



Logică Matematică

Anul I, Semestrul II 2026

Laurențiu Leuștean

<https://cs.unibuc.ro/~lleustean/2026-LM/index.html>



Preliminarii



Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$A = B$ ddacă pentru orice $x \in T$, $x \in A$ ddacă $x \in B$

$A \subseteq B$ ddacă pentru orice $x \in T$, $x \in A$ implică $x \in B$

$A \subset B$ ddacă $A \subseteq B$ și $A \neq B$

$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

$A - B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

$C_TA = T - A = \{x \in T \mid x \notin A\}$

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar,
 $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale;
 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale; $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale.



Produsul cartezian

Notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b (care sunt **componentele** lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$;
 $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă $a = c$ și $b = d$.

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$



Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție.

Spunem că f este **definită pe A cu valori în B** , A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și B se numește **domeniul valorilor** lui f sau **codomeniul** lui f .

Notăție: Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $\text{Fun}(A, B)$, B^A sau $(A \rightarrow B)$.

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- ▶ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este **imaginea directă** a lui X prin f ; $f(A)$ este **imaginea** lui f .
- ▶ $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este **imaginea inversă** a lui Y prin f .
- ▶ Fie $f|_X : X \rightarrow B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este **restricția** lui f la X .



Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție.

- ▶ f este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- ▶ f este **surjectivă** dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- ▶ f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.



Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. **Compunerea** lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A este $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

O funcție $f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g este unică, se numește **inversa** lui f și se notează f^{-1} .

O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Fie $f : A \rightarrow A$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim $f^n : A \rightarrow A$ astfel:

$$f^0 = 1_A, \quad f^{n+1} = f^n \circ f \text{ pentru } n \geq 0.$$



Funcția caracteristică

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. **Funcția caracteristică** a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă $A, B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{C_T A}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.



Definiție

O **relație binară** între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

O relație binară pe A este o submulțime a lui $A \times A$.

Exemple

$$\triangleright \mid \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\mid = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

$$\triangleright < \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$< = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$$



Operații cu relații

Fie A, B, C mulțimi.

Definiție

- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci **relația inversă** $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci **compunerea** lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:
 $Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$
- ▶ **Diagonala** lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}.$

Exercițiu

- ▶ Compunerea relațiilor este asociativă.
- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R.$



Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A .

Notăție: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- ▶ R este **reflexivă** dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **ireflexivă** dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx .
- ▶ R este **antisimetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$,
 xRy și yRx implică $x = y$.
- ▶ R este **tranzitivă** dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
 xRy și yRz implică xRz .
- ▶ R este **totală** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx .



Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A se numește **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulțime nevidă și $\sim$ o relație de echivalență pe A .

Definiție

Pentru orice $x \in A$, **clasa de echivalență** $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.



Proprietăți

- ▶ $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- ▶ $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- ▶ $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numește **mulțimea cât** a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\sim$. Aplicația $\pi : A \rightarrow A/\sim$, $\pi(x) = [x]$ se numește **funcția cât**.



Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de

- ▶ **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ▶ **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ▶ **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă $\leq$ este o relație de ordine parțială (totală) pe A , spunem că $(A, \leq)$ este **mulțime parțial (total) ordonată**.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Proprietăți

- ▶ Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- ▶ Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- ▶ Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- ▶ **element minimal** al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- ▶ **element maximal** al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq a$ implică $a = e$;
- ▶ **cel mai mic element** (sau **minim**) al lui S , notat $\min S$, dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **cel mai mare element** (sau **maxim**) al lui S , notat $\max S$, dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.



Proprietăți

- ▶ Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- ▶ Dacă $\min S$ există, atunci $\min S$ este unicul element minimal al lui S .
- ▶ Dacă $\max S$ există, atunci $\max S$ este unicul element maximal al lui S .
- ▶ S poate avea mai multe elemente maxime sau minime.
- ▶ Un element minimal (maximal) al lui S nu este în general minim (maxim) al lui S .

