Logică matematică
CURS 4

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I

Semestrul II, 2024/2025

Numere infinite

Pentru a da înțeles acestor cardinali, va trebui, firește, să prelungim noțiunea de număr finit (natural) astfel încât să cuprindă și valori „infinite”. Am văzut că cel mai mic cardinal infinit este $\mathbb{N}$, care a fost notat în acel context cu $\aleph_0$. În contextul care urmează, îl vom nota cu ω. Așadar,

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Putem prelungi „numerele” dincolo de ω folosindu-ne de operația de succesor:

$$\omega^+ = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$$
$$\omega^{++} = \omega^+ \cup \{\omega^+\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega^+\}$$

iar mai apoi am vrea să ajungem și la ceva precum:

$$\omega + \omega := \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega^+, \omega^{++}, \ldots\}$$

Ca la numerele naturale, va trebui să definim cumva unitar această clasă de obiecte (pe care le vom numi **ordinali**). Observăm că toate mulțimile de mai sus au o structură canonică de bună ordine, deci are sens să studiem întâi această noțiune mai în profunzime.

Mulțimi ordonate

Vom numi o relație de ordine strictă $<$ ca fiind de bună ordine dacă relația de ordine parțială asociată $\leq$ este în acel fel (distingând după context și notație la care ne referim). De asemenea, vom spune că o pereche (A, R) (notată deseori tot cu A) este o mulțime (parțial, strict, bine) ordonată dacă R este o relație de felul respectiv pe A.

Propoziție

Fie $(W, <)$ o mulțime bine ordonată și $S \subsetneq W$ astfel încât pentru orice $x \in W$, $y \in S$ cu $x < y$ avem $x \in S$. Atunci există $a \in W$ astfel încât $S = \{x \in W \mid x < a\} =: W[a]$.

Demonstrație

Fie $X := W \setminus S \neq \emptyset$. Fie a minimul lui X și arătăm că este cel cerut. Dacă $x \in S$ și $x \not< a$, atunci $a \leq x$ și deci $a \in S$, contradicție. Dacă $x < a$ și $x \notin S$, atunci $x \in X$, contradicție cu minimalitatea lui a.

Tot despre mulțimi bine ordonate

Propoziție

Fie $(W, <)$ o mulțime bine ordonată și $f : W \to W$ astfel încât pentru orice x_1, $x_2 \in W$ cu $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) < f(x_2)$. Atunci pentru orice $x \in W$, $x \leq f(x)$.

Demonstrație

Presupunem că există x cu $x \not\leq f(x)$ și aleg a minim cu această proprietate. Așadar, $f(a) < a$ și rezultă $f(f(a)) < f(a)$, de unde rezultă că și $f(a)$ are proprietatea respectivă, contrazicând minimalitatea lui a.

Dacă (W_1, R) și (W_2, S) sunt mulțimi ordonate, un **izomorfism** între ele este o bijecție $f : W_1 \to W_2$ astfel încât pentru orice x_1, $x_2 \in W_1$, avem $x_1 R x_2$ dacă și numai dacă $f(x_1) S f(x_2)$ (deseori, vom nota pe R și pe S cu același simbol), caz în care spunem că cele două mulțimi ordonate sunt **izomorfe**.

Proprietăți legate de izomorfism

Propoziție

Fie $(W, <)$ și $(W', <)$ mulțimi bine ordonate.

- Fie $a \in W$. Atunci W nu e izomorfă cu $W[a]$.
- Fie $f : W \to W$ izomorfism (automorfism). Atunci $f = \mathrm{id}_W$.
- Există cel mult un izomorfism de la W la W'.

Demonstrație

- Presupunem că există $f : W \to W[a]$ izomorfism. Atunci $f(a) \in W[a]$, deci $f(a) < a$, contradicție cu propoziția anterioară.
- Fie $x \in W$. Aplicând propoziția anterioară pentru f și f^{-1}, rezultă că $x \leq f(x)$ și $x \leq f^{-1}(x)$. Din ultima avem $f(x) \leq x$, deci $x = f(x)$.
- Presupunem că am avea $f, g : W \to W'$ izomorfisme. Atunci $g^{-1} \circ f$ este automorfism al lui W, deci $g^{-1} \circ f = \mathrm{id}_W$, adică $f = g$.

