Procese concurente

Motivatie

Vrem un operator $\|$

$x \| y$ = x rulat în paralel cu y.

e.g. $a.0 \| b.0$ → avem ori întâi a
ori întâi b
ori a, b simultan.

Operațional, pt primele 2 cazuri avem reguli ca:

$$\frac{x \xrightarrow{a} x'}{x \| y \xrightarrow{a} x' \| y} \qquad \frac{y \xrightarrow{a} y'}{x \| y \xrightarrow{a} x \| y'}$$

→ $A^\perp = A \cup \{\perp\}$ (unde $\perp \notin A$).

Pt al 3-lea caz vom fixa o funcție $\gamma : A^\perp \times A^\perp \to A^\perp$

a.î.: (i) γ e comutativă, i.e. $\forall a, b \in A^\perp \ \gamma(a,b) = \gamma(b,a)$

(ii) γ e asociativă, i.e. $\forall a, b, c \in A^\perp$ avem $\gamma(\gamma(a,b), c) = \gamma(a, \gamma(b,c))$.

(iii) $\forall a \in A^\perp \ \gamma(\perp, a) = \perp$.

sn <u>funcție de comunicare</u>.

Operațional, avem

$$\frac{x \xrightarrow{a} x' \quad y \xrightarrow{b} y' \quad \gamma(a,b) = c \in A}{x \| y \xrightarrow{c} x' \| y'}.$$

Datorită comut+asoc, putem scrie $\gamma(a_1, \dots, a_n)$.

<u>def</u> $\gamma : A^\perp \times A^\perp \to A^\perp$ fr de comunicare sn <u>hand-shaking</u> dacă $\forall a, b, c \in A \ \ \gamma(a,b,c) = \perp$.

Firește, mai avem și

$$\frac{x\downarrow \quad y\downarrow}{}$$

PC/2

ex de funcție de comunicare handshaking

P, D mulțimi (de „porturi", resp. de „date")

$\gamma : P \times D \times \{?, !, ?!\} \to A$ injectivă.

Semnificația: $\forall\, p \in P \quad d \in D$

$p!d := \gamma(p, d, !)$ → procesul trimite d prin p.

$p?d := \gamma(p, d, ?)$ → procesul primește d prin p

$p?!d := \gamma(p, d, ?!)$ → d e comunicat prin P.

$\gamma : A^1 \times A^1 \to A^1$ („funcția de comunicare standard peste P și D")

$$\gamma(x, y) = \begin{cases} p?!d & \text{dacă } \exists\, p\,(\text{char } !)\ p, d \text{ a?} \\ 1 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$x = p?d$ și $y = p!d$
SAU
$x = p!d$ și $y = p?d$

BCP(A, γ)

Fixăm, deci, o fct de comunicare γ. Vom extinde [redacted] (BSP+DH)(A).

$x \between y$ = x rulat în paralel cu y, primul pas de la x.

$x \mid y$ = ——"—— , primul pas de la x și y simultan.

$\Rightarrow \quad x \parallel y = x \between y + y \between x + x \mid y$.

Rămâne să axiomatizăm $\between$ și $\mid$.

- $(a.x) \between y = a.(x \parallel y)$

  $(x+y) \between z = x \between z + y \between z$

  $0 \between x = 0$

  $1 \between x = 0$

- $(x+y) \mid z = x \mid z + y \mid z$

  $x \mid y = y \mid x$

  $0 \mid x = 0$.

  $(a.x) \mid 1 = 0$

  $1 \mid 1 = 1$

PC 13

Axiome suplimentare

$x \| 1 = x$

$(x \| y) \| z = x \| (y \| z)$

$(x \mid y) \mid z = x \mid (y \mid z)$

$(x \between y) \between z = x \between (y \| z)$

$(x \mid y) \between z = x \mid (y \between z)$

$(1 \mid x) + 1 = 1$

Exemplu → ştafetă

$A = \{run1, run2, give, take, pass\}$

$\gamma(give, take) = \gamma(take, give) = pass$ (altfel este $\perp$)

Not. $P_1 = run1 . give . 1$

$P_2 = take . run2 . 1$

În $BCP(A, \gamma)$, avem.

