Logică matematică
CURS 12

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2024/2025

Deducție în logica de ordinul I

Vom introduce sumar un sistem deductiv de tip Hilbert pentru logica de ordinul I. Axiomele sale vor fi:

- tautologiile;
- pentru orice formule φ, ψ și orice $y \in V \setminus FV(\varphi)$,
$$(\forall y(\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \forall y\psi);$$
- pentru orice $\chi \in F_\sigma$, $y \in V$, $u \in T_\sigma$ cu y liber pentru u în χ,
$$\forall y\chi \to (\chi[y := u]);$$
- pentru orice y, z, $w \in V$, $t \in T_\sigma$ și orice formulă **atomică** φ,
$$y = y;$$
$$z = w \to (t[y := z] = t[y := w]);$$
$$z = w \to (\varphi[y := z] \to \varphi[y := w]).$$

Pe lângă regula de deducție (MP), vom avea și regula **generalizării**: pentru orice $x \in V$ și $\varphi \in F_\sigma$, din φ se va deduce $\forall x\varphi$.

Deducție în logica de ordinul I

Pentru orice $\Gamma \subseteq E_\sigma$ (atenție, **nu** F_σ!) și orice $\varphi \in F_\sigma$, se vor defini, exact ca la logica propozițională, $\Gamma \vdash \varphi$ și $\vdash \varphi$. Această deducție va satisface următoarele proprietăți, pe care nu le vom demonstra.

Proprietăți

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$, $\varphi \in E_\sigma$, $\psi \in F_\sigma$. Atunci:

- $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**teorema deducției**);
- dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$, atunci $\Gamma \vdash \neg\varphi$;
- dacă $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$, atunci $\Gamma \vdash \bot$.

Teorema de corectitudine

Precum la logica propoziţională, vom avea următoarea teoremă ce se demonstrează prin inducţie pe deducţia sintactică. **A se observa** că validitatea uneia dintre axiome (cea care implică substituţia) a fost deja demonstrată.

Teorema de corectitudine

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ şi $\varphi \in F_\sigma$. Atunci, dacă $\Gamma \vdash \varphi$, avem că pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$ cu universul A astfel încât $\mathcal{A} \models \Gamma$ şi pentru orice $v : V \to A$ avem $\|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$. În particular, dacă avem $\vdash \varphi$, atunci φ este validă.

Mulțimi consistente

Precum la logica propozițională, putem reformula teorema de corectitudine folosind noțiunea de mulțime consistentă.

Spunem că $\Gamma \subseteq E_\sigma$ este **consistentă** dacă $\Gamma \nvdash \bot$, și **inconsistentă** dacă $\Gamma \vdash \bot$.

Teorema de corectitudine – versiunea 2

Orice mulțime satisfiabilă este consistentă.

Demonstrație

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ satisfiabilă. Atunci $\Gamma \not\models \bot$, deci $\Gamma \nvdash \bot$, i.e. Γ este consistentă.

Mulțimi maximal consistente

Spunem că o mulțime consistentă de enunțuri Γ este **maximal consistentă** dacă este maximală printre mulțimile consistente relativ la incluziune, adică, pentru orice mulțime consistentă de enunțuri Σ care include Γ, avem că $\Gamma = \Sigma$. Mulțimile maximal consistente satisfac următoarele proprietăți, pe care nu le vom demonstra.

Proprietăți

Fie Γ o mulțime maximal consistentă și $\varphi, \psi \in E_\sigma$. Atunci:

- $\Gamma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\varphi \in \Gamma$;
- $\bot \notin \Gamma$;
- $\varphi \to \psi \in \Gamma$ dacă și numai dacă $\varphi \notin \Gamma$ sau $\psi \in \Gamma$.

