LOGICA MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Sem. I, 2017-2018

Ioana Leustean
FMI, UB

Partea II

- **Calculul propoziţional clasic**
  - Sintaxa
  - Semantica
  - Corectitudinea calculului propoziţional clasic

Calculul propoziţional

- O *propoziție* este un enunț care poate fi *adevărat*(1) sau *fals*(0).
- Propozițiile sunt notate simbolic (φ, ψ, χ, $\cdots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$).

Exemplu.

Fie φ propoziția: *Azi este vineri, deci avem curs de logică.*
Cine este $\neg\varphi$?
Propoziția $\neg\varphi$ este: *Azi este vineri și nu avem curs de logică.*

Calculul propoziţional

Exemplu.

Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară,
atunci Ion întârzie la întâlnire.

Trenul întârzie. Ion nu întârzie la întâlnire.

În consecință, sunt taxiuri la gară.

$\varphi =$ *trenul întârzie*
$\psi =$ *sunt taxiuri la gară*
$\chi =$ *Ion întârzie la întâlnire*

Raționamentul anterior poate fi reprezentat formal astfel:
$\{(\varphi \wedge \neg\psi) \to \chi, \varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$

Sintaxa si semantica

- Un sistem logic are două componente: sintaxa si semantica.
- Noțiunile **sintactice** sunt descrise formal, simbolic. Principalele noțiuni sintactice sunt: limbajul, formulele, teoremele, noțiunea de demonstrație. Simbolul $\vdash$ este sintactic si are următoarea semnificație: notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ.
- **Semantica** asociază un înțeles, o interpretare noțiunilor sintactice și definește riguros noțiunea de *formulă universal adevărată* (tautologie). Alte noțiuni semantice importante sunt: evaluările (interpretările), modelele, mulțimile de formule satisfiabile. Simbolul $\models$ este semantic și are următoarea semnificație: notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că formula φ este adevărată ori de câte ori toate formulele din Γ sunt adevărate.

Alfabet. Limbaj

Un **alfabet** este o mulțime de simboluri.
Un **cuvînt** este un șir finit de simboluri din alfabet.

Fie A un alfabet. Definim $A^+ = \{a_1 \dots a_n \mid n \geq 1, a_1, \dots, a_n \in A\}$ și $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ unde λ este *cuvîntul vid*.

Operația de concatenare $\cdot : A^* \times A^* \to A^*$ se definește prin

$$(a_1 \dots a_n) \cdot (b_1 \dots b_k) = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_k$$

$(A^*, \cdot, \lambda)$ este un monoid și se numește *monoidul cuvintelor peste alfabetul* A.

Sintaxa PC

Limbajul. Formulele.

Limbajul PC este format din:

- o mulțime infintă de variabile propoziționale: $Var = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$
- conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$ (binar)
- paranteze: (,).

Formulele PC se definesc *recursiv* astfel:

(F0) orice variabilă propozițională este formulă,

(F1) dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă,

(F2) daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă,

(F3) orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.

Vom nota cu *Form* multimea formulelor PC.

Limbajul. Formulele

Observație. $Form \subset (Var \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\})^*$

Exemple.

- $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Vom presupune că $\neg$ are precedența cea mai mare și vom pune parantezele numai atunci când sunt necesare. Astfel formula $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$ o vom scrie $(v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg v_1$.

Conectori derivaţi

Pentru φ si ψ formule oarecare, definim următoarele prescurtări:

$\varphi \vee \psi := \neg\varphi \rightarrow \psi$

$\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$

$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Inducţia structurală

Principiul inducţiei pe formule

Fie $\boldsymbol{P}(\varphi)$ o proprietate a formulelor astfel încât:

(0) $\boldsymbol{P}(v)$ este adevărată oricare $v \in Var$,

(1) dacă $\boldsymbol{P}(\varphi)$ este adevarată, atunci $\boldsymbol{P}(\neg\varphi)$ este adevarată oricare $\varphi \in Form$,

(2) dacă $\boldsymbol{P}(\varphi)$ și $\boldsymbol{P}(\psi)$ sunt adevărate, atunci $\boldsymbol{P}(\varphi \to \psi)$ este adevărată oricare φ, $\psi \in Form$.

Atunci $\boldsymbol{P}(\varphi)$ este adevărată pentru orice formulă $\varphi \in Form$.

