

Logică matematică

CURS 9

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2024/2025

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$. Definim mulțimea **consecințelor sintactice** ale lui Γ ca fiind cea mai mică submulțime A a lui $E(Q)$ ce verifică următoarele proprietăți (definiția are sens, v. „mulțimi Moore”):

- $\Gamma \subseteq A$;
- pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E(Q)$, avem:
 - (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \in A$;
 - (A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \in A$;
 - (A3) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \in A$;
- (MP) pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$ cu $\varphi \in A$ și $\varphi \rightarrow \psi \in A$, avem $\psi \in A$.

Această mulțime tocmai definită se notează cu $Thm(\Gamma)$. Pentru orice $\varphi \in E(Q)$, spunem că din Γ **se deduce sintactic** φ și scriem $\Gamma \vdash \varphi$ dacă $\varphi \in Thm(\Gamma)$.

Prescurtările (A1)-(A3), (MP) semnifică *Axioma 1-3*, respectiv *Modus (Ponendo-)Ponens*.

Definim mulțimea **teoremelor formale** ca fiind cea mai mică submulțime A a lui $E(Q)$ ce verifică următoarele proprietăți (din nou, definiția are sens):

- pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E(Q)$, avem:
 - (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \in A$;
 - (A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \in A$;
 - (A3) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \in A$;
- (MP) pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$ cu $\varphi \in A$ și $\varphi \rightarrow \psi \in A$, avem $\psi \in A$.

Această mulțime tocmai definită se notează cu Thm . Observăm că $Thm = Thm(\emptyset)$. Pentru orice $\varphi \in E(Q)$, notăm faptul că φ este teoremă formală (i.e. că $\varphi \in Thm = Thm(\emptyset)$, deci $\emptyset \vdash \varphi$) prin $\vdash \varphi$.

Acest mod de a defini deducția sintactică se numește **îndeobște sistem deductiv Hilbert**.

Inducție pe deducția sintactică

Precum în cazurile anterioare, modul de definire a mulțimii consecințelor sintactice conduce imediat la un principiu de inducție.

Principiul inducției pe deducția sintactică

Fie $\Gamma, B \subseteq E(Q)$ astfel încât:

- $\Gamma \subseteq B$;
- pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E(Q)$, avem:
 - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \in B$;
 - $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \in B$;
 - $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \in B$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$ cu $\varphi \in B$ și $\varphi \rightarrow \psi \in B$, avem $\psi \in B$.

Atunci $Thm(\Gamma) \subseteq B$.

Nu avem, însă, nimic analog proprietății de citire unică, ca urmare nu vom avea niciun principiu de recursie corespunzător.

Corolar

Fie $\Gamma, \Delta \subseteq E(Q)$ cu $\Gamma \subseteq \Delta$. Atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, i.e. pentru orice $\varphi \in E(Q)$ cu $\Gamma \vdash \varphi$, avem $\Delta \vdash \varphi$.

Demonstrație

Se observă că $Thm(\Delta)$ satisface condițiile impuse pentru mulțimea B din enunțul Principiului inducției pe deducția sintactică.

Corolar

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$. Atunci $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, i.e. pentru orice $\varphi \in E(Q)$ cu $\vdash \varphi$, avem $\Gamma \vdash \varphi$.

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziție

Pentru orice $\varphi \in E(Q)$, avem $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi \mapsto \varphi$, $\psi \mapsto \varphi \rightarrow \varphi$, $\chi \mapsto \varphi$)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi \mapsto \varphi$, $\psi \mapsto \varphi \rightarrow \varphi$)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi \mapsto \varphi$, $\psi \mapsto \varphi$)
- (5) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
(MP): (3), (4)

Teorema deducției (sintactice)

Teorema deducției (sintactice)

Pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi, \psi \in E(Q)$, avem că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Demonstrație

Demonstrăm întâi „ $\Rightarrow$ ”. Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi, \psi \in E(Q)$.

Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Atunci avem $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Cum $\varphi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$, avem $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, deci obținem, aplicând (MP), că $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Pentru „ $\Leftarrow$ ”, fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ și notăm

$\Sigma := \{\psi \in E(Q) \mid \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi\}$. Ceea ce trebuie să demonstrăm este că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O vom face prin inducție pe deducția sintactică.

Teorema deducției (sintactice)

Demonstrație (cont.)

Fie $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. Distingem două subcazuri. Dacă $\psi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \psi$. Din (A1), avem $\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, iar aplicând (MP) obținem $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, deci $\psi \in \Sigma$. Dacă $\psi = \varphi$, atunci, din propoziția anterioară, avem $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, deci, din nou, $\psi \in \Sigma$.

Cazurile corespunzătoare axiomelor se tratează exact ca subcazul „ $\psi \in \Gamma$ ” de mai sus.

Rămâne cazul când avem $\psi \in \Sigma$ și $\psi \rightarrow \chi \in \Sigma$, deci avem $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, respectiv $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$, și vrem $\chi \in \Sigma$. Din (A2), avem

$$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)),$$

iar aplicând (MP) de două ori, obținem $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$, i.e. $\chi \in \Sigma$.

