Procese abstracte

1) Paşi invizibili

$(S, L, \rightarrow, \downarrow)$ un LTS.

Considerăm $\tau \in L$ $\rightarrow$ „acţiunea invizibilă"

Atunci notăm:

a) $\xrightarrow{\tau} := \{ (x, y) \mid (x, \tau, y) \in \rightarrow \} \subseteq S \times S$.

b) $\twoheadrightarrow$:= închiderea rflx-tranz a lui $\xrightarrow{\tau}$

c) $s, t \in S$ $a \in L$.

$s \xrightarrow{(a)} t \iff s \xrightarrow{a} t$

SAU

$a = \tau$ şi $s = t$.

Deci, dacă $a \neq \tau$ $s \xrightarrow{(a)} t \iff s \xrightarrow{a} t$

iar $s \xrightarrow{(\tau)} t \iff s \xrightarrow{\tau} t$ SAU $s = t$.

def $R \subseteq S \times S$ se relaţie de bisimulare ramificată ("branching")

dacă:

(i) $\forall s, t, s' \in S$, $a \in L$ cu $(s, t) \in R$ şi $s \xrightarrow{a} s'$

$\exists\, t', t'' \in S$ cu $t \twoheadrightarrow t'$, $t' \xrightarrow{(a)} t''$,

$(s, t') \in R$, $(s', t'') \in R$.

(ii) $\forall s, t, t' \in S$, $a \in L$ cu $(s, t) \in R$ şi $t \xrightarrow{a} t'$

$\exists\, s', s'' \in S$ cu $s \twoheadrightarrow s'$, $s' \xrightarrow{(a)} s''$

$(s', t) \in R$, $(s'', t') \in R$

[illegible] $(s'', t') \in R$.

PA/2

$s, t \in S$

$s \underset{b}{\leftrightarrow} t \iff \exists R \subseteq S \times S$ rel de bisim ramificată cu $(s,t) \in R$.

s, t sunt <u>bisimilare ramificat ("branching")</u>.

<u>Prop</u> $\underset{b}{\leftrightarrow}$ e rel de echivalență.

~~def. $R \subseteq S \times S$ rel de bisimilare ramificată cu root~~

<u>def</u> $s, t \in S$

$s \underset{rb}{\leftrightarrow} t$ (s, t sunt bisimilare ramificat <u>rooted</u>)

dacă $\exists$ $R \subseteq S \times S$ rel de bisim ramificată cu $(s,t) \in R$

și (i) $\forall s' \in S$, $a \in L$ cu $s \xrightarrow{a} s'$

$\exists t' \in S$ cu $t \xrightarrow{a} t'$ și $(s', t') \in R$

(ii) $\forall t' \in S$, $a \in L$ cu $t \xrightarrow{a} t'$

$\exists s' \in S$ cu $s \xrightarrow{a} s'$ și $(s', t') \in R$.

(iii) $s\downarrow \Rightarrow t\downarrow$

(iv) $t\downarrow \Rightarrow s\downarrow$.

<u>Prop</u> $\underset{rb}{\leftrightarrow}$ e rel de echiv.

<u>Th</u> $\leftrightarrow \subseteq \underset{rb}{\leftrightarrow} \subseteq \underset{b}{\leftrightarrow}$.

PA/3

2) BSP cu pasi invizibili

$$A_\tau = A \cup \{\tau\}$$

$$BSP_\tau(A) = BSP(A_\tau)$$

$+$ axioma $(\forall a \in A_\tau)$

$$a.(\tau.(x+y) + x) = a.(x+y).$$

Ex de derivare în $BSP_\tau(A)$:

$$c.(\tau.(b.1 + a.1) + \tau.(a.1 + b.1))$$
$$= c.(\tau.(a.1 + b.1) + \tau(a.1 + b.1))$$
$$= c.\tau.(a.1 + b.1)$$
$$= c.(\tau.(0 + a.1 + b.1) + 0)$$
$$= c.(0 + a.1 + b.1)$$
$$= c.(a.1 + b.1).$$

ex 1) $a.\tau.x = a.x.$

$$a.\tau.x = a.(\tau.(0+x) + 0) = a.(0+x) = a.x.$$

2) $a.(\tau.b.1 + b.1) = a.\tau.(\tau.b.1 + \tau.\tau.b.1)$

$$LHS = a.(\tau.(b.1+0) + b.1) = a.(b.1+0) = a.b.1$$
$$RHS = a.\tau.(\tau.(\tau.b.1 + 0) + \tau.b.1)$$
$$= a.\tau.(\tau.b.1 + 0) = a.\tau.\tau.b.1 \overset{ex1}{=} a.\tau.b.1 \overset{ex1}{=} a.b.1$$

PA/4

$$M_{BSP_\tau(A)} := T_{\Sigma_{BSP_\tau, A}} / \underline{\leftrightarrow}_{rb} \models BSP_\tau(A)$$

$\underline{\leftrightarrow}_{rb}$ este congruență → ce e mai sus are sens.

