FMI, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2023/2024
Logică matematică

Exerciţii de seminar

1 Teoria mulţimilor

1.1 Primele cinci axiome ZFC

1. Să se dea exemple de x şi y, astfel încât să se întâmple, pe rând:

   (a) $x \in y$ şi $x \subseteq y$;
   (b) $x \in y$ şi $x \not\subseteq y$;
   (c) $x \notin y$ şi $x \subseteq y$;
   (d) $x \notin y$ şi $x \not\subseteq y$.

   Soluţie:

   (a) Luăm $x := \emptyset$, $y := \{\emptyset\}$.
   (b) Luăm $x := \{\emptyset\}$, $y := \{\{\emptyset\}\}$.
   (c) Luăm $x := \emptyset$, $y := \emptyset$.
   (d) Luăm $x := \{\emptyset\}$, $y := \emptyset$.

   $\square$

2. Reamintim din curs că, pentru orice F şi z,

$$z \in \bigcup F \Leftrightarrow \text{există } x \text{ cu } x \in F \text{ şi } z \in x$$

   şi că, pentru orice F nevidă,

$$\bigcap F = \left\{ z \in \bigcup F \mid \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x \right\}.$$

   Arătaţi că definiţia de mai sus pentru intersecţii arbitrare este corectă. Mai exact, arătaţi că pentru orice F nevidă, avem că pentru orice z,

$$z \in \bigcap F \Leftrightarrow \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x.$$

   Unde se foloseşte în demonstraţie faptul că F este nevidă?

   Soluţie: Fie F şi z ca în enunţ.

   „$\Rightarrow$" Evident.

   „$\Leftarrow$" Presupunem că z este astfel încât pentru orice x cu $x \in F$, avem $z \in x$ şi vrem să arătăm că $z \in \bigcap F$.

   Rămâne de arătat doar că $z \in \bigcup F$. Fiindcă F este nevidă, există $x \in F$. Avem deci $z \in x$. De aici deducem $z \in \bigcup F$. $\square$

3. Definim, pentru orice x, y, $\langle x, y\rangle := \{x, \{y\}\}$. Arătaţi că aceasta nu este o definiţie adecvată a perechii ordonate.

   Soluţie: Vrem să găsim exemple de x, y, u, v astfel încât $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$, dar nu este adevărat că $x = u$ şi $y = v$, adică $x \neq u$ sau $y \neq v$.

   Ideea este următoarea. Ne uităm la egalitatea $\{x, \{y\}\} = \{u, \{v\}\}$ şi căutăm să o satisfacem „invers", adică via $x = \{v\}$ şi $u = \{y\}$. Prin urmare, u şi x sunt atunci determinate de y şi v, şi deci este suficient să găsim y şi v cu $y \neq v$. Dar noi ştim două mulţimi diferite, de pildă $\emptyset$ şi $\{\emptyset\}$.

   Raţionăm acum riguros. Alegem $x := \{\{\emptyset\}\}$, $y := \emptyset$, $u := \{\emptyset\}$, $v := \{\emptyset\}$. Se observă că $y \neq v$ (şi, mai mult, deşi nu mai este nevoie, $x \neq u$). Atunci

   $$\langle x, y\rangle = \{x, \{y\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\},$$

   iar

   $$\langle u, v\rangle = \{u, \{v\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\},$$

   deci $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. $\square$

4. Arătaţi (folosind doar primele cinci axiome ZFC din curs) că nu există mulţimea tuturor mulţimilor singleton.

   Soluţie: Presupunem că ar exista şi o notăm cu S.

   Notăm $V := \bigcup S$. Atunci, pentru orice x, avem $x \in \{x\}$ şi $\{x\} \in S$, deci $x \in \bigcup S = V$. Ca urmare, V este mulţimea tuturor mulţimilor. Contradicţie! $\square$

1.2 Relaţii binare

1. Fie R o relaţie binară. Să se arate că:

   (a) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
   - există A şi B astfel încât R este grafic între A şi B;
   - pentru orice x, y, z cu (x, y), $(x, z) \in R$, avem $y = z$.

   (b) Dacă A, B, C, D sunt astfel încât R este grafic atât între A şi B, cât şi între C şi D, atunci $A = C$.

   Soluţie:

   (a) „$\Rightarrow$" Evident.

