Procese secvențiale.

Vom adăuga la BSP(A) un nou operator binar.

$x \cdot y$ = după ce x se termină cu succes, se rulează y.
(x deadlock $\Rightarrow$ $x \cdot y$ deadlock)

TSP → Theory of Sequential Processes.

$\Sigma_{TSP,A} = \Sigma_{BSP,A}$ + op. binar.

$E_{TSP,A} = E_{BSP,A}$ + următoarele axiome:

$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

$(a \cdot x) \cdot y = a \cdot (x \cdot y)$

$0 \cdot x = 0$

$x \cdot 1 = x$

$1 \cdot x = x$

$TSP(A) := (\Sigma_{TSP,A}, E_{TSP,A})$.

Prop (de eliminare) $\forall p \in T_{\Sigma_{TSP,A}}$ $\exists q \in T_{\Sigma_{BSP,A}}$

cu $TSP(A) \vdash p = q$.

C5/2

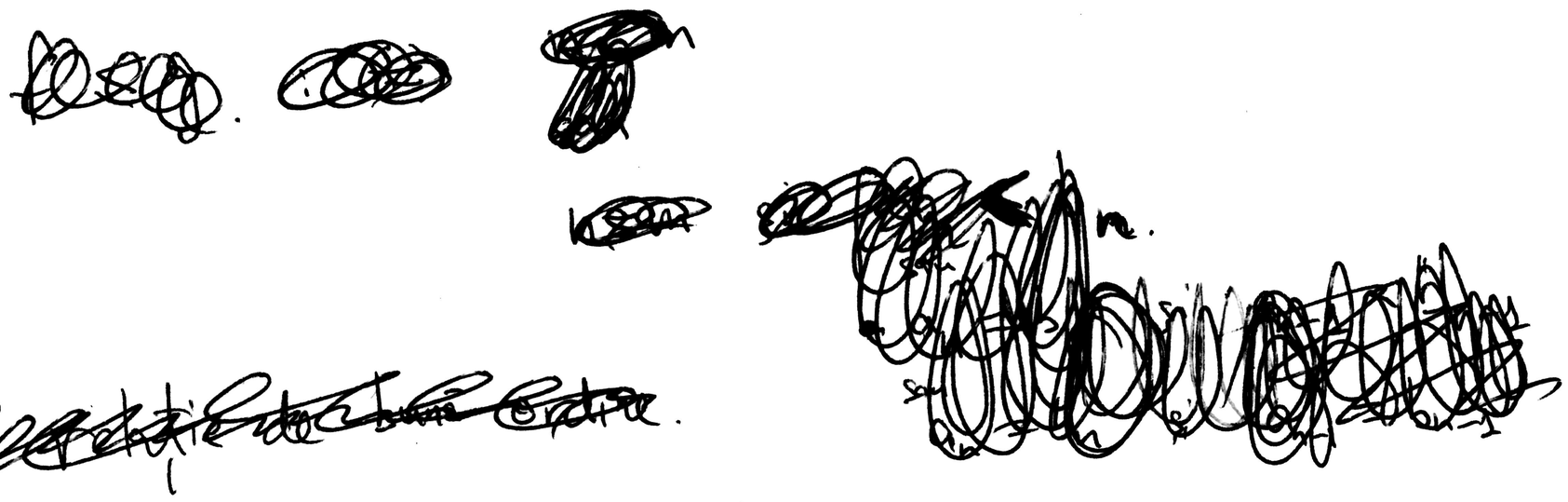
dem

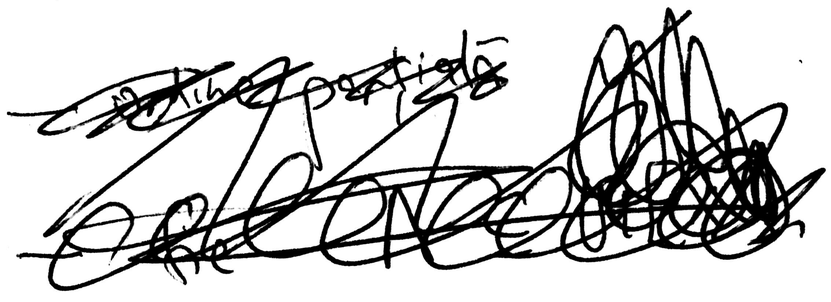
$\forall f, g \in \mathbb{N}[X]$

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$$

$a_n \neq 0$ $\qquad$ $b_m \neq 0$.