Proprietatea fundamentală

Teoremă

Fie $(W_1, <)$ și $(W_2, <)$ mulțimi bine ordonate. Atunci se întâmplă exact unul din următoarele lucruri:

- W_1 și W_2 sunt izomorfe.
- Există $a \in W_2$ astfel încât W_1 este izomorf cu $W_2[a]$.
- Există $a \in W_1$ astfel încât W_2 este izomorf cu $W_1[a]$.

În plus, conform propoziției anterioare (din care rezultă și că posibilitățile sunt mutual exclusive), izomorfismul este unic.

Demonstrație

Notăm $R := \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \mid W_1[x] \text{ este izomorf cu } W_2[y]\}$. Clar, din propoziția anterioară rezultă că R este grafic. Fie D domeniul său și E imaginea sa. Atunci $f := (D, E, R)$ va fi o surjecție. Faptul că este injectivă va rezulta analog faptului că R este grafic. Arătăm acum că f este izomorfismul cerut și că domeniul și codomeniul ei sunt cele posibile din enunț.

Proprietatea fundamentală

Demonstrație (cont.)

Fie x, $y \in D$, vrem $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Din simetria definiției lui R, e suficient să arătăm „$\Rightarrow$”. Presupunem $x < y$. Știm că există un izomorfism între $W_1[x]$ și $W_2[f(x)]$, precum și între $W_1[y]$ și $W_2[f(y)]$, iar pe ultimul îl notăm cu h. Cum $x < y$, h induce un izomorfism între $W_1[x]$ și $W_2[h(x)]$. Deci $W_2[f(x)]$ și $W_2[h(x)]$ sunt izomorfe, prin urmare $f(x) = h(x) < f(y)$.

Din simetria enunțului, rămâne de arătat că dacă $D \neq W_1$, atunci există a cu $D = W_1[a]$ și $E = W_2$. Pentru primul punct, e suficient să arătăm (din prima propoziție) că pentru orice $x \in W_1$ și $y \in D$ cu $x < y$ avem $x \in D$. Ca mai înainte, avem un izomorfism h între $W_1[y]$ și $W_2[f(y)]$, care induce un izomorfism între $W_1[x]$ și $W_2[h(x)]$. Deci $(x, h(x)) \in R$ și deci $x \in D$.

Proprietatea fundamentală

Demonstrație (cont.)

Pentru al doilea punct, presupunem $E \neq W_2$ și, cu același raționament, avem că există $b \in W_2$ cu $E = W_2[b]$. Deci f este un izomorfism între $W_1[a]$ și $W_2[b]$, ca urmare $(a, b) \in R$, deci $a \in D$. Dar $D = W_1[a]$, deci $a < a$, contradicție!

Acum putem trece la definirea ordinalilor.

Mulțimi tranzitive și ordinali

Definiție

O mulțime T se numește **tranzitivă** dacă pentru orice $x \in T$, $x \subseteq T$ (altfel spus, pentru orice $x \in T$ și $y \in x$ avem $y \in T$, de unde denumirea de tranzitivă).

Pentru orice mulțime A, notăm $\in_A := \{(x, y) \in A \times A \mid x \in y\}$ (sau chiar cu $\in$ când va fi clar din context).

Definiție

O mulțime α se numește **ordinal** dacă α este tranzitivă și $(\alpha, \in_\alpha)$ este mulțime bine ordonată.

Ca exemple, orice număr natural este ordinal, și chiar $\mathbb{N}$ este. Vom nota, așa cum am spus și mai devreme, cu ω pe $\mathbb{N}$ atunci când îl privim drept ordinal – așa cum l-am notat cu $\aleph_0$ atunci când îl priveam drept cardinal. Vom vedea mai târziu de ce folosim mai multe notații[1] pentru același obiect.

[1] Vezi și https://ncatlab.org/nlab/show/concept+with+an+attitude

Proprietățile ordinalilor

Următoarele proprietăți se vor demonstra la seminar:

Propoziție

- Dacă α este ordinal, atunci $\alpha \notin \alpha$.
- Dacă α este ordinal, atunci α^+ este ordinal.
- Dacă α este ordinal și $\beta \in \alpha$, β este ordinal.
- Dacă α și β sunt ordinali și $\alpha \subsetneq \beta$, atunci $\alpha \in \beta$.