   „$\Leftarrow$" Cum R este relaţie binară, există C, B astfel încât R este relaţie între C şi B. Notăm:

   $$A := \{a \in C \mid \text{există } b \in B \text{ cu } (a, b) \in R\}.$$

   Fie $p \in R$. Atunci există $a \in C$ şi $b \in B$ cu $(a, b) = p \in R$. Deci $a \in A$ şi deci $p \in A \times B$. Prin urmare, $R \subseteq A \times B$, deci R este relaţie între A şi B.

   Demonstrăm acum că R este chiar grafic între A şi B. Fie acum $a \in A$. Atunci, din definiţia lui A, există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$. Mai trebuie să arătăm că este unic. Dacă avem $z \in B$ cu $(a, z) \in R$, atunci, folosind condiţia din ipoteză, $b = z$.

   (b) Fie $a \in A$. Cum R este grafic între A şi B, există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$. Cum $R \subseteq C \times D$, există $c \in C$ şi $d \in D$ cu $(a, b) = (c, d)$. Rezultă $a = c \in C$. Am demonstrat că $A \subseteq C$.

   Analog se arată $C \subseteq A$, deci avem $A = C$.

   $\square$

2. Fie A o mulţime. Să se arate că:

(a) Dacă $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A şi dacă definim $<\subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a \leq b$ şi $a \neq b$, atunci $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A.

(b) Dacă $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A şi dacă definim $\leq\subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a < b$ sau $a = b$, atunci $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A.

Soluţie: Fie x, y, $z \in A$.

(a) Dacă avem $x < x$, atunci $x \neq x$, o contradicţie. Deci $<$ este ireflexivă.
Presupunem $x < y$ şi $y < z$. Atunci $x \leq z$. Dacă am avea $x = z$, atunci am avea $x \leq y \leq x$, deci $x = y$, contradicţie. Deci $x < z$. Am arătat că $<$ este tranzitivă.
Prin urmare, $<$ este o relaţie de ordine strictă.

(b) Cum $x = x$, avem $x \leq x$. Deci $\leq$ este reflexivă.
Presupunem prin absurd că $x \leq y$ şi $y \leq x$, dar $x \neq y$. Atunci $x < y$ şi $y < x$, contradicţie cu faptul că $<$ este asimetrică. Deci $\leq$ este antisimetrică.
Presupunem $x \leq y$ şi $y \leq z$. Dacă $x = y$, atunci clar $x \leq z$. Analog pentru $y = z$. Rămâne cazul când $x < y$ şi $y < z$, iar atunci $x < z$, deci $x \leq z$. Am arătat că $\leq$ este tranzitivă.
Prin urmare, $\leq$ este o relaţie de ordine parţială.

□

1.3 Numere naturale în ZFC

1. Arătaţi că:

(a) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ori $n = 0$, ori există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$.

(b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $m \in n$, $m \in \mathbb{N}$.

(c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Soluţie:

(a) Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 0$, enunţul este trivial.
Fie n. Vrem acum să arătăm că dacă există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$, atunci există $p \in \mathbb{N}$ cu $n^+ = p^+$. E suficient să luăm $p := n$.
(Deşi inducţia este trivială, am scris acest enunţ în mod explicit, fiindcă va fi folosit în exerciţiul următor.)

(b) Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 0$, enunţul este trivial.
Presupunem adevărat că pentru orice $m \in n$, $m \in \mathbb{N}$ şi arătăm că pentru orice $m \in n^+$, $m \in \mathbb{N}$.
Fie $m \in n^+ = n \cup \{n\}$. Atunci $m \in n$, deci $m \in \mathbb{N}$ din ipoteza de inducţie, sau $m = n \in \mathbb{N}$.

(c) Incluziunea „$\supseteq$" este imediată. Pentru incluziunea „$\subseteq$", luăm $m \in n$, iar din punctul anterior ştim că $m \in \mathbb{N}$. Cum $m < n$ este doar o reformulare a lui $m \in n$, rezultă că m aparţine mulţimii din dreapta.

□

2. Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ nevidă, care admite majorant. Arătaţi că A admite maxim.

Soluţie: Fie $B := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ majorant pentru } A\}$. Cum $B \neq \emptyset$, există minimul lui B (deci supremumul lui A), pe care îl notăm cu n. E suficient să arătăm că $n \in A$.