Teorema generală

Scopul acestor investigații este, ca în cazul logicii propoziționale, o teoremă generală care să lege noțiunile desemnate prin semnele $\vdash$ și $\models$, ce va include, așadar, Teorema de completitudine tare pentru logica de ordinul I, al cărei enunț (reamintim din Introducerea istorică) a fost pentru prima dată demonstrat de Gödel în 1929:

Teorema de completitudine – sumar

- Pentru orice $\Gamma \subseteq E_\sigma$ și $\varphi \in E_\sigma$, avem

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi.$$

- O mulțime de enunțuri este consistentă dacă și numai dacă este satisfiabilă.

Nu vom parcurge toate detaliile demonstrației uzuale (care este datorată lui Henkin) a enunțului de mai sus (după cum se vede, deja am omis anumite demonstrații ale unor proprietăți), dar vom **schița** ideile principale care intră în componența sa.

Martori

Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ și C o mulțime ale cărei elemente sunt toate constante ale lui σ. Spunem că C este o **mulțime de martori** pentru Γ dacă pentru orice $\varphi \in F_\sigma$ și $y \in V$ cu $FV(\varphi) \subseteq \{y\}$ există $c \in C$ astfel încât

$$\Gamma \vdash (\exists y \varphi) \to (\varphi[y := c]).$$

Clar, dacă $\Gamma \subseteq \Sigma$ și C este o mulțime de martori pentru Γ, atunci C este o mulțime de martori pentru Σ.

În continuare, vom arăta că mulțimile maximal consistente ce admit mulțimi de martori sunt satisfiabile, acesta putând fi văzut ca un caz particular al Teoremei de completitudine.

Teorema de existență a modelului

Teorema de existență a modelului

Considerăm signatura $\sigma = (F, R, r)$. Fie Γ o mulțime maximal consistentă și C o mulțime de martori pentru Γ. Atunci există o σ-structură $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ astfel încât $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $|A| \leq |C|$.

Demonstrație

Ideea demonstrației, așa cum am spus, îi aparține lui Henkin. Pe mulțimea C se pune relația de echivalență $\sim$, definită, pentru orice c, $d \in C$, prin

$$c \sim d :\Leftrightarrow (c = d) \in \Gamma,$$

iar apoi se pune $A := C/\sim$.

Cum există $\pi : C \to A$ surjecția canonică, dintr-un exercițiu de seminar avem că există o injecție $g : A \to C$, deci $|A| \leq |C|$.

Teorema de existență a modelului

Demonstrație (cont.)

Pentru orice $s \in F \cup R$ și orice $a_1, \ldots, a_{r(s)} \in C$, dacă $s \in F$, cum C este mulțime de martori pentru mulțimea maximal consistentă Γ, avem că există $c \in C$ cu

$$((\exists x_0(sa_1 \ldots a_{r(s)} = x_0)) \to (sa_1 \ldots a_{r(s)} = c)) \in \Gamma$$

și putem pune

$$A_s(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_{r(s)}}) := \widehat{c},$$

iar dacă $s \in R$, punem

$$(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_{r(s)}}) \in A_s :\Leftrightarrow sa_1 \ldots a_{r(s)} \in \Gamma.$$

Se demonstrează că toate aceste definiții sunt bune (nu depind de alegerile făcute), iar, după o lungă inducție, folosind proprietățile de martori și de maximal-consistență, se arată că $\mathcal{A} \models \Gamma$.

Signaturi numărabile

Pentru a putea atinge aceste proprietăți, ne vom restrânge temporar la cazul signaturilor numărabile.

Propoziție-Definiție

Fie $\sigma = (F, R, r)$ o signatură. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- $F \cup R$ este cel mult numărabilă;
- F_σ este numărabilă;
- E_σ este numărabilă.

În acest caz, spunem că σ este o **signatură numărabilă**.

Proprietatea de maximal-consistență

Teoremă

Considerăm σ numărabilă. Atunci pentru orice mulțime consistentă Γ există o mulțime maximal consistentă Γ' care include pe Γ.