Propoziție

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E(Q)$,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)).$$

Demonstrație

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)
- (5) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (MP): (3), (4).

Aplicând apoi Teorema deducției de trei ori, obținem:

- (6) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$
- (7) $\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$
- (8) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)).$

Propoziție

Pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi, \psi, \chi \in E(Q)$ cu $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$, avem $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$.

Demonstrație

Avem:

- | | | |
|-----|---|------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | Ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | Prop. precedentă |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ | Ipoteză |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | (MP): (3), (4). |

Propoziție

Pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$, avem $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstrație

Avem:

- | | | |
|-----|---|-------------------|
| (1) | $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$ | Ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ | Teorema deducției |
| (3) | $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ | (A3) |
| (4) | $\Gamma \vdash \varphi$ | (MP): (2), (3). |

Propoziție

Fie $\varphi, \psi \in E(Q)$. Atunci avem:

- $\vdash \psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \varphi))$;
- $\vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$;
- $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$.

Demonstrație

Exercițiu.

Propoziție

Pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi, \psi \in E(Q)$ cu $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ și $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$, avem $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstrație

(1)	$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$	Ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$	Ipoteză
(4)	$\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției
(5)	$\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$	Prop. precedentă
(6)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	(MP): (2), (5)
(7)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$	P. ant.: (4), (6)
(8)	$\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$	Prop. precedentă
(9)	$\Gamma \vdash \varphi$	(MP): (7), (8).

Teorema de corectitudine

Apare acum problema firească de a determina legătura dintre semnele $\vdash$ și $\models$, adică dintre deducția sintactică și deducția semantică. Un prim răspuns este dat de următorul rezultat.

Teorema de corectitudine

Pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Gamma \vdash \varphi$, avem $\Gamma \models \varphi$.

Demonstrație

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și notăm $\Sigma := \{\varphi \in E(Q) \mid \Gamma \models \varphi\}$. Vom demonstra că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ prin inducție pe deducția sintactică.

Dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci, clar, pentru orice $e \in 2^Q$ cu $e \models \Gamma$, avem că $e \models \varphi$, deci $\Gamma \models \varphi$, i.e. $\varphi \in \Sigma$.

Cazurile corespunzătoare axiomelor rămân ca exercițiu.

Demonstrație (cont.)

Rămâne cazul când avem $\psi \in \Sigma$ și $\psi \rightarrow \chi \in \Sigma$, deci avem $\Gamma \models \psi$, respectiv $\Gamma \models \psi \rightarrow \chi$, și vrem $\chi \in \Sigma$, i.e. $\Gamma \models \chi$. Fie $e \in 2^Q$ cu $e \models \Gamma$. Atunci $e \models \psi$, deci $e^+(\psi) = 1$, și $e \models \psi \rightarrow \chi$, deci

$$1 = e^+(\psi \rightarrow \chi) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 1 \rightarrow e^+(\chi).$$

Rezultă că $e^+(\chi) = 1$, i.e. $e \models \chi$, ceea ce trebuia demonstrat.

Corolar

Pentru orice $\varphi \in E(Q)$ cu $\vdash \varphi$, avem $\models \varphi$.

Mulțimi consistente

Spunem că $\Gamma \subseteq E(Q)$ este **consistentă** dacă $\Gamma \not\vdash \perp$, și **inconsistentă** dacă $\Gamma \vdash \perp$.

Observăm că $\{\perp\} \vdash \perp$, deci $\{\perp\}$ este inconsistentă și că $\perp \in E(Q)$, deci $E(Q) \vdash \perp$ și, prin urmare, $E(Q)$ este inconsistentă.

Presupunem că am avea $\vdash \perp$. Atunci Teorema de corectitudine ne spune că $\models \perp$. Luând $e \in 2^Q$ oarecare, obținem $e \models \perp$, contradicție. Așadar, $\emptyset \not\vdash \perp$ și deci $\emptyset$ este consistentă.

Teorema de corectitudine – versiunea 2

Orice mulțime satisfiabilă este consistentă.

Demonstrație

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ satisfiabilă. Atunci $\Gamma \not\models \perp$, deci $\Gamma \not\vdash \perp$, i.e. Γ este consistentă.

Pentru orice $v \in Q$ și $e : Q \rightarrow 2$, vom defini

$$v^e := \begin{cases} v, & \text{dacă } e(v) = 1, \\ \neg v, & \text{dacă } e(v) = 0, \end{cases}$$

și, clar, $e^+(v^e) = 1$. În plus, pentru orice $W \subseteq Q$ și $e : Q \rightarrow 2$, notăm $W^e := \{v^e \mid v \in W\}$.

O propoziție ajutătoare

Rezultatul care urmează arată o primă legătură în sens opus, de la $\models$ la $\vdash$.

Propoziție

Fie $e : Q \rightarrow 2$ și $\varphi \in E(Q)$. Atunci:

- dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$;
- dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție pe formule.