Dem.: Exercițiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- ▶ **majorant** al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **minorant** al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **supremum** al lui S , notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S ;
- ▶ **infimum** al lui S , notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S .

Proprietăți

- ▶ Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S pot fi vide.
- ▶ Dacă există, atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că $(A, \leq)$ este mulțime **bine ordonată** dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numește relație de **bună ordonare** pe A .

Exemple

$(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

$(A, \leq)$ se numește **inductiv ordonată** dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Lema lui Zorn

Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.

- un instrument foarte util în demonstrații.

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \rightarrow A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i , obținem o **familie (indexată) de mulțimi** $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T . Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i, j \in I$, $i \neq j$, spunem că $\bigcup_{i \in I} A_i$ este o **reuniune disjunctă**.



Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} A_i &= \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$, $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ se numește **proiecție canonică** a lui $\prod_{i \in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j) \quad \text{și} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j).$$



$$I = \{1, \dots, n\}$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ și $A_1, \dots, A_n \subseteq T$.

► $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$, un **n -tuplu (ordonat)**

$$\text{► } \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ și } \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$\text{► } \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n \text{ și } A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$$

Definiție

O **relație n -ară** între $A_1, \dots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.

O relație n -ară pe A este o submulțime a lui A^n . Dacă R este relație n -ară, spunem că n este **aritatea** lui R .



Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice) (AC)

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- ▶ formulată de [Zermelo](#) (1904)
- ▶ a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C .

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulțime nevidă.



- ▶ Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- ▶ Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- ▶ Lema lui Zorn
- ▶ Principiul bunei ordonări: Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulțime bine ordonată).

H. Rubin, J. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice II*, North Holland, Elsevier, 1985



Definiția 1.1

Spunem că A este **echipotentă** cu B dacă există o bijecție $f : A \rightarrow B$. **Notatie:** $A \sim B$.

Propoziția 1.2

Pentru orice mulțimi A, B, C au loc:

- (i) $A \sim A$.
- (ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.
- (iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B dacă B este echipotentă cu A . De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

Definiția 1.3

O mulțime A se numește **finită** dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{0, 1, \dots, n-1\}$. În acest caz, notăm cu $|A|$ numărul elementelor lui A .

O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.

Definiția 1.4

O mulțime A este **numărabilă** dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Exemple

- ▶ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.
- ▶ Orice submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Teoremă Cantor

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este mulțime numărabilă.



Cardinale



Numerele cardinale sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Definiția 2.1

*Pentru orice mulțime A , **cardinalul** lui A (sau **numărul cardinal** al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:*

- ▶ $|A|$ este unic determinat de A .
- ▶ pentru orice mulțimi A, B , avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A .



Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A .

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A , $|A|$ este tot o mulțime.

Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci **clasă**. Vom nota cu **Card** clasa tuturor cardinalelor.

Notăm cardinalele cu $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \dots$.



Definiția 2.2

α este **cardinal** dacă există o mulțime A a.î. $\alpha = |A|$. Spunem, în acest caz, că A este un **reprezentant** al lui α .

Desigur, orice mulțime echipotentă cu A este, de asemenea, reprezentant al lui α .

Definiția 2.3

Fie $\alpha = |A|$ un cardinal. Dacă A este finită (respectiv infinită), spunem că α este un **cardinal finit** (respectiv **cardinal infinit**).

Notății

- ▶ Notăm $\mathbf{0} := |\emptyset|$ și, pentru orice $n \geq 1$, $\mathbf{n} := |\{0, 1, \dots, n-1\}|$.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și **puterea continuumului**.



Observația 2.4

- (i) O mulțime A este finită ddacă există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathbf{n} = |A|$. Prin urmare, putem identifica cardinalul $|A|$ cu numărul elementelor lui A .
- (ii) O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.

Observația 2.5

- (i) Pentru orice mulțime A , $\text{Fun}(\emptyset, A)$ are un singur element, **funcția vidă**. Prin urmare, $|\text{Fun}(\emptyset, A)| = \mathbf{1}$.
- (ii) Pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Fun}(A, \emptyset) = \emptyset$, deci $|\text{Fun}(A, \emptyset)| = \mathbf{0}$.