Dem. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $P(n)$ astfel:

$$Q(n) \textit{ e adevărată ddacă}$$
$$\boldsymbol{P}(\varphi) \textit{ e adevărată or. } \varphi \in Form \textit{ cu cel mult } n \textit{ conectori logici}$$

și aplicăm Principiul Inducției (forma tare) pentru $Q(n)$.

Inducţia structurală

Dem. Notăm cu $c(\varphi)=$ nr. de conectori din φ

$Q(n)$: $\boldsymbol{P}(\varphi)$ e adevărată or. $\varphi \in Form$ cu $c(\varphi) \leq n$

$Q(0)$: $\boldsymbol{P}(\varphi)$ e adevărată or. $v \in Var$

Fie $n \in \mathbb{N}$ a.î. $Q(k)$ e adevărată or. $k \leq n$. Demonstrăm că $Q(n+1)$ e adevărată.Fie $\varphi \in Form$ cu $c(\varphi) \leq n+1$. Trebuie să demonstrăm că $\boldsymbol{P}(\varphi)$ e adevărată. Analizăm trei cazuri:

- dacă $\varphi \in Var$ atunci $\boldsymbol{P}(\varphi)$ e adevărată din $Q(0)$;
- dacă φ este $\neg\psi$ atunci $c(\psi) = n$ si $\boldsymbol{P}(\psi)$ e adevărată din $Q(n)$; aplicînd ipoteza (1) rezultă că $\boldsymbol{P}(\varphi)$ e adevărată ;
- dacă φ este $\psi_1 \to \psi_2$ atunci $c(\psi_1), c(\psi_2) \leq n$ si $\boldsymbol{P}(\psi_1)$, $\boldsymbol{P}(\psi_2)$ sunt adevărate din $Q(n)$; aplicînd ipoteza (2) rezultă că $\boldsymbol{P}(\varphi)$ e adevărată.

Exerciţiu: Definiţi prin inducţie $nc(\varphi)$ pentru orice formulă φ.

Sistemul deductiv

Vom prezenta sistemul deductiv al PC in *stilul Hilbert*, care presupune existența mai multor axiome și folosește ca regulă de deducție *modus ponens*. Alte modalități de prezentare a unui sistem de deductiv sunt *deducția naturală* și *calculul cu secvenți* (*sisteme Gentzen*).

Axiomele

Oricare ar fi φ, ψ și χ formule ale PC, următoarele formule sunt **axiome**:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

Regula de deducţie

$$\text{MP } (\textit{modus ponens}) \; \frac{\varphi, \; \varphi \to \psi}{\psi}$$

Demonstraţie. Teoreme

Definitie

O **demonstrație** este o secvență de formule φ_1, ..., φ_n astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- φ_i este axiomă,
- φ_i se obține din formulele anterioare prin MP: există j, $k < i$ astfel încât $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$

$$\frac{\varphi_k, \varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i}{\varphi_i}$$

O formulă φ este **teoremă** dacă există o demonstrație φ_1, ..., φ_n astfel încât $\varphi_n = \varphi$. Vom nota prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă.

O formulă φ este **demonstrabilă** dacă $\vdash \varphi$.

Teoreme ale PC

Lema 1. Pentru orice formulă φ avem $\vdash \varphi \to \varphi$.

Dem.

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ (A2)
(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ (A1)
(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ (1),(2), MP
(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$ (A1)
(5) $\vdash \varphi \to \varphi$ (3), (4), MP

Exercițiu. Dacă φ_1, ..., φ_n este o demonstrație,
atunci $\vdash \varphi_i$ oricare $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Deducţia din ipoteze

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiţie

O Γ-**demonstrație** (**demonstrație din ipotezele** Γ) este o secvența de formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- φ_i este axiomă sau $\varphi_i \in \Gamma$,
- φ_i se obține din formulele anterioare prin MP.

O formulă φ este Γ-**teoremă** dacă există o Γ-demonstrație $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel incat $\varphi_n = \varphi$. Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este Γ-teoremă. Observăm că $\vdash \varphi$ este echivalent cu $\emptyset \vdash \varphi$.
O formulă φ este **demonstrabilă din** Γ (**consecință sintactică** a lui Γ) dacă $\Gamma \vdash \varphi$.
Dacă Σ este o mulțime de formule atunci notăm prin $\Gamma \vdash \Sigma$ faptul că $\Gamma \vdash \sigma$ oricare $\sigma \in \Sigma$.

Deducţia din ipoteze

Exemplu.

Dacă Ana merge în excursie, atunci Maria merge în excursie.
Dacă Maria merge în excursie, atunci Elena merge în excursie.
În consecință, dacă Ana merge în excursie, atunci Elena merge în excursie.