Numim un ordinal de forma β^+ **ordinal succesor** (de exemplu ω^+). Un ordinal care nu este 0 sau succesor se numește **ordinal limită**. Ca la numere naturale, pentru orice ordinali α și β vom nota $\alpha < \beta$ pentru $\alpha \in \beta$ și, tot ca acolo, avem, pentru orice ordinali α și β, $\alpha \leq \beta$ dacă și numai dacă $\alpha \in \beta^+$. Mai avem și că orice ordinal este mulțimea acelor ordinali mai mici decât el.

Relația de ordine pe ordinali

Următoarea propoziție ne spune că $<$ are proprietățile unei relații de ordine strictă pe ordinali astfel încât $\leq$ este totală.

Propoziție

Fie α, β, γ ordinali.

- Dacă $\alpha < \beta$ și $\beta < \gamma$, atunci $\alpha < \gamma$.
- Nu avem că $\alpha < \alpha$.
- Avem că $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ sau $\beta < \alpha$.

Demonstrație

Primul punct rezultă din faptul că γ este tranzitivă, iar al doilea din propoziția anterioară. Pentru al treilea, ne folosim de faptul că $\alpha \cap \beta$ este ordinal (exercițiu!). Presupunem $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha$ și $\alpha \cap \beta \subsetneq \beta$. Atunci, din propoziția anterioară $\alpha \cap \beta \in \alpha$ și $\alpha \cap \beta \in \beta$, deci $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, contradicție cu propoziția anterioară. Deci $\alpha \cap \beta = \alpha$ sau $\alpha \cap \beta = \beta$, de unde $\alpha \subseteq \beta$ sau $\beta \subseteq \alpha$, așadar, $\alpha \in \beta$ sau $\alpha = \beta$ sau $\beta \in \alpha$.

Ordinalii în ansamblu

Teorema bunei ordonări

Fie P o proprietate și α un ordinal astfel încât $P(\alpha)$. Atunci există β astfel încât $P(\beta)$ și orice γ cu $P(\gamma)$ avem $\beta \leq \gamma$. În particular, orice mulțime nevidă ale cărei elemente sunt ordinali admite minim relativ la $<$. De aici rezultă că orice mulțime de ordinali este bine-ordonată de $<$.

Demonstrație

Fie $Y := \{\delta \in \alpha \mid P(\delta)\}$. Distingem două cazuri:
Cazul I. $Y = \emptyset$. Iau $\beta := \alpha$. Fie γ cu $P(\gamma)$. Presupunem $\alpha \not\leq \gamma$. Atunci $\gamma < \alpha$, deci $\gamma \in Y$, contradicție.
Cazul II. $Y \neq \emptyset$. Din faptul că α este bine ordonată, există minimul lui Y, notat cu β. Fie γ cu $P(\gamma)$. Atunci, ori $\gamma < \alpha$, deci $\gamma \in Y$ și deci $\beta \leq \gamma$, ori $\alpha \leq \gamma$, și cum $\beta < \alpha$, avem $\beta \leq \gamma$.

Supremum

Propoziție

Fie X o mulțime ale cărei elemente sunt ordinali. Notăm $\sup X := \bigcup X$. Atunci:

- $\sup X$ este ordinal; pentru orice $\alpha \in X$, $\alpha \leq \sup X$; pentru orice ordinal γ astfel încât pentru orice $\alpha \in X$ avem $\alpha \leq \gamma$, avem $\sup X \leq \gamma$;
- $(\sup X)^+ \notin X$, deci există un ordinal α cu $\alpha \notin X$.

Demonstrație

Primul punct este lăsat ca exercițiu. Pentru al doilea, presupunem $(\sup X)^+ \in X$. Atunci $(\sup X)^+ \subseteq \bigcup X$, deci $(\sup X)^+ \leq \sup X$. Avem așadar $(\sup X)^+ \in (\sup X)^+$, contradicție.