3) Abstractizare

Teoria $(BSP_\tau + ABS)(A)$

Pentru orice $I \subseteq A$ se adaugă un operator unar τ_I

cu urm. axiome:

$$\tau_I(1) = 1$$
$$\tau_I(0) = 0$$
$$\forall a \in I \quad \tau_I(a.x) = \tau . \tau_I(x)$$
$$\forall a \in A_\tau \setminus I \quad \tau_I(a.x) = a . \tau_I(x)$$
$$\tau_I(x+y) = \tau_I(x) + \tau_I(y)$$

Regulile de deducție corespunzătoare sunt:

$$\frac{x\downarrow}{\tau_I(x)\downarrow} \qquad \forall a \in I \quad \frac{x \xrightarrow{a} x'}{\tau_I(x) \xrightarrow{\tau} \tau_I(x')} \qquad \forall a \in A_\tau \setminus I \quad \frac{x \xrightarrow{a} x'}{\tau_I(x) \xrightarrow{a} \tau_I(x')}$$

Atunci $\underset{-}{\leftrightarrow}_{rb}$ e o congruență pe $T_{\Sigma_{BSP_\tau + ABS}, A}$

iar $$M_{(BSP_\tau + ABS)(A)} := T_{\Sigma_{BSP_\tau + ABS}, A} \Big/ \underset{-}{\leftrightarrow}_{rb} \models (BSP_\tau + ABS)(A)$$

$\longrightarrow$ ex!

4) <u>Incapsulare</u>

∂_H.

Apare întrebarea: permitem $\tau \in H$?

Dacă am permite, atunci pe de o parte

$$\partial_{\{\tau\}}(a.\tau.1) = a.0$$

iar pe de alta

$$\partial_{\{\tau\}}(a.\tau.1) = \partial_{\{\tau\}}(a.1) = a.1$$

deci $a.0 = a.1$, comportament nedorit.

5) <u>Nedeterminism</u> (à la CSP).

$\sqcap$ = alegere internă

$\square$ = alegere externă

$\sqsubset$ = alege externă la stânga.

PA/6

Axiome.

$x \sqcap y = \tau.x + \tau.y.$

$x \sqcup y = x \sqsubset y + y \sqsubset x.$

$0 \sqsubset x = 0$

$1 \sqsubset x = 1.$

$x \sqsubset 0 = x.$

$(x \sqsubset y) \sqsubset z = x \sqsubset (y \sqsubset z)$

$\forall a \in A \quad (a.x) \sqsubset y = a.x$

$\tau.x \sqsubset y = \tau.(x \sqsubset y)$

$(x+y) \sqsubset z = x \sqsubset z + y \sqsubset z$

3) - continuare

ex. $\tau_{\{b,c\}}(a.b.0 + a.c.b.1)$

$= a.\tau.0 + a.\tau.\tau.1$

$= a.0 + a.1$

$\tau_{\{a\}}(b.a.0 + a.c.b.1)$

$= b.\tau.0 + \tau.c.b.1$

$= b.0 + \tau.c.b.1.$

PA/7

6) TCP cu pasi invizibili.

$TCP_\tau(A, \gamma)$ – toate axiomele cunoscute.

de la $TCP(A, \gamma)$, $(BSP_\tau + ABS)(A)$

$\downarrow$

∂_H cu $H \subseteq A$.

+ • $x \mathbin{\|\!\lfloor} (\tau . y) = x \mathbin{\|\!\lfloor} y$.

• $x \mid \tau . y = 0$.

ex $a . (\tau . 1 \| x) = a . x$.

$$
\begin{aligned}
& a . (\tau . 1 \| x) \\
= {} & a . (\tau . 1 \mathbin{\|\!\lfloor} x + x \mathbin{\|\!\lfloor} \tau . 1 + \tau . 1 \mid x) \\
= {} & a . (\tau . (1 \| x) + x \mathbin{\|\!\lfloor} 1 + 0) \\
= {} & a . (\tau . (x \mathbin{\|\!\lfloor} 1 + 1 \mathbin{\|\!\lfloor} x + x \mid 1) + x \mathbin{\|\!\lfloor} 1) \\
= {} & a . (x \mathbin{\|\!\lfloor} 1 + 1 \mathbin{\|\!\lfloor} x + x \mid 1) \\
= {} & a . (x \| 1) \\
= {} & a . x .
\end{aligned}
$$

PA/8

7) Recurse și specificații gardate

a) Considerăm specificația recursivă

$$X = \tau . X .$$

$\forall p \in T_\Sigma$ am că $\tau . p$ e soluție

pt că $\tau . p = \tau . \tau . p$.

$\Rightarrow$ nu avem unicitate

$\Rightarrow$ τ nu poate fi inclus în definiția gardării.

b) pt $I \subseteq A$ și $i \in I$

spec. $X = \tau_I (i . X)$

Fie $a \notin I$.