$P_1 \| P_2 = P_2 \between P_2 + P_2 \between P_1 + P_1 \mid P_2$

$= run1 . (give . 1 \| P_2) + take . (run2 . 1 \| P_1) + 0$

$= run1 . (give . 1 \between P_2 + P_2 \between give . 1 + give . 1 \mid P_2)$

$+ take . (run2 . 1 \between P_2 + P_1 \between run2 . 1 + run2 . 1 \mid P_1)$

$= run1 . (give . (1 \| P_2) + take . (run2 . 1 \| give . 1) + pass . (1 \| run2 . 1))$

$+ take . (run2 . (1 \| P_1) + run1 . (give . 1 \| run2 . 1) + 0)$

$= run1 . (give . take . run2 . 1 + pass . run2 . 1 + take . (run2 . give . 1 + give . run2 . 1))$

$+ take . (run2 . run1 . give . 1 + run1 . (give . run2 . 1 + run2 . give . 1))$

Cum implementăm comunicarea?

Răspuns: Cu operatorul de încapsulare ∂_H.

PC/4

$$\partial_H(P_1 \| P_2) = run1 \cdot pass \cdot run2 \cdot 1.$$

Not $I \subset \mathbb{N}$ finită

$j \in \mathbb{N} \setminus I$

$$\|_{i\in\emptyset} t_i = 1 \qquad \|_{i\in I\cup\{j\}} t_i = \left(\|_{i\in I} t_i\right) \| t_j.$$

$$|_{i\in\{j\}} t_i = t_j \qquad |_{i\in I\cup\{j\}} t_i = \left(|_{i\in I} t_i\right) | t_j. \leftarrow I \text{ nevidă}$$

Th de expansiune $I \subset \mathbb{N}$ finită nevidă.

$(t_i)_{i\in I} \subseteq T_{\Sigma_{BCP(A,\gamma)}}$.

$$\Rightarrow BCP(A,\gamma) \vdash \|_{i\in I} t_i = \left(\sum_{\substack{J\subset I\\ J\neq\emptyset}} \left[\left(|_{j\in J} t_j\right) \between \left(\|_{i\in I\setminus J} t_i\right)\right]\right) + |_{i\in I} t_i$$

Free-merge.

Dacă γ e a.î. $\forall x,y \in A^+ \quad \gamma(x,y) = 1$. (not: $\gamma \equiv 1$)

adăugăm axioma $x \,|\, y + 1 = 1$.

$(BCP + FMA)(A,\gamma)$

↓

Tree Merge Axiom.

Aici th de expansiune devine (1 sunt doar singletoane)

$$\|_{i\in I} t_i = \left(\sum_{i\in I}\left[t_i \between \left(\|_{j\in I\setminus\{i\}} t_j\right)\right]\right) + |_{i\in I} t_i.$$

PC15

Handshaking

Dacă γ e handshaking.

adăugăm axioma $x|y|z + 1 = 1$.

$(BCP + HA)(A, \gamma)$

↓

Handshaking Axiom.

Teorema de inel (avem doar singletoane și doubletoane):

$$\Big|\Big|_{i\in I} t_i = \Big(\sum_{i\in I}\Big[t_i \between \Big(\Big|\Big|_{j\in I\setminus\{i\}} t_j\Big)\Big]\Big) + \Big(\sum_{\substack{i,j\in I\\ i\neq j}}\Big[(t_i|t_j) \between \Big(\Big|\Big|_{k\in I\setminus\{i,j\}} t_k\Big)\Big]\Big)$$

$$+ \Big|_{i\in I} t_i.$$

Recursie

$BCP_{rec}(A, \gamma)$ – prin analogie cu celelalte teorii recursive.

Exemple:

1) Buffer-e.

a) Buffer ce conține 1 bit.

$P = \{i, o\}$ $D = \{0, 1\}$ γ standard

$$B = 1 + (i?0).(o!0).B + (i?1).(o!1).B.$$

D arbitrar

$$B = 1 + \sum_{d\in D}(i?d).(o!d).B.$$

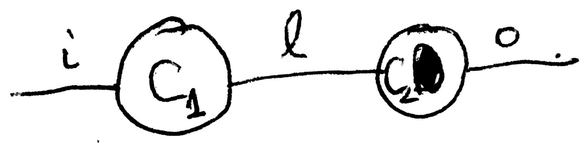
PC /6

b) Buffer de capacitate 2

$$B' = 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ B_d.$$

$$\forall d \in D \quad B_d = (o!d).\ B' + \sum_{e \in D} (i?e).\ (o!d).\ B_e.$$

c) 2 buffere de capacitate 1.