În particular, acest ultim punct ne arată că nu există mulțimea tuturor ordinalilor. Ca urmare, $<$ și $\leq$ nu denotă relații, ci doar pseudo-relații – echivalența demonstrată la seminar între $<$ și $\leq$ se păstrează, însă.

Alte fapte despre ordinali

Propoziție

Ordinalul ω este limită.

Demonstrație

Clar $\omega \neq 0$. Rămâne de arătat că nu este succesor. Presupunem că există α cu $\omega = \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$. Atunci $\alpha \in \omega$, deci, din definiția lui ω (care este $\mathbb{N}$), avem $\alpha^+ \in \omega$, adică $\omega \in \omega$, contradicție.

Se mai observă și că orice ordinal finit este număr natural (exercițiu!).

Fie α, β ordinali. Observăm că dacă $\alpha \in \beta$, atunci $\alpha = \beta[\alpha]$. Așadar, dacă $\alpha \neq \beta$, atunci $(\alpha, \in_\alpha)$ și $(\beta, \in_\beta)$ nu sunt izomorfe ca mulțimi bine ordonate.

În continuare, vom demonstra că ordinalii formează un (pseudo!) sistem complet de reprezentanți pentru (pseudo!) relația de izomorfism între mulțimile bine ordonate.

Teoremă

Fie $(W, <)$ o mulțime bine ordonată. Atunci există un ordinal α astfel încât $(W, <)$ este izomorfă cu $(\alpha, \in_\alpha)$.

Demonstrație

Notăm $T := \{a \in W \mid \text{există un ordinal izomorf cu } W[a]\}$. Vom presupune (și vom justifica mai târziu) că avem o mulțime α ce conține exact acei ordinali izomorfi cu un $W[a]$. Se arată că α este ordinal (exercițiu!) și că pentru orice $a \in T$ și $b \in W$ cu $b < a$ avem $b \in T$ (exercițiu!). Rezultă că $T = W$ sau există $c \in W$ cu $T = W[c]$.

Definim $f : T \to \alpha$, punând pentru orice $a \in T$, $f(a)$ (unic determinat!) astfel încât $f(a)$ este izomorf cu $W[a]$. Atunci f este izomorfism (exercițiu!). Dacă există $c \in W$ cu $T = W[c]$, avem că $c \in T$ și deci $c < c$, contradicție. Așadar $T = W$ și f este izomorfismul căutat.

Justificarea lui α

Rămâne întrebarea: de ce există mulțimea α? Observăm că ea ar putea fi scrisă intuitiv ca

$$\alpha = \{\beta(a) \mid a \in T\}.$$

Abstractizând, ajungem la forma

$$\{F(x) \mid x \in A\},$$

întâlnită uneori în matematică, dar necuprinsă în tiparul Axiomei comprehensiunii.

Axioma înlocuirii

Dacă F ar fi o funcție, atunci acea mulțime ar fi pur și simplu imaginea ei, dar în exemple ca al nostru, avem de-a face cu **operații** (definite în cursurile anterioare) despre care nu știm (și posibil nici nu este adevărat) că pot fi reprezentate prin funcții.

Este necesar, deci, să enunțăm o nouă axiomă.

Axioma înlocuirii

Pentru orice operație F și orice mulțime A există o mulțime B astfel încât pentru orice $x \in A$, $F(x) \in B$.

Din nou, ca și la alte axiome (a perechii, a reuniunii, a mulțimii părților), putem forma cu ajutorul Axiomei comprehensiunii mulțimea ce conține **exact** acei $F(x)$ cu $x \in A$, pe care o notăm, cum am sugerat mai devreme, cu $\{F(x) \mid x \in A\}$.

Mai mult, putem obține mai ușor și grafice (familii) prin construcții de forma $\{(x, F(x)) \mid x \in A\}$.

Existența lui α

Ca urmare, dacă definim operația G, pentru orice mulțime a, prin

$$G(a) := \begin{cases} \text{acel ordinal } \beta \text{ izomorf cu } W[a], & \text{dacă } a \in T, \\ \emptyset, & \text{altfel,} \end{cases}$$

atunci vom avea

$$\alpha = \{G(a) \mid a \in T\}.$$

Inducție completă pe ordinali

Din cele anterioare, putem formula un principiu al inducției complete pentru ordinali.