Demonstrație

Fie $f : \mathbb{N} \to E_\sigma$ o bijecție. Vom nota, pentru orice n, $f(n)$ cu φ_n. Definim șirul de mulțimi $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în mod recursiv, punând $\Gamma_0 := \Gamma$, iar pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{dacă } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ este consistentă,} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Arătăm prin inducție că pentru orice n, Γ_n este consistentă. Fie n. Trebuie demonstrat că dacă $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \bot$, atunci $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ este consistentă. Presupunem că am avea $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} \vdash \bot$, deci $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n \to \bot$. Cum $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \bot$, rezultă $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n$ și, deci, $\Gamma_n \vdash \bot$, contradicție cu ipoteza de inducție.

Proprietatea de maximal-consistență

Demonstrație (cont.)

Luăm acum

$$\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n,$$

care, clar, este consistentă. Presupunem acum că ar exista Σ consistentă cu $\Gamma' \subsetneq \Sigma$. Fie $\varphi \in \Sigma \setminus \Gamma'$. Atunci există n cu $\varphi = \varphi_n$. Cum $\varphi_n \notin \Gamma'$, $\varphi_n \notin \Gamma_{n+1}$, deci $\neg\varphi_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Sigma$. Deci $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi$, i.e. $\Sigma \vdash \varphi \to \bot$, deci avem $\Sigma \vdash \bot$, ceea ce contrazice presupunerea că Σ este consistentă.

Proprietatea de martori

Teoremă

Considerăm σ numărabilă. Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ consistentă și C numărabilă astfel încât $C \cap S_\sigma = \emptyset$. Notăm cu σ' signatura numărabilă obținută prin adăugarea elementelor lui C la σ pe post de constante (precum în demonstrația teoremei Löwenheim-Skolem în sus). Atunci există o mulțime consistentă $\Gamma' \subseteq E_{\sigma'}$ astfel încât $\Gamma \subseteq \Gamma'$ și C este mulțime de martori pentru Γ'.

Demonstrație

Fie $f : \mathbb{N} \to C$ o bijecție. Vom nota, pentru orice n, $f(n)$ cu c_n. Fie

$$A := \{\varphi \in F_{\sigma'} \mid |FV(\varphi)| \leq 1\}.$$

Fie $g : \mathbb{N} \to A$ o bijecție. Vom nota, pentru orice n, $g(n)$ cu φ_n. Pentru orice n, punem y_n să fie variabila liberă a lui φ_n, în caz că aceasta există, și x_0 altfel.

Proprietatea de martori

Demonstrație (cont.)

Definim șirul de mulțimi $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în mod recursiv, punând $\Gamma_0 := \Gamma$, iar pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă notăm cu d_n acel c_m cu m minim astfel încât c_m nu apare în enunțurile din Γ_n,

$$\Gamma_{n+1} := \Gamma_n \cup \{(\exists y_n \varphi_n) \to (\varphi_n[y_n := d_n])\}.$$

Se arată printr-o inducție **netrivială** (pe care o omitem, dar menționăm că se folosește în mod crucial faptul că, pentru orice n, d_n nu apare în enunțurile din Γ_n) că pentru orice n, Γ_n este consistentă. Luăm acum $\Gamma' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. Atunci Γ' va fi și ea consistentă, iar pentru orice $\varphi \in F_{\sigma'}$ și $y \in V$ cu $FV(\varphi) \subseteq \{y\}$, avem că $\varphi \in A$, deci există n cu $\varphi = \varphi_n$, iar atunci $y_n = y$, deci

$$\Gamma' \vdash (\exists y \varphi) \to (\varphi[y := d_n]),$$

ca urmare C este mulțime de martori pentru Γ'.

Prima teoremă de completitudine

Teorema de completitudine tare – varianta 2 (cazul numărabil)

Considerăm σ numărabilă. Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ consistentă. Atunci Γ admite un model cu universul cel mult numărabil.

