât y **nu** este liber pentru u în χ ,

$$\chi[y := u] := \chi^{Var(u)}[y := u].$$

Dat fiind că ne-am restrâns la cazul „neliber”, nu intrăm în conflict de limbaj cu folosirea operației de substituție din cadrul definirii variantei libere (și nici cu membrul drept de mai sus).

Propoziție

Fie χ , y , u astfel încât y nu este liber pentru u în χ . Atunci avem, pentru orice $\mathcal{A}$ și v , $\|\chi[y := u]\|_v^{\mathcal{A}} = \|\chi\|_{v \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}$ și, deci, ca mai înainte, formula $\forall y \chi \rightarrow (\chi[y := u])$ este validă.

Demonstrație

Fie $\mathcal{A}$ și v . Avem, folosind proprietățile anterioare, că

$$\|\chi[y := u]\|_v^{\mathcal{A}} = \|\chi^{Var(u)}[y := u]\|_v^{\mathcal{A}} = \|\chi^{Var(u)}\|_{v \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}} = \|\chi\|_{v \leftarrow u_v^{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}.$$