Principiul inducției complete (Principiul al II-lea de inducție) pentru ordinali

Fie P o proprietate și presupunem că pentru orice ordinal α avem că dacă pentru orice $\beta < \alpha$, $P(\beta)$, atunci $P(\alpha)$. Atunci pentru orice ordinal α avem $P(\alpha)$.

Demonstrație

Fie proprietatea Q, definită, pentru orice x, prin $Q(x)$ dacă și numai dacă nu avem $P(x)$. Presupunem că există γ astfel încât nu avem $P(\gamma)$, deci avem $Q(\gamma)$. Din Teorema bunei ordonări, există β cu $Q(\beta)$ – deci nu avem $P(\beta)$ – și pentru orice γ cu $Q(\gamma)$, avem $\beta \leq \gamma$. Altfel spus, pentru orice $\gamma < \beta$, nu avem $Q(\gamma)$, deci avem $P(\gamma)$. Aplicând ipoteza teoremei, rezultă $P(\beta)$. Contradicție!

Inducție obișnuită pe ordinali

Exploatând împărțirea ordinalilor în zero, succesor și limită, putem da următoarea variantă a principiului inducției, care corespunde mai degrabă inducției obișnuite (Principiului I de inducție) pe numerele naturale.

Principiul inducției (Principiul I de inducție) pentru ordinali

Fie P o proprietate și presupunem că:

- $P(0)$;
- pentru orice α ordinal cu $P(\alpha)$, avem $P(\alpha^+)$;
- pentru orice α ordinal limită astfel încât pentru orice $\beta < \alpha$, $P(\beta)$, avem $P(\alpha)$.

Atunci pentru orice ordinal α avem $P(\alpha)$.

Recursie completă pe ordinali

Putem formula și o teoremă a recursiei complete pentru ordinali.

Teorema recursiei complete pentru ordinali

Fie G o operație. Atunci pentru orice ordinal α există și este unic y astfel încât există un grafic t ce are domeniul α^+ astfel încât pentru orice $\beta \leq \alpha$, $t(\beta) = G(t_{|\beta})$ și $y = t(\alpha)$.

Practic, pentru orice operație G, am definit o operație F astfel încât, pentru orice ordinal α, $F(\alpha) = G(F_{|\alpha})$ (intuitiv vorbind).

Există o formă parametrizată a ei, pe care o vom folosi în scurt timp pentru a defini, ca și în cazul numerelor, operații pe ordinali.

În continuare, vom schița, ca material suplimentar, demonstrația teoremei.

Demonstrația recursiei complete

Lemă

Fie G o operație. Fie β, δ ordinali și t și u grafice cu domeniile β, δ astfel încât, pentru orice γ cu $\gamma < \beta$ și $\gamma < \delta$ avem $t(\gamma) = G(t_{|\gamma})$ și $u(\gamma) = G(u_{|\gamma})$.
Atunci, pentru orice γ cu $\gamma < \beta$ și $\gamma < \delta$ avem $t_{|\gamma} = u_{|\gamma}$ și $t(\gamma) = u(\gamma)$.

Demonstrația lemei rămâne ca exercițiu imediat.

Pentru a demonstra teorema, o presupunem adevărată pentru orice $\beta < \alpha$, având un y_β pentru fiecare β, și o demonstrăm pentru α. Unicitatea rezultă imediat din lemă. Pentru existență, luăm $s := \{(\beta, y_\beta) \mid \beta < \alpha\}$ și $t := s \cup \{(\alpha, G(s))\}$ (vom avea că $G(s)$ este y-ul căutat). Se arată, apoi, folosind lema, că pentru orice $\beta \leq \alpha$, $t(\beta) = G(t_{|\beta})$, distingând cazurile $\beta < \alpha$ și $\beta = \alpha$.

Recursie obișnuită pe ordinali

Și teorema recursiei are o formă care permite definirea recursivă a operațiilor după tipul ordinalului curent (demonstrația – exercițiu!).