$\tau_I (i . \tau . a . 1) = \tau . \tau . a . 1 = \tau . a . 1$

$\Rightarrow \tau . a . 1$ e soluție.

$a, b \notin I$ cu $a \neq b$ $\Rightarrow \tau . a . 1 \neq \tau . b . 1$ sunt soluții.

Deci vom considera că X apare gardat în S doar dacă

- S nu conține τ_I-uri.
- X apare într-un subterm de forma $a . t$ unde $a \in A$ (deci $a \neq \tau$)

PA/9

8) KFAR^b, CFAR^b

a) Se aruncă o monedă (head/tail) până apare head.

$$S = toss.(\tau.tail.S + \tau.head.1)$$

Presupunem că aruncarea o face altcineva și noi nu observăm până apare head.

$$I = \{toss, tail\} \leftarrow \text{poți inițiali.}$$

Am vrea să deducem

$$\tau_I(S) = \tau.head.1$$

Pt asta, trebuie introduse reguli speciale de deducție.

KFAR^b Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \dots, i_n \in I \cup \{\tau\}$ a.î. $\exists k \in [1,n]$ c.a. $i_k \neq \tau$.
$I \subseteq A$

Atunci din

$$\begin{cases} x_1 = i_1 . x_2 + y_1 \\ x_2 = i_2 . x_3 + y_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = i_{n-1} . x_n + y_{n-1} . \\ x_n = i_n . x_1 + y_n . \end{cases}$$

putem deduce

$$\tau . \tau_I(x_1) = \tau . \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_I(y_j) \right).$$

PA/10

În exemplul anterior, putem scrie specificația ca

$$S = toss.\ S' + 0$$
$$S' = \tau.\ S'' + \tau.\ head.\ 1$$
$$S'' = tail.\ S + 0.$$

$$\Rightarrow \tau.\ \tau_I(S') = \tau.\ (\tau_I(\tau.\ head.\ 1) + \tau_I(0) + \tau_I(0))$$
$$= \tau.\ \tau.\ head.\ 1$$
$$= \tau.\ head.\ 1.$$

$$\Rightarrow \tau_I(S) = \tau_I(toss.\ S') = \tau.\ \tau_I(S') = \tau.\ head.\ 1.$$

b) La fel dar cu zar (1–6) și aruncăm până la 6.

$$S = throw.\ \left(\sum_{j=1}^{5} \tau.\ a_j.\ S + \tau.\ a_6.\ 1\right)$$

Vrem $\tau_I(S) = \tau.\ a_6.\ 1.$

<u>def</u> $\mu X.E$ ← spec recursivă, $I \subseteq A$

$C \subseteq Var(E)$ s.n. <u>cluster</u> pt I în $\mu X.E$

dacă $X \in C$ și $\forall Z \in C\ \exists m \geq 1\ \exists i_1, \dots, i_m \in I \cup \{\tau\}$

$X_1, \dots, X_m \in C$ var recursive

$\exists n \geq 0\ \ Y_1, \dots, Y_n \notin C$

a.î. ec pt Z în C arată ca

$$\tau.\ \sum_{k=1}^{m} i_k.\ X_k + \sum^{n} Y_i.$$

PA/11

C sn <u>conservator</u> dacă $\forall Y$ din Y-urile Z-urilor

$\forall X \in C$

pot ajunge de la X la Y printr-un nr de ecaţii.

<u>ex</u> S se poate rescrie ca spec. urm. notată cu E:

$$\begin{cases} S = \text{throw}.\ X_0 + 0 \\ X_0 = \tau.X_1 + \tau.X_2 + \tau.X_3 + \tau.X_4 + \tau.X_5 + X_6. \\ \forall j \in \overline{1,5} \quad X_j = a_j.S + 0. \\ X_6 = \tau.a_6.1. \end{cases}$$

$$C = \{S_2\} \cup \{X_j \mid 0 \le j \le 5\}$$

Am ă $\forall X \in C$ am ă C e cluster conservator pt $I = \{\text{throw}\} \cup \{a_j \mid 1 \le j \le 5\}$

în $\mu X.E$.

(singurul Y e X_6)

<u>CFAR^b</u> E spec rec guardată $X \in Var(E)$

$I \subseteq A$, C cluster conservator pt I în $\mu X.E$

U mulţime Y-urilor.

$$\Rightarrow \quad \tau.\tau_I(X) = \tau.\left(\sum_{Y \in U} \tau_I(Y)\right)$$

PA/12

Din ex de mai sus avem

(pt $X := X_0$)

$$\tau . \tau_I(X_0) = \tau . \tau_I(X_6) = \tau . \tau . a_6 . 1 = \tau . a_6 . 1$$

deci

$$\tau_I(S) = \tau_I(\text{throw}. X_0) = \tau . \tau_I(X_0) = \tau . a_6 . 1$$

QED.