Demonstrație

Aplicând o propoziție veche, fie C o mulțime numărabilă astfel încât $C \cap S_\sigma = \emptyset$. Notăm cu σ' signatura numărabilă obținută prin adăugarea elementelor lui C la σ pe post de constante. Din propoziția precedentă, există o mulțime consistentă $\Gamma' \subseteq E_{\sigma'}$ astfel încât $\Gamma \subseteq \Gamma'$ și C este mulțime de martori pentru Γ'. Dintr-o propoziție anterioară, există $\Gamma'' \subseteq E_{\sigma'}$ maximal consistentă cu $\Gamma' \subseteq \Gamma''$. Avem că C este mulțime de martori și pentru Γ''. Din Teorema de existență a modelului, există o σ'-structură $\mathcal{A}'$ cu universul A astfel încât $\mathcal{A}' \models \Gamma''$, în particular $\mathcal{A}' \models \Gamma$, și $|A| \leq |C| = \aleph_0$, deci A este cel mult numărabilă. Redusa lui $\mathcal{A}'$ la σ va fi atunci modelul căutat.

Consecințe

Corolar

Considerăm σ numărabilă. Fie $\Gamma \subseteq E_\sigma$ satisfiabilă. Atunci Γ admite un model cu universul cel mult numărabil.

Teorema de completitudine (slabă; cazul numărabil)

Considerăm σ numărabilă. Atunci pentru orice $\varphi \in E_\sigma$ cu $\models \varphi$, avem $\vdash \varphi$.

Demonstrație

Fie $\varphi \in E_\sigma$ cu $\models \varphi$. Presupunem că $\not\vdash \varphi$. Atunci $\{\neg\varphi\}$ este consistentă (dacă am avea că $\{\neg\varphi\} \vdash \bot$, atunci am avea $\vdash \varphi$, contradicție!), deci satisfiabilă. Prin urmare, există $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, i.e. $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice presupunerea.

Consecințe

Teorema de completitudine (slabă; cazul general)

Considerăm σ arbitrară. Atunci pentru orice $\varphi \in E_\sigma$ cu $\models \varphi$, avem $\vdash \varphi$.

Demonstrație

Fie $\varphi \in E_\sigma$ cu $\models \varphi$. Fie σ' astfel încât $\sigma' \leq \sigma$ și σ' conține doar simbolurile din σ care apar efectiv în φ. Avem că σ' este o signatură numărabilă. Vom pune indici semnelor $\vdash$ și $\models$ pentru a indica signatura peste care lucrăm. Așadar, avem $\models_\sigma \varphi$. De aici deducem (exercițiu!) că $\models_{\sigma'} \varphi$ și putem aplica cazul numărabil al Teoremei de completitudine pentru a deduce că $\vdash_{\sigma'} \varphi$. De aici rezultă imediat $\vdash_\sigma \varphi$, ceea ce trebuia arătat.

Teorema generală

Precum la logica propozițională, putem deduce apoi Teorema de completitudine tare în cazul general (folosind Teorema deducției și Teorema de compacitate), rezumând aceste rezultate în modul următor, pe care l-am anticipat deja.

Teorema de completitudine – sumar

- Pentru orice $\Gamma \subseteq E_\sigma$ și $\varphi \in E_\sigma$, avem

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi.$$

- O mulțime de enunțuri este consistentă dacă și numai dacă este satisfiabilă.

Izomorfisme

Considerăm signatura $\sigma = (F, R, r)$. Fie $\mathcal{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ și $\mathcal{B} = (B, (B_s)_{s \in F \cup R})$ două σ-structuri. Un **izomorfism** de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$ este o bijecție $f : A \to B$ astfel încât pentru orice $s \in F \cup R$ și orice $a_1, \ldots, a_{r(s)} \in A$, avem, dacă $s \in F$, că

$$f(A_s(a_1, \ldots, a_{r(s)})) = B_s(f(a_1), \ldots, f(a_{r(s)})),$$

iar dacă $s \in R$, că

$$(a_1, \ldots, a_{r(s)}) \in A_s \Leftrightarrow (f(a_1), \ldots, f(a_{r(s)})) \in B_s.$$

Spunem că două σ-structuri $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt **izomorfe**, și notăm $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, dacă există un izomorfism de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$.