Teorema recursiei pentru ordinali

Fie G_1, G_2, G_3 operații. Atunci pentru orice ordinal α există și este unic y astfel încât există un grafic t ce are domeniul α^+ astfel încât pentru orice $\beta \leq \alpha$:

- dacă $\beta = 0$, $t(\beta) = G_1(0)$,
- dacă există δ cu $\beta = \delta^+$, $t(\beta) = G_2(t(\delta))$,
- dacă β este limită, $t(\beta) = G_3(t_{|\beta})$,

iar $y = t(\alpha)$.

Aici, pentru orice operații G_1, G_2, G_3, am definit o operație F astfel încât (intuitiv vorbind):

- $F(0) = G_1(0)$;
- pentru orice ordinal α, $F(\alpha^+) = G_2(F(\alpha))$;
- pentru orice ordinal limită α, $F(\alpha) = G_3(F_{|\alpha})$.

Adunarea ordinalilor

Acum că avem la dispoziție recursia (menționăm în treacăt că și recursia obișnuită pe ordinali admite o variantă parametrizată), putem defini adunarea ordinalilor, adică pentru orice ordinali α și β, punem:

- $\alpha + 0 := \alpha$;
- $\alpha + \beta^+ := (\alpha + \beta)^+$;
- dacă β este ordinal limită, $\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$.

A se observa că, în ultima clauză (și în toate cele similare care vor urma), existența acelei mulțimi rezultă din Axioma înlocuirii.

Avertisment

Din ce am văzut până acum, atât 1 cât și $\mathbb{N}$ sunt și ordinali, și cardinali (anticipând puțin lucrurile, vom vedea peste nu mult timp că orice cardinal este ordinal). Dacă îi adunăm în ipostaza de cardinali, obținem

$$\mathbb{N} + 1 = |\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}| = \mathbb{N},$$

iar dacă îi adunăm în ipostaza de ordinali, obținem

$$\mathbb{N} + 1 = \mathbb{N} + 0^{+} = (\mathbb{N} + 0)^{+} = \mathbb{N}^{+} = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\},$$

deci cele două adunări nu coincid. Aceasta justifică cele două notații pentru $\mathbb{N}$, anume $\aleph_0$ și ω. Mai mult, dacă efectuăm următoarea adunare de ordinali:

$$1 + \mathbb{N} = \sup\{1 + n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{n^{+} \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

(faptul că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $1 + n = n^{+}$ se arată prin inducție), observăm că adunarea ordinalilor nici nu este comutativă. Subliniem că nu vom insista prea mult pe operațiile acestea pe ordinali, ele fiind prezentate mai mult cu titlu informativ.

Înmulțirea și exponențierea ordinalilor

Putem defini mai apoi, tot recursiv, înmulțirea și exponențierea ordinalilor (mai mult cu titlu informativ), folosindu-ne de următoarele formule:

- $\alpha \cdot 0 := 0$;
- $\alpha \cdot \beta^+ := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$;
- dacă β este ordinal limită, $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}$;
- $\alpha^0 := 1$;
- $\alpha^{\beta^+} := \alpha^\beta \cdot \alpha$;
- dacă β este ordinal limită, $\alpha^\beta := \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\}$.

Mai departe, dacă punem $\omega_1 := \omega$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\omega_{n^+} := \omega^{\omega_n}$, putem defini

$$\varepsilon_0 := \sup\{\omega_n \mid n \geq 1\} = \sup\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots\right\}.$$

Acest ε_0 este cel care a fost pomenit în Introducerea istorică în conjuncție cu demonstrația de consistență a lui Gentzen.

Ordinali inițiali

Am spus că orice cardinal va fi ordinal. Prin urmare, definim cardinalii ca find o clasă anume de ordinali.

Definiție

Un ordinal se numește **inițial** dacă nu este echipotent cu un ordinal mai mic ca el.

Ca exemple, putem da orice număr natural, dar și pe ω. Ordinalul ω^+ nu este inițial, dat fiind că este echipotent cu ω. În general, pentru orice ordinal infinit α, avem $\omega \subseteq \alpha$ și, deci, putem defini bijecția $f : \alpha^+ \to \alpha$, pentru orice $\beta \in \alpha^+$, prin

$$f(\beta) := \begin{cases} \beta^+, & \text{dacă } \beta \text{ este finit,} \\ \beta, & \text{dacă } \omega \leq \beta < \alpha, \\ 0, & \text{dacă } \beta = \alpha, \end{cases}$$

și ca urmare α^+ nu este inițial. Mai menționăm faptul imediat că doi ordinali inițiali diferiți nu pot fi echipotenți.