$n = \deg(f)$ $\qquad$ $m = \deg(g)$.





$f < g \iff$ $n < m$

sau

$n = m$ și $\exists i \in [0, n]$ cu $a_i < b_i$

și $\forall j \in [i+1, n]$ $a_j = b_j$.

$<$ relație de bună ordine strictă.

— ordine strictă ✓

— bună ordine → fie $A \subseteq \mathbb{N}[X]$ $A \neq \emptyset$.

luăm $B \subseteq A$ cele de grad minim,

fie el n.

$B_n \subseteq B$ cele cu coef lui X^n minim.

$B_{n-1} \subseteq B_n$ —u— X^{n-1} —u—

$\vdots$

singleton
u
$\{\min A\}$. ← $B_n \subseteq B_1$ cele cu termenul liber minim.

C5/2.5

Th $(A, \leq)$ – m.b.o.

$m: X \to A$.

$P \subseteq X$.

(*) P_p $\forall p \in X$ cu $[\forall r \in X$ cu $m(r) < m(p)$ am $r \in P] \Rightarrow p \in P$.

Atunci $P = X$.

dem. P_p $P \neq X \Rightarrow$ $Y := X \setminus P \neq \emptyset$.

$Z := \{m(y) \mid y \in Y\}$

Am $Z \subseteq A$ si $Z \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \exists\, n := \min Z$. Fie $p \in Y$ cu $m(p) = n$.

Fie $r \in X$ cu $m(r) < m(p)$.

Vrem $r \in P$

P_p $r \notin P \Rightarrow r \in X \setminus P \Rightarrow m(r) \in Z \Rightarrow n \leq m(r) \Rightarrow m(p) \leq n(r)$ *Abs.*

Deci $r \in P$.

Din (*) am $p \in P$. *Abs* cu $p \in Y = X \setminus P$.

C5/3

Definesc $m: T_{\Sigma_{TSP,A}} \to \mathbb{N}[X]$ recursiv, prin:

$$m(0) = 1$$
$$m(1) = 1$$
$$m(x+y) = m(x) + m(y) + 1$$
$$m(a.x) = m(x) + 1.$$
$$m(x \cdot y) = X^{\underbrace{lungime(x)}_{l(x)}} + m(x) + m(y) + 1.$$

Obs 1) $x \in T_{\Sigma_{BSP,A}} \Rightarrow m(x) = l(x) \in \mathbb{N}$.

2) $p, q, r \in \mathbb{N}[X]$ $p < q \Rightarrow p + r < q + r$.

$(p := 0 \Rightarrow q \neq 0 \Rightarrow r < q + r)$.

Dem prop prin inducție după m

i.e. $\forall r \in T_{\Sigma_{BSP,A}}$ cu $m(r) < m(p)$

$\exists s \in T_{\Sigma_{BSP,A}}$ cu

$TSP(A) \vdash r = s$

și dem $\exists q \in T_{\Sigma_{BSP,A}}$ cu $BSP(A) \vdash p = q$.

Disting cazuri după forma lui p.

$p = 0 \to q = 0$

$p = 1 \to q = 1$.

$p = x + y$ $m(x), m(y) < m(p) \Rightarrow x_1, y_1$.

$q = x_1 + y_1$.

$p = a.x$ $m(x) < m(p) \Rightarrow x_1$

$q = a.x_1$

C5/4

$p = 0 \cdot x \rightarrow q = 0.$

$p = 1 \cdot x$ $\quad m(p) = X + m(1) + m(x) + 1 = X + m(x) + 2$

$\Rightarrow m(x) < m(p) \rightarrow x_1.$

$q = x_1.$ $\quad (p = 1 \cdot x = x = x_1)$

$p = (x+y) \cdot z.$ $\quad m(p) = X^{l(x)+l(y)+1} + m(x) + m(y) + 1 + m(z) + 1.$

$m(x \cdot z) = X^{l(x)} + m(x) + m(z) + 1 < m(p)$

$\rightsquigarrow x_1$

$m(y \cdot z) < m(p) \rightsquigarrow y_1.$

$q = x_1 + y_1.$

$p = (a \cdot x) \cdot y.$ $\quad m(p) = X^{l(x)+1} + m(x) + 1 + m(y) + 1.$

$m(xy) = X^{l(x)} + m(x) + m(y) + 1 < m(p)$

$\rightsquigarrow x_1.$

$q = a \cdot x_1.$

$p = (x \cdot y) \cdot z$ $\quad m(p) = X^{l(x)+l(y)+1} + m(x \cdot y) + m(z) + 1$

$= X^{l(x)+l(y)+1} + X^{l(x)} + m(x) + m(y) + m(z) + 2.$

$m(y \cdot z) = X^{l(y)} + m(y) + m(z) + 1 < m(p)$

$\rightsquigarrow x_1$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot x_1.$

$m(x \cdot x_1) = X^{l(x)} + m(x) + m(x_1)$

$= X^{l(x)} + m(x) + l(x_1) < m(p)$

$\rightsquigarrow y_1$

$q = y_1.$

C5/5

În continuare, vom construi (ca pt celelalte teorii) un model pentru TSP(A).