$v_1 =$ *Ana merge în excursie*
$v_2 =$ *Maria merge în excursie*
$v_3 =$ *Elena merge în excursie*

Trebuie să demonstrăm că $\{v_1 \to v_2, v_2 \to v_3\} \vdash v_1 \to v_3$.

Exercițiu. Dacă $\Gamma \subseteq \Sigma$ si $\Gamma \vdash \varphi$ atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

TD (Herbrand, 1930)

Teorema deducţiei pentru PC

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

unde Γ este o mulțime de formule, iar φ si ψ sunt formule in PC.

Dem. Dacă $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci:

(1) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ($\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$)

(2) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ ($\varphi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$)

(3) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (1), (2), MP

Presupunem că $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ și demonstrăm că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Teorema deducţiei pentru PC

Dem. (continuare)

Fie $\psi_1, \ldots, \psi_n = \psi$ o demonstrație pentru ψ din ipotezele $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Demonstrăm că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$ prin inducție după $1 \leq i \leq n$.

Dacă $i = 1$, atunci ψ_1 este axiomă sau $\psi_1 \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $\psi_1 = \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$ deoarce $\vdash \varphi \to \varphi$. Dacă $\psi_1 \in \Gamma$ sau ψ_1 este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \psi_1$ si avem:

(1) $\Gamma \vdash \psi_1$
(2) $\Gamma \vdash \psi_1 \to (\varphi \to \psi_1)$ (A1)
(3) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_1$ (1), (2), MP

Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_k$ oricare $k < i$. Dacă ψ_i este axiomă sau $\psi_i \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ atunci demonstrăm ca mai sus. Altfel, există j, $k < i$ astfel incat $\psi_j = \psi_k \to \psi_i$. Rezultă:

(1) $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi_k \to \psi_i)$ (ip. de inducție)
(2) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_k$ (ip. de inductie)
(3) $\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi_k \to \psi_i)) \to ((\varphi \to \psi_k) \to (\varphi \to \psi_i))$ (A3)
(4) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$ (1), (2), $2 \times$ MP.

Pentru $i = n$ obținem $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Teoreme ale PC

Fie φ, ψ, χ formule în PC.

Lema 2. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

Dem.

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (ipoteza)
(5) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
(6) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$ TD
(7) $\{\varphi \to \psi\} \vdash \psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ TD
(8) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ TD.

Lema 3. $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
Dem. Exercițiu.

Lema 4. $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

Dem.

(1) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (A1)
(2) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (A3)
(5) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (3), (4), MP
(6) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(7) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ (5), (6), MP
(8) $\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$ TD
(9) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ TD

Lema 5. $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Dem. Exercitiu.

Teoreme ale PC

Lema 6. $\vdash (\neg\neg\varphi \to \varphi)$

Lema 7. $\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$

Lema 8. $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Lema 9. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Lema 10. $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Dem. Exercițiu.

Reguli de deducţie

O regula de deducție are forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}.$$

A demonstra o regulă de deducție derivată revine la a deduce *concluzia* $\Gamma \vdash \varphi$ din *premisele* $\Gamma_1 \vdash \varphi_1$, ..., $\Gamma_n \vdash \varphi_n$.

Exemplu. Folosind teorema deducției se demonstrează regula:

$$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Reguli de deducţie derivate

Observaţie

Dacă $\Gamma \vdash \varphi \to \phi$ atunci demonstrăm regula de deducție $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \phi}$ astfel:

(1) $\Gamma \vdash \varphi$ (premisa)
(2) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ (Γ-teorema)
(3) $\Gamma \vdash \psi$ (1), (2), MP.

Exemplu.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \ \Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Gamma \cup \Sigma \vdash \varphi \to \chi}$$

Dem.

(1) $\Gamma \cup \Sigma \vdash \varphi \to \psi$ (premisa)
(2) $\Gamma \cup \Sigma \vdash \psi \to \chi$ (premisa)
(3) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ (Lema 2)
(4) $\Gamma \cup \Sigma \vdash \varphi \to \chi$ (1), (2), $2 \times$ MP.

Reguli de deducţie derivate

Modus tollens

$$\frac{\vdash \varphi \rightarrow \psi, \vdash \neg\psi}{\vdash \neg\varphi}$$

Dem.

(1) $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ (premiză)
(2) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Lema 8)
(3) $\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (1), (2), MP
(4) $\vdash \neg\psi$ (premiză)
(5) $\vdash \neg\varphi$ (3), (4), MP

Reguli de deducţie derivate

Reductio ad absurdum

$$\frac{\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi, \ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Dem.