Mulțimi bine-ordonabile

Definiție

O mulțime se numește bine-ordonabilă dacă există o relație de bună ordine pe ea.

Teoremă

Pentru orice mulțime bine-ordonabilă există și este unic un ordinal inițial echipotent cu ea.

Demonstrație

Unicitatea este imediată. Pentru existență, fie X mulțimea și fie $<$ o relație de bună ordine pe ea. Am arătat că există un ordinal α astfel încât $(X, <)$ este izomorfă cu $(\alpha, \in_\alpha)$. În particular, X este echipotentă cu α. Ca urmare, există un cel mai mic ordinal echipotent cu X, iar acesta trebuie neapărat să fie inițial.

Mai mult, remarcăm că orice mulțime echipotentă cu un ordinal trebuie să fie bine-ordonabilă.

Cardinali

Pentru mulțimile bine-ordonabile, le putem defini, deci, cardinalul ca fiind acel ordinal inițial corespunzător. Vom vedea mai târziu că toate mulțimile sunt bine-ordonabile, deci această definiție este suficientă: cardinalii sunt, prin urmare, exact ordinalii inițiali. Deocamdată, însă, să observăm că, în această ipoteză, presupunerile pe care le-am făcut rezultă imediat din definiție. Le reamintim aici:

- pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice X, avem că dacă $X \sim n$, $|X| = n$;
- pentru orice X, dacă $X \sim \mathbb{N}$, $|X| = \mathbb{N}$;
- pentru orice X, $X \sim |X|$;
- pentru orice cardinal κ, $|\kappa| = \kappa$;
- pentru orice X și Y, avem $X \sim Y$ dacă și numai dacă $|X| = |Y|$.

Observăm și că pentru orice ordinal α, $|\alpha| \leq \alpha$.

Ordonarea cardinalilor

Mai mult, avem că (pseudo!) relația de ordine definită pe cardinali atunci când nu le cunoșteam natura coincide cu cea indusă de cea pe ordinali. O consecință va fi faptul promis că ordonarea cardinalilor este totală.

Mai exact, dacă κ și λ sunt cardinali astfel încât $\kappa \leq \lambda$ drept ordinali, atunci $\kappa \subseteq \lambda$ și deci $\kappa \leq \lambda$ drept cardinali.

Presupunem acum că avem $\kappa \leq \lambda$ drept cardinali și $\kappa \not\leq \lambda$ drept ordinali. Atunci $\lambda < \kappa$, și deci $\lambda \leq \kappa$ drept ordinali, iar din paragraful anterior avem $\lambda \leq \kappa$ drept cardinali, deci $\lambda = \kappa$, contradicție cu $\kappa \neq \lambda$.

Am văzut că ordinalii finiți, și deci și cardinalii finiți, sunt exact numerele naturale. În continuare vom vedea cum arată cardinalii infiniți.

Ordinali Hartogs

Propoziție-Definiție

Pentru orice mulțime A există un ordinal α cu proprietatea că nu este echipotent cu nicio submulțime a lui A. Prin urmare, există un ordinal minim cu această proprietate, ce este evident inițial. Îl numim **ordinalul Hartogs** al lui A și îl notăm cu $h(A)$. Așadar, $h(A)$ este cel mai mic ordinal α cu proprietatea că nu există injecție de la el la A.

Demonstrație

Clar, pentru orice $B \subseteq A$ și orice relație de bună ordine R pe B, avem $R \subseteq B \times B \subseteq A \times A$ și $B = \bigcup\bigcup R$. Notăm cu C mulțimea tuturor acelor $R \in \mathcal{P}(A \times A)$ cu proprietatea că există $B \subseteq A$ astfel încât R este relație de bună ordine pe B. Atunci pentru orice $R \in C$ există și este unic un ordinal α astfel încât el este izomorf ca mulțime bine ordonată cu $(\bigcup\bigcup R, R)$.