Echivalență elementară

Spunem că două σ-structuri $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt **elementar echivalente**, și notăm $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, dacă pentru orice $\varphi \in E_\sigma$ avem că $\mathcal{A} \models \varphi$ dacă și numai dacă $\mathcal{B} \models \varphi$.

Pentru orice σ-structură $\mathcal{A}$, notăm

$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \in E_\sigma \mid \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Clar, pentru orice σ-structuri $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$, avem că $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ dacă și numai dacă $\mathcal{B} \models Th(\mathcal{A})$.

Propoziție (exercițiu)

Două structuri izomorfe sunt elementar echivalente.

Apare întrebarea: există structuri elementar echivalente care nu sunt izomorfe?

Modele non-standard ale aritmeticii

Mai concret, să considerăm σ_{ar} și structura sa canonică $\mathcal{N}$. Am dori să găsim o σ_{ar}-structură $\mathcal{M}$ cu $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, deci $\mathcal{M} \models Th(\mathcal{N})$, dar cu $\mathcal{N} \not\cong \mathcal{M}$. Un asemenea $\mathcal{M}$ se va numi **model non-standard al aritmeticii**.

Putem găsi un asemenea model destul de simplu, în felul următor. Dat fiind că $Th(\mathcal{N})$ are un model infinit (pe $\mathcal{N}$), aplicând Teorema Löwenheim-Skolem în sus, obținem că există $\mathcal{M} \models Th(\mathcal{N})$ cu universul de cardinal cel puțin $\aleph_1$. Așadar, nu poate exista un izomorfism de la $\mathcal{M}$ la $\mathcal{N}$ din motive care țin de cardinalitate.

Există, însă, vreun model non-standard al aritmeticii **numărabil**?

Modele non-standard ale aritmeticii

Vom considera σ' ca fiind acea signatură care se obține din σ_{ar} prin adăugarea unei constante $c \notin S_{\sigma_{\mathrm{ar}}}$. Notăm

$$\Gamma := Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(c = \dot{0}), \neg(c = \dot{S}\dot{0}), \neg(c = \dot{S}\dot{S}\dot{0}), \ldots\} \subseteq E_{\sigma'}.$$

Arătăm că Γ este satisfiabilă. Din Teorema de compacitate, este suficient să arătăm că este finit satisfiabilă. Fie $\Delta \subseteq \Gamma$ finită. Atunci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\Delta \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(c = \dot{S}^i\dot{0}) \mid i < m\}.$$

Fie $\mathcal{B}$ expansiunea lui $\mathcal{N}$ la σ' astfel încât c este interpretat în $\mathcal{B}$ prin m. Atunci $\mathcal{B} \models \Delta$, deci Δ este satisfiabilă. Am arătat, deci, că Γ este satisfiabilă, iar cum σ' este o signatură numărabilă, dintr-un rezultat anterior avem că Γ admite un model cu universul numărabil. Redusa acelui model la σ_{ar} va fi modelul non-standard al aritmeticii căutat.

Axiomele lui Peano și logica de ordinul I

Totuși, s-a demonstrat (într-o oarecare formă) că există o axiomatizare („axiomele lui Peano”) care caracterizează numerele naturale până la izomorfism.

Acest rezultat nu contrazice, însă, existența modelelor non-standard, deoarece acelea se referă doar la enunțurile din logica de ordinul I. Concluzia ar fi că axiomele lui Peano nu pot fi, de fapt, codificate în logica de ordinul I.

Să vedem ce obstacole ar putea apărea.