$$C_1 = 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ (l!d).\ C_1$$

$$C_2 = 1 + \sum_{d \in D} (l?d).\ (o!d).\ C_2.$$

$$H := \{ l?d,\ l!d \mid d \in D \},$$

$$\partial_H (C_1 \| C_2) \leftarrow \text{comunicare asigurată}$$

Scop: găsirea unei specificații gardate pt acest proces.

$$X := \partial_H (C_1 \| C_2)$$

$\forall d \in D$ pun $X_d := \partial_H (C_1 \| (o!d).\ C_2)$.

Atomi, raționând în $BCP(A, \gamma)$:

$$X = \partial_H (C_1 \| C_2) = \partial_H (C_1 \mathbin{\mathbb{L}} C_2) + \partial_H (C_2 \mathbin{\mathbb{L}} C_1) + \partial_H (C_1 \mid C_2)$$

$$= \partial_H \Big(\sum_{d \in D} (i?d).\ ((l!d).\ C_1 \| C_2) \Big) + 0 + 1$$

$$= 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ \partial_H ((l!d).\ C_1 \mathbin{\mathbb{L}} C_2 + C_2 \mathbin{\mathbb{L}} (l!d).\ C_1 + (l!d).\ C_2 \mid C_2)$$

$$= 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ (0 + 0 + (l?!d).\ \partial_H (C_1 \| (o!d).\ C_2))$$

$$\ldots \subset (i?d).\ (l?!d).\ X_d$$

PC/7

$\forall d \in D$

$$X_d = \partial_H(C_1 \| (o!d).C_2) + \partial_H((o!d).C_2 \| C_1) + \partial_H(C_1 | o!d.C_2)$$

$$= \sum_{e \in D} (i?e).\partial_H((\ell!e).C_1 \| (o!d).C_2) + (o!d).\partial_H(C_1 \| C_2) + 0$$

$$= \sum_{e \in D} (i?e).(0 + (o!d).\partial_H((\ell.e).C_1 \| C_2) + 0) + (o!d).X$$

$$= \sum_{e \in D} (i?e).(o!d).(0 + 0 + (\ell?!e).\partial_H(C_1 \| (o!e).C_2)) + (o!d).X.$$

$$= \sum_{e \in D} (i?e).(o!d).(\ell?!e).X_e + o!d.X.$$

Fie acum $I := \{\ell?!d \mid d \in D\}$.

$Y := \varepsilon_I(X)$ și $\forall d \in D$ $Y_d := \varepsilon_I(X_d)$.

Obs că $Y = 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\varepsilon_I(X_d) = 1 + \sum_{d \in D} (i?d).Y_d$

și $\forall d \in D$ $Y_d = o!d.\varepsilon_I(X) + \sum_{e \in D} (i?e).(o!d).\varepsilon_I(X_e)$

$= o!d.Y + \sum_{e \in D} (i?e).(o!d).Y_e.$

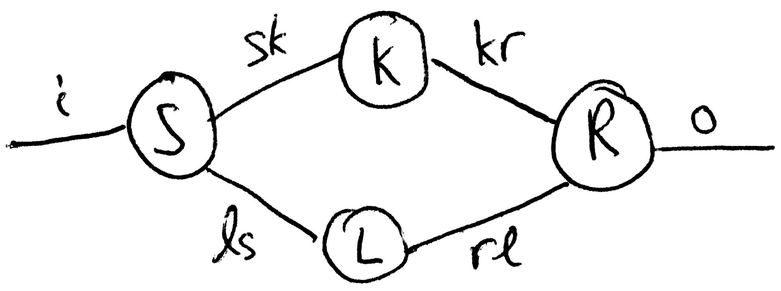
i.e. $Y, \{Y_d\}_{d \in D}$ satisfac ec. buffer-ului de capacitate 2

Noi nu vrem să dăm skip, ci doar să urlăm de $\ell?!d$-uri,

i.e. să le abstractizăm → v. capitolul următor.

PC / 8

2) Alternating Bit Protocol (ABP)



Scop: S (Sender) vrea să trimită informații lui R (Receiver).

→ o face prin canalul K (nesigur).

→ R va trimite acknowledgement prin canalul L (tot nesigur).