Presupunem că $n \notin A$. Atunci pentru orice $l \in A$, $l < n$. Cum $A \neq \emptyset$, rezultă $n \neq 0$, deci (din primul punct al exerciţiului anterior) există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$, şi deci $m < n$. Avem că pentru orice $l \in A$, $l < m^+$, deci $l \leq m$. Prin urmare, m este majorant pentru A, contradicţie cu faptul că n este cel mai mic majorant. □

1.4 Generalităţi despre cardinalitate

1. Fie X, Y cu $X \neq \emptyset$ şi $f : X \to Y$ injectivă. Să se arate că există $g : Y \to X$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

   Soluţie: Cum $X \neq \emptyset$, există $a \in X$. Definim $g : Y \to X$, pentru orice $y \in Y$, astfel: dacă există $x \in X$ (necesar unic) cu $f(x) = y$, punem $g(y) := x$, altfel punem $g(y) := a$.

   Fie $x \in X$. Notând $y := f(x)$, avem $g(y) = x$, deci $g(f(x)) = x$. Am demonstrat că $g \circ f = \mathrm{id}_X$. $\square$

2. Arătaţi că o submulţime A a unei mulţimi finite B este finită.

   Soluţie: Demonstrăm prin inducţie după numărul de elemente n al lui B.

   Dacă $n = 0$, $B = \emptyset$ şi deci $A = \emptyset$ şi are şi ea 0 elemente.

   Presupunem adevărat pentru un n şi demonstrăm pentru n^+. Presupunem, deci, că B are n^+ elemente, deci există o bijecţie $f : n^+ \to B$. Notăm $C := B \setminus \{f(n)\}$. Atunci C are n elemente şi distingem două cazuri.

   Dacă $f(n) \notin A$, atunci $A \subseteq C$ şi este deci finită din ipoteza de inducţie.

   Dacă $f(n) \in A$, atunci notând $D := A \setminus \{f(n)\} = A \cap C$ avem că $D \subseteq C$, deci este finită din ipoteza de inducţie şi, aşadar, există m astfel încât D are m elemente. Rezultă că $A = D \cup \{f(n)\}$ are m^+ elemente şi este, deci, finită. $\square$

3. Dacă f este un şir $\mathbb{N}$-valuat infinit, spunem că f este **finalmente constant** dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $f_{k+m} = f_k$. Arătaţi că mulţimea C a şirurilor finalmente constante este numărabilă.

4. Arătaţi că mulţimea $\mathcal{O}$ a tuturor mulţimilor deschise ale lui $\mathbb{R}$ (în topologia canonică) are cardinalul $\mathfrak{c}$.

1.5 Ordinali

1. Fie α un ordinal. Arătaţi că $\alpha \notin \alpha$.

   Soluţie: Dacă am avea $\alpha \in \alpha$, atunci am avea $\alpha \in_\alpha \alpha$ şi s-ar contrazice ireflexivitatea lui $\in_\alpha$. $\square$

2. Fie α un ordinal. Arătaţi că α^+ este ordinal.

   Soluţie: Reamintim că $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.

   Demonstrăm că α^+ este tranzitivă. Fie x, y cu $x \in \alpha^+$ şi $y \in x$. Vrem $y \in \alpha^+$. Vom arăta chiar $y \in \alpha$. Cum $x \in \alpha^+$, avem $x \in \alpha$ sau $x = \alpha$. Dacă $x \in \alpha$, avem $y \in \alpha$ fiindcă α este tranzitivă. Dacă $x = \alpha$, cum $y \in x$, avem $y \in \alpha$.

   Demonstrăm că $\in_{\alpha^+}$ este ireflexivă. Fie $x \in \alpha^+$ şi vrem $x \notin x$. Dacă $x \in \alpha$, atunci nu putem avea $x \in x$ din faptul că $\in_\alpha$ este ireflexivă. Dacă $x = \alpha$, atunci aplicăm exerciţiul precedent.

   Demonstrăm că $\in_{\alpha^+}$ este tranzitivă. Fie x, y, $z \in \alpha^+$ cu $x \in y$ şi $y \in z$. Vrem $x \in z$. Dacă $z \in \alpha$, atunci, din tranzitivitatea lui α, rezultă, pe rând, $y \in \alpha$ şi $x \in \alpha$. Cum $\in_\alpha$ este tranzitivă, rezultă $x \in z$. Dacă $z = \alpha$, atunci avem $x \in y$ şi $y \in \alpha$, iar cum α este tranzitivă, avem $x \in \alpha = z$.