Fie [illegible] sistemul de deducție ce extinde pe cel de la BSP(A) cu regulile:

$$\left(\{x\downarrow, y\downarrow\},\ (x\cdot y)\downarrow\right)$$

$$\left(\{x \xrightarrow{a} x'\},\ x\cdot y \xrightarrow{a} x'\cdot y\right)$$

$$\left(\{x\downarrow,\ y \xrightarrow{a} y'\},\ x\cdot y \xrightarrow{a} y'\right).$$

e un format cale $\Rightarrow$ "$\leftrightarrow$" este congruență pe $T_{\Sigma_{BSP,A}}$.

$$M_{BSP,A} := T_{\Sigma_{BSP,A}} / \leftrightarrow \quad \text{[illegible]}.$$

Prop $M_{BSP,A} \models BSP(A)$

Th $\forall p, q \in T_{\Sigma_{BSP,A}}$ $\quad p \leftrightarrow q \iff TSP(A) \vdash p = q$.

(TSP + PR)(A)

La TSP(A) adaug acei operatori $(\pi_n)_{new}$ de la (BSP+PA)(A) fără să adaug axiome noi

Obțin teoria (TSP + PR)(A)

Prop $\forall\ p \in T_{\Sigma_{BSP+PR,A}}$ $\quad \exists\ q \in T_{\Sigma_{BSP,A}}$ cu $(TSP+PR)(A) \vdash p = q$.

C5/6

Iteratie : [illegible]

Pot forma teoria $TSP^*(A)$ prin analogie cu $BSP^*(A)$ dar se poate forma o teorie chiar mai puternică:

$\Sigma_{TSP+IT,A} := \Sigma_{TSP,A}$ + un operator unar $(-)^*$.
($x^* = x$ exec de un nr nat de ori).

$E_{TSP+IT,A} := E_{TSP,A}$ + axiomele:

$x^* = x \cdot x^* + 1$.

$(x+1)^* = x^*$

$(x+y)^* = x^* \cdot (y \cdot (x+y)^* + 1)$.

[illegible] $(TSP+IT)(A) := (\Sigma_{TSP+IT,A} \oplus E_{TSP+IT,A})$.

ex În $(TSP+IT)(A)$ se pot deduce

- $0^* = 1$

$0^* = 0 \cdot 0^* + 1 = 0 + 1 = 1$

- $1^* = 1$

$1^* = (0+1)^* = 0^* = 1$.

Sistem de deducție: cel de la $TSP(A)$ +

[illegible] $(\emptyset, x^* \downarrow)$

$(\{x \xrightarrow{a} x'\}, x^* \xrightarrow{a} x' \cdot x^*)$

C5/7

Recursie.

$TSP_{rec}(A)$, $(\overline{TSP} + PR)_{rec}(A)$.

→ se construiește prin analogie cu $BSP_{rec}(A)$

(inclusiv modelul canonic)

Th În $M_{(TSP+PR)_{rec},A}$ sunt valide

RDP, RDP^-, RSP, AIP^-

dar nu AIP.

În continuare vom redefini stiva în $TSP_{rec}(A)$.

La fel → D = mulțime finită = tipul de date al elem din stivă.

Reamintim definirea anterioară a stivei:

$$S_\lambda = 1 + \sum_{d \in D} push(d) . S_d.$$

$$\forall d \in D, w \in D^* \quad S_{dw} = pop(d) . S_w + \sum_{e \in D} push(e) . S_{edw}.$$

Noua definiție va fi:

$$T = 1 + \sum_{d \in D} ((push(d) . T) \cdot (pop(d) . T))$$

Definim $T_\lambda := T$

și $\forall d \in D, w \in D^* \quad T_{dw} := T \cdot (pop(d) . T_w)$

C5/8

Vom arăta că $(T_w)_{w\in D^*}$ verifică ecuațiile vechii stive, i.e. că:

(i) $T_\lambda = 1 + \sum_{d\in D} push(d).T_d.$

(ii) $\forall d\in D, w\in D^* \quad T_{dw} = pop(d).T_w + \sum_{e\in D} push(e).T_{edw}$

și atunci va rezulta în $(TSP_{rec} + RSP)(A)$ că $S_\lambda = T_\lambda = T$.