Definiția 2.6

Definim următoarea relație: pentru orice cardinale $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$,

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } f : A \rightarrow B.$$

Observația 2.7

Definiția relației $\leq$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Demonstrăm că

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } g : A' \rightarrow B'.$$

$\Rightarrow$ Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție injectivă. Atunci

$g := v \circ f \circ u^{-1} : A' \rightarrow B'$ este injectivă.

$\Leftarrow$ Avem că $f := v^{-1} \circ g \circ u : A \rightarrow B$ este injectivă.

Deci, definiția nu depinde de reprezentanții A și B .





Relației $\leq$ se asociază o nouă relație, definită astfel:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \leq \beta \text{ și } \alpha \neq \beta.$$

Propoziția 2.8

- (i) Pentru orice mulțimi A, B , dacă $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$.
- (ii) Pentru orice cardinal finit α , avem că $\alpha < \aleph_0$.
- (iii) Pentru orice mulțime A și orice cardinal α , dacă $\alpha \leq |A|$, atunci există o submulțime B a lui A a.î. $|B| = \alpha$.
- (iv) $0 \leq \alpha$ pentru orice cardinal α .
- (v) $1 \leq \alpha$ pentru orice cardinal $\alpha \neq 0$.
- (vi) Relația $\leq$ este reflexivă și tranzitivă.

Dem.: Exercițiu.



Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 2.9 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Dem.: (Schiță). Pentru orice $n \geq 0$, definim

$$h_n := (g \circ f)^n : A \rightarrow A, \quad A_n := h_n(A) \subseteq A, \quad B_n := h_n(g(B)) \subseteq A.$$

Evident, $h_0 = 1_A$, $A_0 = A$ și $B_0 = g(B)$. De asemenea, h_n este injectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $h_m \circ h_n = h_{m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

Afirmația 1: Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$. Prin urmare, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri descrescătoare de mulțimi a.î. $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} B_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.



Introducem următoarele notații:

$$C := \bigcap_{n \geq 0} A_n \quad \text{și, pentru orice } n \in \mathbb{N}, \quad A'_n := A_n - B_n, \quad B'_n := B_n - A_{n+1}.$$

Se observă ușor că mulțimile C , $\bigcup_{n \geq 0} A'_n$ și $\bigcup_{n \geq 0} B'_n$ sunt disjuncte două câte două.

Afirmația 2: $A = C \cup \bigcup_{n \geq 0} A'_n \cup \bigcup_{n \geq 0} B'_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.



Definim

$$\Phi : A \rightarrow B, \quad \Phi(a) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă } a \in C \cup \bigcup_{n \geq 0} A'_n \\ b & \text{dacă } a \in \bigcup_{n \geq 0} B'_n \text{ și } b \text{ este unicul element} \\ & \text{din } B \text{ a.î. } g(b) = a. \end{cases}$$

Observăm că Φ e bine definită pe a doua ramură: deoarece

$$\bigcup_{n \geq 0} B'_n \subseteq \bigcup_{n \geq 0} B_n = B_0 = g(B),$$

avem, în acest caz, $a \in g(B)$. Din injectivitatea funcției g , rezultă că există un unic $b \in B$ a.î. $g(b) = a$.

Afirmația 3: Φ este bijectivă.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Prin urmare, $A \sim B$.





O reformulare a Teoremei Cantor-Schröder-Bernstein este

Teorema 2.10

Relația $\leq$ este antisimetrică, adică pentru orice cardinale α, β avem:

$$\alpha \leq \beta \text{ și } \beta \leq \alpha \text{ implică } \alpha = \beta.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Atunci

- ▶ $\alpha \leq \beta$ ddacă există o funcție injectivă $f : A \rightarrow B$.
- ▶ $\beta \leq \alpha$ ddacă există o funcție injectivă $g : B \rightarrow A$.
- ▶ $\alpha = \beta$ ddacă $A \sim B$.