Codificarea axiomelor lui Peano

Axiomele pentru zero și succesor se transpun imediat:

- $\forall x_0 \neg(\dot{S}x_0 = \dot{0})$;
- $\forall x_0 \forall x_1(\dot{S}x_0 = \dot{S}x_1 \to x_0 = x_1)$;

Lucrând în σ_{ar}, putem codifica și regulile de calcul pentru adunare, înmulțire și relația „mai mic decât”:

- $\forall x_0(x_0 \dot{+} \dot{0} = x_0)$;
- $\forall x_0 \forall x_1(x_0 \dot{+} \dot{S}x_1 = \dot{S}(x_0 \dot{+} x_1))$;
- $\forall x_0(x_0 \dot{\times} \dot{0} = \dot{0})$;
- $\forall x_0 \forall x_1(x_0 \dot{\times} \dot{S}x_1 = (x_0 \dot{\times} x_1) \dot{+} x_0)$;
- $\forall x_0 \neg(x_0 \dot{<} \dot{0})$;
- $\forall x_0 \forall x_1(x_0 \dot{<} \dot{S}x_1 \leftrightarrow (x_0 \dot{<} x_1 \vee x_0 = x_1))$.

Rămâne doar axioma inducției, exprimată atunci ca: pentru orice $B \subseteq \mathbb{N}$ cu $0 \in B$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ cu $n \in B$, avem $n^+ \in B$, avem $B = \mathbb{N}$.

Aritmetica Peano

Această axiomă nu se poate codifica direct, deoarece în logica de ordinul I nu avem cuantificare după mulțimi – submulțimi ale structurii, ca aici – aceasta fiind o caracteristică a logicilor de ordin superior.

Prima soluție este inspirată de faptul că mulțimile pot fi gândite ca proprietăți, iar acestea din urmă ca formule. Putem avea așadar câte o axiomă pentru fiecare formulă φ a lui σ_{ar}:

$$(\varphi[x_0 := \dot{0}] \wedge \forall x_0(\varphi \to \varphi[x_0 := \dot{S}x_0])) \to \forall x_0 \varphi$$

(cuantificând universal apoi formula obținută pentru a nu mai avea variabile libere).

Axiomatizarea astfel-obținută se numește **aritmetica de ordinul I** sau **aritmetica Peano** – notată cu *PA*, *Peano Arithmetic* – oarecum impropriu, nefiind vorba „în totalitate" de axiomele lui Peano.

Aritmetica de ordinul II

O a doua soluție este de a introduce efectiv un nou tip de date – **sort** – care să reprezinte submulțimile lui $\mathbb{N}$, lucrând într-o așa-numită **logică de ordinul I multisortată** (nu intrăm în detalii). Putem adăuga axiome care exprimă comportamentul acestor submulțimi (din nou, nu intrăm în detalii) și apoi să codificăm verbatim axioma inducției.

Această axiomatizare se numește **aritmetica de ordinul II** – notată cu *SOA*, *Second-Order Arithmetic*, sau cu Z_2 – tot oarecum impropriu, dar dintr-un alt motiv, anume că este vorba tot de o logică de ordinul I. Totuși, este mai puternică decât *PA* și poate exprima în genere întreg aparatul analizei matematice, de aceea se mai numește și **analiză**.

Teoria mulțimilor

În fine, o ultimă soluție – și cea mai puternică – reamintim, din Introducerea istorică, ierarhia sistemelor: „aritmetică", „analiză", „teoria mulțimilor" – este de a codifica toate axiomele teoriei mulțimilor ZFC direct în logica de ordinul I și de a lucra în cadrul acestei axiomatizări cu numerele naturale exact în modul prezentat în primul capitol al cursului.

Modulo acele axiome, teorema de unicitate rămâne valabilă, dar acele axiome, fiind exprimate în logica de ordinul I, prezintă, până la urmă, același gen de inconveniente: avem aceeași neunicitate a $\mathbb{N}$-ului (și chiar și alte rezultate catastrofale, după cum vom vedea), doar că „la un alt nivel".

Despre aceste considerente vom vorbi mai multe în capitolul următor.