Ordinali Hartogs

Demonstrație (cont.)

Folosind Axioma înlocuirii, formăm H ca fiind mulțimea tuturor acelor ordinali, iar dintr-o propoziție anterioară, avem că există $\alpha \notin H$. Demonstrăm acum că α este cel căutat. Presupunem că el ar fi echipotent cu o submulțime a lui A, deci că există $B \subseteq A$ și $f : B \to \alpha$ o bijecție. Atunci pot construi o relație de bună ordine pe B punând pentru orice $x, y \in B$, $x < y$ dacă și numai dacă $f(x) \in f(y)$. Rezultă că $(B, <)$ este izomorf cu $(\alpha, \in_\alpha)$ și deci $\alpha \in H$, contradicție cu modul cum a fost ales α.

Alef-uri

Acel indice 0 din $\aleph_0$ sugerează că el este parte dintr-un șir mai lung. Vom defini acum acel șir, în mod recursiv, punând pentru orice ordinal α,

$$\aleph_{\alpha^+} := h(\aleph_\alpha)$$

și pentru orice ordinal limită α (din nou, aici apelăm la Axioma înlocuirii),

$$\aleph_\alpha := \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}.$$

Conform definiției ordinalului Hartogs, avem că pentru orice ordinal α, $|\aleph_\alpha| < |\aleph_{\alpha^+}|$. Așadar, pentru orice ordinali α, β cu $\alpha < \beta$, avem $|\aleph_\alpha| < |\aleph_\beta|$.

Orice alef este cardinal infinit

Propoziție

- Pentru orice ordinal α, $\aleph_\alpha$ este ordinal inițial infinit.
- Pentru orice ordinal α, $\alpha \leq \aleph_\alpha$.

Demonstrație

- Vom demonstra prin inducție după α. Singurul caz netrivial este atunci când α este ordinal limită. Presupunem că $\aleph_\alpha$ nu e inițial, deci există $\gamma < \aleph_\alpha$ cu $|\aleph_\alpha| = |\gamma|$. Din definiția supremumului, există $\beta < \alpha$ cu $\gamma < \aleph_\beta$, deci $|\aleph_\alpha| = |\gamma| \leq |\aleph_\beta|$, contradicție cu $|\aleph_\beta| < |\aleph_\alpha|$.
- Exercițiu.

Așadar, pentru orice ordinal α, avem $|\aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$.

Orice cardinal infinit este alef

Propoziție

Pentru orice ordinal γ și orice $\beta < \aleph_\gamma$ ordinal inițial infinit, există $\alpha < \gamma$ cu $\beta = \aleph_\alpha$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după γ. Pentru $\gamma = 0$, enunțul este trivial (dar aici folosim faptul că β este infinit!).

Presupunem acum că există δ cu $\gamma = \delta^+$. Atunci $\beta < \aleph_\gamma = \aleph_{\delta^+} = h(\aleph_\delta)$, deci $|\beta| \leq |\aleph_\delta|$, i.e. $\beta \leq \aleph_\delta$. Dacă $\beta < \aleph_\delta$, din ipoteza de inducție există $\alpha < \delta < \gamma$ cu $\beta = \aleph_\alpha$. Dacă $\beta = \aleph_\delta$, atunci luăm $\alpha := \delta$.

Presupunem acum că γ este limită. Avem $\beta < \aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\delta \mid \delta < \gamma\}$, deci există $\delta < \gamma$ cu $\beta < \aleph_\delta$, deci din ipoteza de inducție există $\alpha < \delta < \gamma$ cu $\beta = \aleph_\alpha$.

Orice cardinal infinit este alef

Corolar

Pentru orice ordinal inițial infinit β, există un ordinal α cu $\beta = \aleph_\alpha$.

Demonstrație

Notăm $\gamma := \beta^+$. Atunci $\beta \leq \aleph_\beta < \aleph_{\beta^+} = \aleph_\gamma$ și putem aplica, deci, propoziția anterioară.

Dat fiind că orice cardinal este ori finit, ori infinit, am demonstrat, așadar, că orice cardinal este ori un număr natural, ori un alef.