FMI, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2024/2025
Logică matematică

Exerciţii de seminar

1 Teoria mulţimilor

1.1 Primele cinci axiome ZFC

1. Să se dea exemple de x şi y, astfel încât să se întâmple, pe rând:
   (a) $x \in y$ şi $x \subseteq y$;
   (b) $x \in y$ şi $x \not\subseteq y$;
   (c) $x \notin y$ şi $x \subseteq y$;
   (d) $x \notin y$ şi $x \not\subseteq y$.

2. Reamintim din curs că, pentru orice F şi z,
$$z \in \bigcup F \Leftrightarrow \text{există } x \text{ cu } x \in F \text{ şi } z \in x$$
   şi că, pentru orice F nevidă,
$$\bigcap F = \left\{ z \in \bigcup F \mid \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x \right\}.$$
   Arătaţi că definiţia de mai sus pentru intersecţii arbitrare este corectă. Mai exact, arătaţi că pentru orice F nevidă, avem că pentru orice z,
$$z \in \bigcap F \Leftrightarrow \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x.$$
   Unde se foloseşte în demonstraţie faptul că F este nevidă?

3. Definim, pentru orice x, y, $\langle x, y \rangle := \{x, \{y\}\}$. Arătaţi că aceasta nu este o definiţie adecvată a perechii ordonate.

4. Arătaţi (folosind doar primele cinci axiome ZFC din curs) că nu există mulţimea tuturor mulţimilor singleton.

1.2 Relaţii binare

1. Fie R o relaţie binară. Să se arate că:
   (a) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
      - există A şi B astfel încât R este grafic între A şi B;
      - pentru orice x, y, z cu (x, y), $(x, z) \in R$, avem $y = z$.
   (b) Dacă A, B, C, D sunt astfel încât R este grafic atât între A şi B, cât şi între C şi D, atunci $A = C$.

2. Fie A o mulţime. Să se arate că:

(a) Dacă $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A şi dacă definim $<\subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a \leq b$ şi $a \neq b$, atunci $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A.

(b) Dacă $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A şi dacă definim $\leq\subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a < b$ sau $a = b$, atunci $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A.

1.3 Numere naturale în ZFC

1. Arătaţi că:

   (a) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ori $n = 0$, ori există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$.

   (b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $m \in n$, $m \in \mathbb{N}$.

   (c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

2. Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ nevidă, care admite majorant. Arătaţi că A admite maxim.