La final, abstractizând (din nou, nu știm cum! - v. exp. următor) K, L vom vrea ca sistemul să se comporte ca un buffer de capacitate 1, i.e. să respecte ecuația

$$B = 1 + \sum_{d \in D} (i?d).(o!d).B .$$

[Obs: Teoria $TCP(A, \gamma)$ se obține din $TSP(A)$ și $BCP(A, \gamma)$ adăugând axioma $x \between 0 = x \cdot 0$]

Soluție: $\vec{S}$ trimite $d \in D$ urmat de 0 continuu $(d0, d0, d0, \ldots)$.

K poate corupe datele (1) sau trimite nefiresc.

R trimite 0 înapoi prin L.

La fel, L poate corupe (1) sau trimite nefiresc.

Când S primește 0, o ia de la capăt cu 1 și următoarea dată.

$F = \{d0, d1 \mid d \in D\}$.

$\tilde{D} = F \cup \{0, 1, \bot\}$

$P = S \| K \| L \| R$ {sk, kr, ls, rl}.

PC/9

$t \in A \rightarrow$ decizia dacă se comp sau nu datele.

$$K = 1 + \sum_{x \in F} (sk?x).(t.kr!x.K + t.kr!\perp.K)$$

$$L = 1 + \sum_{n \in \{0,1\}} (rl?n).(t.ls!n.L + t.ls!1.L)$$

$$S = 1 + S0 \cdot S1 \cdot S$$

$\forall n \in \{0,1\}$ $\quad Sn = 1 + \sum_{d \in D} i?d.Sn_d$

$\forall n \in \{0,1\}, d \in D$ $\quad Sn_d = sk!dn.Tn_d$

—11— $\quad Tn_d = ls?(1-n).Sn_d + ls?1.Sn_d + ls?n.1$

$$R = 1 + R1 \cdot R0 \cdot R$$

$\forall n \in \{0,1\}$ $\quad Rn = 1 + kr?1.rl!n.Rn + \sum_{d \in D} kr?dn.rl!n.Rn$

$$+ \sum_{d \in D} kr?d(1-n).o!d.rl!(1-n).1$$

$$H := \{ p?x, p!x \mid x \in \widetilde{D}, p \in \{sk, kr, rl, ls\} \}.$$

$$ABP = \partial_H(S \parallel K \parallel L \parallel R)$$

Vom da o spec. recursivă pt ABP.

PC/10

Specificație: $X = 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ X1_d$

$\forall d \in D \quad X1_d = sk?!d0.\ (t.\ kr?!1.\ rl?!1.\ (t.\ ls?!1.\ X1_d + t.\ ls?!1.\ X1_d) + t.\ kr?!d0.\ o!d.\ X2_d)$

$\forall d \in D \quad X2_d = rl?!0.\ (t.\ ls?!1.\ sk?!d0.\ (t.\ kr?!1.\ X2_d + t.\ kr?!d0.\ X2_d) + t.\ ls?!0.\ Y)$

$Y = 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ Y1_d$

$\forall d \in D \quad Y1_d = [X1_d$ cu 0/1 schimbate$]$

$\forall d \in D \quad Y2_d = [X2_d$ cu 0/1 schimbate + $Y \mapsto X]$.

Soluții $X = \partial_H(S \| K \| L \| R)$

$\forall d \in D \quad X1_d = \partial_H(SO_d \cdot S1 \cdot S \| K \| L \| R)$

$\forall d \in D \quad X2_d = \partial_H(TO_d \cdot S1 \cdot S \| K \| L \| rl?!0 \cdot RO \cdot R)$

$Y = \partial_H(S1 \cdot S \| K \| L \| RO \cdot R)$

$\forall d \in D \quad Y1_d = \partial_H(S1_d \cdot S \| K \| L \| RO \cdot R)$

$\forall d \in D \quad Y2_d = \partial_H(T1_d \cdot S \| K \| L \| rl?!1 \cdot R)$

Verificare prima ecuație $\pi(TSP + HA)(A, Y)$.

$X = \partial_H(S \| K \| L \| R) = \partial_H((1 + (1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ SO_d) \cdot S1 \cdot S) \| K \| L \| R)$

$= 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ \partial_H(SO_d \cdot S_2 \cdot S \| K \| L \| R)$

$= 1 + \sum_{d \in D} (i?d).\ X1_d$