Fie $v \in Q$ și demonstrăm pentru $\varphi := v$. Atunci $\text{Var}(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$. Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci $\{v^e\} \vdash v$. Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci $\{v^e\} \vdash \neg v$.

O propoziție ajutătoare

Demonstrație (cont.)

Demonstrăm acum pentru $\varphi := \perp$. Cum $e^+(\varphi) = 0$ și $Var(\varphi) = \emptyset$, trebuie să arătăm că $\vdash \perp \rightarrow \perp$, lucru pe care îl știm.

Fie acum ψ, χ formule pentru care este adevărată concluzia. Vom demonstra că este adevărată și pentru $\varphi := \psi \rightarrow \chi$. Avem $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și $Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Din ipoteza de inducție pentru ψ și $Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$, avem $Var(\varphi)^e \vdash \psi$. Similar, avem $Var(\varphi)^e \vdash \neg\chi$. Dar dintr-o propoziție anterioară, avem $\vdash \psi \rightarrow (\neg\chi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \chi))$. Aplicând (MP) de două ori, obținem $Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$, i.e. $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$, ceea ce trebuia demonstrat.

Demonstrație (cont.)

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$ sau $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem, din ipoteza de inducție pentru ψ , $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$. Dintr-o propoziție anterioară, avem $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$, deci, aplicând (MP), avem $Var(\psi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$, deci $Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$.

În al doilea caz, obținem, din ipoteza de inducție pentru χ , $Var(\chi)^e \vdash \chi$. Din (A1), avem $\vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$, deci, aplicând (MP), avem $Var(\chi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$, deci $Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$.

Teorema de completitudine

Teorema de completitudine (slabă)

Pentru orice $\varphi \in E(Q)$ cu $\models \varphi$, avem $\vdash \varphi$.

Demonstrație

Fie φ o tautologie. Din propoziția precedentă, avem că există $W \subseteq Q$ **finită** (am luat $W := \text{Var}(\varphi)$) astfel încât, pentru orice $e \in 2^Q$, avem $W^e \vdash \varphi$ (*). Luăm W de cardinal **minim** cu proprietatea (*) și vom arăta $W = \emptyset$, de unde va rezulta concluzia.

Presupunem că $W \neq \emptyset$ și, deci, există U și x cu $W = U \cup \{x\}$ și $x \notin U$. Vom arăta că U satisface proprietatea (*), ceea ce va contrazice minimalitatea lui W .

Demonstrație (cont.)

Fie $e \in 2^Q$. Trebuie să arătăm că $U^e \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $f : Q \rightarrow 2$, definită, pentru orice $v \neq x$, prin $f(v) := e(v)$, iar $f(x) := \neg e(x)$. Rezultă că, pentru orice $v \in U$, $v^f = v^e$ și

$$x^f = \begin{cases} \neg x, & \text{dacă } x^e = x, \\ x, & \text{dacă } x^e = \neg x. \end{cases}$$

Aplicând proprietatea (*) a lui W , pe rând, pentru e și f , obținem $U^e \cup \{x\} \vdash \varphi$ și $U^e \cup \{\neg x\} \vdash \varphi$. Aplicăm acum o propoziție anterioară pentru a concluziona că $U^e \vdash \varphi$.

Acest argument se datorează lui Kalmár (1935).

Teorema de completitudine medie

Teorema de completitudine medie

Pentru orice $\Delta \subseteq E(Q)$ **finită** și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Delta \models \varphi$, avem $\Delta \vdash \varphi$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după cardinalul lui Δ . Cazul $|\Delta| = 0$, i.e. $\Delta = \emptyset$, este exact Teorema de completitudine slabă.

Presupunem acum că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|\Delta| = n^+$. Atunci există $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\psi \in E(Q)$ cu $|\Gamma| = n$ și $\Delta = \Gamma \cup \{\psi\}$. Cum $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$, avem $\Gamma \models \psi \rightarrow \varphi$. Din ipoteza de inducție, avem $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Aplicând Teorema deducției, obținem $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$, i.e. $\Delta \vdash \varphi$.

Teorema de completitudine extinsă (tare)

Teorema de completitudine tare

Pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Gamma \models \varphi$, avem $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstrație

Din Teorema de compacitate, există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi$. Din Teorema de completitudine medie, avem $\Delta \vdash \varphi$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.

Teorema de completitudine tare – versiunea 2

Orice mulțime consistentă este satisfiabilă.

Demonstrație

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ consistentă. Atunci $\Gamma \not\vdash \perp$, deci, din Teorema de completitudine tare, $\Gamma \models \perp$. Ca urmare, Γ este satisfiabilă.

A se observa (din nou) că numai în Teorema de completitudine tare s-a folosit Axioma alegerii (în forma mai slabă a Teoremei de existență a ultrafiltrului, via apelul la Teorema de compacitate).

În unele cărți, prin Teorema de completitudine se înțelege enunțul cumulat al Teoremei de corectitudine și al Teoremei de completitudine tare.

Teorema de completitudine – sumar

- Pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$, avem

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi.$$

- O mulțime este consistentă dacă și numai dacă este satisfiabilă.