   Demonstrăm acum că $\in_{\alpha^+}$ este o bună ordine. Fie o mulţime nevidă $A \subseteq \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$. Notăm $B := A \cap \alpha$. Dacă B este nevidă, există un minim al ei relativ la $\in$. Cum $B \subseteq \alpha$, acel minim aparţine lui α, deci este mai mic şi decât α. Prin urmare, el este minimul lui A în ansamblu. Dacă B este vidă, atunci avem $A = \{\alpha\}$, care îl are pe α ca minim. $\square$

3. Fie α un ordinal şi $\beta \in \alpha$. Arătaţi că β este ordinal.

   Soluţie: Demonstrăm că β este tranzitivă. Fie u, v cu $u \in v$ şi $v \in \beta$. Vrem $u \in \beta$. Cum

α este tranzitivă şi $\beta \in \alpha$, avem $v \in \alpha$, iar apoi $u \in \alpha$. Deci u, v, $\beta \in \alpha$, iar concluzia rezultă din tranzitivitatea lui $\in_\alpha$.

Cum $\beta \in \alpha$ şi α este tranzitivă, avem $\beta \subseteq \alpha$, deci $\in_\beta$ este restricţia la β (i.e. intersecţia cu $\beta \times \beta$) a lui $\in_\alpha$ şi este şi ea o relaţie de bună ordine. $\square$

4. Fie α şi β ordinali astfel încât $\alpha \subsetneq \beta$. Arătaţi că $\alpha \in \beta$.

Soluţie: Cum $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, există un minim al său, pe care îl notăm cu γ. Vom arăta $\gamma = \alpha$, de unde va rezulta $\alpha \in \beta$.

Pentru implicaţia „$\subseteq$”, presupunem că există $\delta \in \gamma$ cu $\delta \notin \alpha$. Atunci, cum β este tranzitivă, avem $\delta \in \beta$, deci avem $\delta \in \beta \setminus \alpha$, ceea ce contrazice minimalitatea lui γ.

Pentru implicaţia „$\supseteq$”, presupunem că există $\delta \in \alpha$ cu $\delta \notin \gamma$. Cum δ, $\gamma \in \beta$, folosind faptul că $\in_\beta$ este o relaţie de bună ordine (strictă), avem că $\gamma \in \delta$ sau $\gamma = \delta$. Din tranzitivitatea lui α, rezultă $\gamma \in \alpha$, contrazicând faptul că $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. $\square$

1.6 Axioma alegerii

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$. Există două moduri de a exprima faptul că f este continuă în a:

   - pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x-a| < \delta$, avem $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$;
   - pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce are ca limită pe a, avem că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$.

   Folosind Axioma alegerii, arătaţi că ele sunt echivalente.

   Observaţie: Se ştie că echivalenţa nu rezultă fără Axioma alegerii, dar şi că este strict mai slabă decât ea.

   Soluţie: Pentru „$\Rightarrow$”, fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir cu limita a. Vrem să arătăm că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x - a| < \delta$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la a, avem că există N astfel încât pentru orice $n \geq N$, $|x_n - a| < \delta$. Aşadar, pentru orice $n \geq N$, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Am arătat că $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$.

   Pentru „$\Leftarrow$”, presupunem prin absurd că există un $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există x cu $|x - a| < \delta$ şi $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Deci pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \frac{1}{n+1} \text{ şi } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

   Ca urmare, putem aplica Axioma alegerii pentru familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi obţinem un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X_n$, i.e. $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ şi $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Aşadar, limita lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este a, dar $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge la $f(a)$. Contradicţie! $\square$

2. Fie X, Y mulţimi şi $g : Y \to X$ surjectivă. Să se arate, folosind Axioma alegerii, că există $f : X \to Y$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

   Soluţie: Cum g este surjectivă, avem că pentru orice $x \in X$, $g^*(\{x\})$ este nevidă, deci, aplicând Axioma alegerii pentru familia $(g^*(\{x\}))_{x\in X}$, obţinem că există o familie $a = (a_x)_{x\in X}$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $a_x \in g^*(\{x\})$, deci $a_x \in Y$ şi $g(a_x) = x$.