(i) $T_\lambda = T = 1 + \sum_{d\in D} (push(d).T)(pop(d).T)$

$= 1 + \sum_{d\in D} push(d).(T\cdot pop(d).T)$

$= 1 + \sum_{d\in D} push(d)\cdot(T\cdot pop(d)\cdot T_\lambda)$

$= 1 + \sum_{d\in D} push(d)\cdot T_d.$

(ii) Fie $d\in D$, $w\in D^*$.

$T_{dw} = T\cdot(pop(d).T_w)$

$= \left(1 + \sum_{e\in D}(push(e).T)(pop(e).T)\right)\cdot pop(d).T_w.$

$= 1\cdot pop(d).T_w + \sum_{e\in D}\left((push(e).T)(pop(e).T)\right)\cdot pop(d).T_w.$

$= pop(d).T_w + \sum_{e\in D}(push(e).T)\,(pop(e).T\cdot pop(d)\cdot T_w)$

$= pop(d)\cdot T_w + \sum_{e\in D}(push(e).T)\cdot pop(e).(T\cdot pop(d).T_w)$

$= pop(d).T_w + \sum_{e\in D}(push(e).T)\cdot pop(e).T_{dw}.$

$= pop(d).T_w + \sum_{e\in D} push(e).(T\cdot pop(e).T_{dw})$

$= pop(d)\cdot T_w + \sum_{e\in D} push(e).T_{edw}.$

C5/9

Încapsulare → teoria (BSP+DH)(A)

Pt orice $H \subseteq A$ → operator unar ∂_H.

$\partial_H x$ → blochează acțiunile din H în execuția lui x.

s.n. **operator de încapsulare** (vedem cursul viitor de ce).

Axiome: $\partial_H(1) = 1$

$\partial_H(0) = 0$

$\forall a \in H \quad \partial_H(a.x) = 0$

$\forall a \in A \setminus H \quad \partial_H(a.x) = a.\partial_H(x)$.

$\partial_H(x+y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$

Reguli de deducție: $(\{x\downarrow\}, \partial_H(x)\downarrow)$

$\forall a \in A \setminus H \quad (\{x \xrightarrow{a} x'\}, \partial_H(x) \xrightarrow{a} \partial_H(x'))$.

ex $a, b, c \in A$ distincte 2 câte 2

$H = \{c\}$.

$$\partial_H(a.(b.1 + c.1)) = a.\partial_H(b.1 + c.1)$$
$$= a.(\partial_H(b.1) + \partial_H(c.1))$$
$$= a(b.\partial_H(1) + 0)$$
$$= a.b.1.$$

$$\partial_H(a.b.1 + a.c.1) = \partial_H(a.b.1) + \partial_H(a.c.1)$$
$$= a.\partial_H(b.1) + a.\partial_H(c.1)$$
$$= ab1 + a.0.$$

C5/10

Skip → teoria (BSP + EI)(A).

$\forall I \subseteq A$ → operator unar ε_I

$\varepsilon_I x$ → save peste ("skips") actiunile din I.

Sn operator skip.

Axiome
$\varepsilon_I(1) = 1$
$\varepsilon_I(0) = 0$
$\forall a \in I \quad \varepsilon_I(a.x) = \varepsilon_I(x).$
$\forall a \in A \setminus I \quad \varepsilon_I(ax) = a.\varepsilon_I(x).$
$\varepsilon_I(x+y) = \varepsilon_I(x) + \varepsilon_I(y).$

Reguli de deductie
1) $(\{x\downarrow\}, \varepsilon_I(x)\downarrow)$
2) $\forall a \in A \setminus I \quad (\{x \xrightarrow{a} x'\}, \varepsilon_I(x) \xrightarrow{a} \varepsilon_I(x'))$
3) $\forall a \in I \quad (\{x \xrightarrow{a} x', \varepsilon_I(x)\downarrow\}, \varepsilon_I(x)\downarrow)$
4) $\forall a \in I, b \in A \quad (\{x \xrightarrow{a} x', \varepsilon_I(x) \xrightarrow{b} y\}, \varepsilon_I(x) \xrightarrow{b} y).$