(1) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ (premiză)
(2) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ (premiză)
(3) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi))$ (Lema 4)
(4) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ (1), (2), (3), $2 \times$ MP
(5) $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$ TD
(6) $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ (A3)
(7) $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$ (5), (6), MP
(8) $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$ (Lema 1)
(9) $\Gamma \vdash \varphi$ (7), (8), MP

Semantica PC

Evaluare (Interpretare)

Valori de adevăr

Mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$. Tabelele de adevăr pentru $\neg$ și $\rightarrow$ sunt:

p	$\neg p$
0	1
1	0

și

p	c	$p \rightarrow c$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \rightarrow c = 1$ ddacă $p = 0$ sau $c = 1$

Exercițiu. Scrieți tabelele de adevăr pentru $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Evaluare (Interpretare)

Valori de adevăr

Mulțimea valorilor de adevăr este $\{0,1\}$ pe care considerăm operațiile de algebră Boole.

Definiţie

O **evaluare**(**interpretare**) este o funcție $e : Var \to \{0,1\}$.

Teoremă

Pentru orice evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ există o unică funcție $f_e : Form \to \{0,1\}$ care verifică următoarele proprietăți:

(e0) $f_e(v) = e(v)$ oricare $v \in Var$,

(e1) $f_e(\neg\varphi) = \overline{f_e(\varphi)}$ oricare $\varphi \in Form$,

(e2) $f_e(\varphi \to \psi) = f_e(\varphi) \to f_e(\psi)$ oricare φ, $\psi \in Form$.

Dem. Vom demonstra atât existența, cât și unicitatea, prin inducție structurală pe formule.

Metoda tabelului

Vrem să demonstrăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$

Dacă $v_1, \ldots, v_n$ variabilele care apar în φ, atunci
cele 2^n evaluări posibile $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	$\ldots$	$e_1(v_n)$	$f_{e_1}(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	$\ldots$	$e_2(v_n)$	$f_{e_2}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	$\ldots$	$e_{2^n}(v_n)$	$f_{2^n}(\varphi)$

Fiecare evaluare corespunde unei linii din tabel.

Tautologii. Modele

Definiţie

- O evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ este **model** al unei formule φ dacă $f_e(\varphi) = 1$.
- O formulă φ este **satisfiabilă** dacă admite un model. O mulțime Γ de formule este **satisfiabilă** dacă există o evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ astfel încât $f_e(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.
- O formulă φ este **tautologie** (**validă**, **universal adevarată**) dacă $f_e(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0,1\}$. Notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este o tautologie.
- Fie Γ o mulțime de formule. O formulă φ este $\Gamma-$**tautologie** (**consecință semantică a lui** Γ) dacă orice model al lui Γ este și model pentru φ.
  Notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că φ este o Γ-tautologie.

Corectitudinea PC

Teoremă de corectitudine.
Orice Γ-teoremă este Γ-tautologie: oricare ar fi $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$, dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci $\Gamma \models \varphi$. În particular, dacă $\vdash \varphi$ atunci $\models \varphi$.

Dem. Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ astfel încat $f_e(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$. Trebuie să arătăm că $f_e(\varphi) = 1$.
Fie φ_1, ..., $\varphi_n = \varphi$ o demonstrație pentru φ din ipotezele Γ.
Demonstrăm că $f_e(\varphi_i) = 1$ prin inducție după $1 \leq i \leq n$.
Pentru $i = 1$, φ_1 este axiomă sau $\varphi_1 \in \Gamma$. Daca $\varphi_1 \in \Gamma$, atunci $f_e(\varphi) = 1$ deoarece e este un model al lui Γ. Dacă φ_1 este axiomă, se verifică $f_e(\varphi_1) = 1$ prin calcul direct (exercițiu).
Presupunem că $f_e(\varphi_k) = 1$ oricare $k < i$ si demonstrăm că $f_e(\varphi_i) = 1$. Dacă φ_i este axiomă sau $\varphi_i \in \Gamma$ atunci procedam ca mai sus. Altfel, există j, $k < i$ astfel încât $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$. Rezultă $f_e(\varphi_j) = f_e(\varphi_k) \to f_e(\varphi_i)$. Folosind ipoteza de inducție avem $1 = 1 \to f_e(\varphi_i)$, deci $f_e(\varphi_i) = 1$. Pentru $i = n$, avem $f_e(\varphi) = 1$.