   Definim $f : X \to Y$, punând, pentru orice $x \in X$, $f(x) := a_x$. (Altfel spus, $f = (X, Y, a)$.) Atunci, pentru orice $x \in X$, avem $g(f(x)) = g(a_x) = x$. Prin urmare, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. $\square$

3. Demonstraţi că faptul că „pentru orice X, Y mulţimi şi $g : Y \to X$ surjectivă, avem că există $f : X \to Y$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$” implică Axioma alegerii.

   Soluţie: Fie $(D_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi nevide, disjuncte două câte două. Vrem să arătăm că există $(d_i)_{i\in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $d_i \in D_i$.

Notăm

$$C := \bigcup_{i \in I} D_i.$$

Fie $g : C \to I$, definită punând, pentru orice $x \in C$, $g(x)$ ca fiind acel unic i cu $x \in D_i$. Cum g este surjectivă, există $f : I \to C$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_I$.

Pentru orice $i \in I$, punem $d_i := f(i)$ şi atunci, cum $g(d_i) = g(f(i)) = i$, avem că $d_i \in D_i$. Aşadar, familia $(d_i)_{i \in I}$ este cea căutată. $\square$

4. Demonstraţi că faptul că „pentru orice X, Y mulţimi, există o injecţie de la X la Y sau există o injecţie de la Y la X" implică Axioma alegerii. **Indiciu:** Folosiţi ordinalul Hartogs.

   Soluţie: Fie A o mulţime. Atunci, fie există o injecţie de la $h(A)$ la A, fie există o injecţie de la A la $h(A)$. Primul caz contrazice definiţia ordinalului Hartogs. Avem aşadar că există o injecţie $g : A \to h(A)$. Cum $(h(A), \in_{h(A)})$ este bine-ordonată, există o bună ordine pe imaginea lui g, imagine care este echipotentă cu A, deci există o bună ordine pe A.

   Am arătat că orice mulţime este bine-ordonabilă, iar la curs am demonstrat că aceasta implică Axioma alegerii. $\square$

1.7 Ierarhia von Neumann

1. Arătaţi că:
   (a) Pentru orice ordinal α şi orice $x \in V_\alpha$, $x \notin x$.
   (b) Pentru orice ordinal α, avem că $V_\alpha \in V_{\alpha^+} \setminus V_\alpha$. Prin urmare, $\mathrm{rg}(V_\alpha) = \alpha$.
   (c) Pentru orice ordinal α şi orice $\beta < \alpha$, $V_\beta \subsetneq V_\alpha$.

2. Arătaţi că:
   (a) Pentru orice ordinal α, avem că $\alpha \in V_{\alpha^+}$.
   (b) Pentru orice ordinal α, avem că $\alpha \notin V_\alpha$. Prin urmare, $\mathrm{rg}(\alpha) = \alpha$.

1.8 Ultrafiltre

1. Fie I o mulţime nevidă şi A, B două submulţimi diferite ale sale. Arătaţi că există un ultrafiltru pe I care conţine exact una dintre submulţimi.

2. Fie I o mulţime nevidă, F un filtru pe I şi $X \subseteq I$ cu $X \notin F$. Arătaţi că există un ultrafiltru pe I care include pe F şi nu conţine pe X (omite pe X).

2 Logica propoziţională

2.1 Formule

1. Fie φ, ψ, $\chi \in E(Q)$. Arătaţi că avem:

   (a) $\psi \models \varphi \to \psi$;

   (b) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.

2. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

   (a) $v_0 \to v_2$;

   (b) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

3. Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă φ este tautologie.

4. Confirmaţi sau infirmaţi:

   (a) pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ şi $\models \psi$;

   (b) pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

2.2 Mulţimi de formule

1. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Aflaţi mulţimea modelelor pentru fiecare dintre mulţimile de formule:

   (a) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

   (b) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

2. Fie $f : Q \to 2$. Găsiţi $\Gamma \subseteq E(Q)$ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{f\}$.

3. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

4. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Găsiţi o mulţime (infinită) de formule cu proprietatea că nu există o mulţime finită de formule care să aibă exact aceleaşi modele.