Teorema 2.11

Relația $\leq$ este totală, adică pentru orice cardinale α, β avem că $\alpha \leq \beta$ sau $\beta \leq \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A \text{ și } f : X \rightarrow B \text{ este funcție injectivă}\}.$$

Evident, $\mathcal{F}$ este nevidă. Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.



Afirmația 1: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g) . Deoarece $Y \subseteq A$ și $g : Y \rightarrow B$ este injectivă, avem că $|Y| \leq \alpha$ și $|Y| \leq \beta$. Dacă $Y = A$, atunci $\alpha = |A| = |Y| \leq \beta$.

Presupunem că $Y \neq A$. Distingem următoarele două cazuri:

- ▶ g este surjectivă. Atunci g este bijectivă, deci $|Y| = |B|$. Obținem că $\beta = |B| = |Y| \leq \alpha$.
- ▶ g nu este surjectivă. Atunci există $b \in B - g(Y)$. Deoarece $Y \neq A$, luăm $a \in A - Y$ și definim funcția $f : Y \cup \{a\} \rightarrow B$ astfel:

$$f|_Y = g \text{ și } f(a) = b.$$

Se observă ușor că $(Y \cup \{a\}, f) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup \{a\}, f)$, ceea ce este o contradicție cu faptul că (Y, g) este element maximal al lui $\mathcal{F}$. □



Teorema 2.12

Relația $\leq$ este o relație de ordine totală.

Dem.: Exercițiu.

Rezultă ușor că

Corolar 2.13

Relația $<$ este o relație de ordine strictă.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.14

Pentru orice mulțime infinită A , $\aleph_0 \leq |A|$. Prin urmare, orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.

Dem.: Definim inductiv șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din A cu proprietatea că $a_i \neq a_j$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.

Deoarece A este nevidă, există $a_0 \in A$.

Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci există $a_1 \in A$ a.î. $a_1 \neq a_0$.

Cum A este infinită, $A - \{a_0, a_1\}$ este nevidă, deci există $a_2 \in A$ a.î. $a_2 \neq a_0$ și $a_2 \neq a_1$.

În general, presupunem că am definit $a_0, \dots, a_n \in A$ distincte două câte două. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \dots, a_n\}$ este nevidă, deci există $a_{n+1} \in A$ diferit de toți $a_0, \dots, a_n$.



Cardinale - relația de ordine

Definind funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ prin $f(n) = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că f este injectivă. Prin urmare, $\aleph_0 \leq |A|$.

Deoarece f este injectivă, avem că $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. Rezultă că $f(\mathbb{N})$ este o submulțime numărabilă a lui A . □

Propoziția 2.15

Fie α un cardinal finit și β un cardinal infinit. Atunci $\alpha < \beta$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.16

Fie A o mulțime infinită și $F \subseteq A$ o submulțime finită a sa. Atunci $|A - F| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.17

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale, reprezentanții A și B fiind aleși a.î. $A \cap B = \emptyset$. Definim **suma cardinalelor** α și β prin

$$\alpha + \beta := |A \cup B|.$$

Observația 2.18

Observăm mai întâi că pentru orice cardinale α, β putem alege mulțimi A, B cu $|A| = \alpha, |B| = \beta$ și $A \cap B = \emptyset$. Într-adevăr, dacă $\alpha = |U|$ și $\beta = |V|$, atunci luăm $A = U \times \{1\}$ și $B = V \times \{2\}$.



Observația 2.19

Definiția operației $+$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$ cu $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$.
Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim

$$f : A \cup B \rightarrow A' \cup B', \quad f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in A \\ v(x) & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare,
 $\alpha + \beta = |A \cup B| = |A' \cup B'|.$





Propoziția 2.20

- (i) 0 este element neutru al lui $+$.
- (ii) Operația $+$ este comutativă și asociativă.
- (iii) Pentru orice cardinale α, β, γ ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha + \beta \leq \alpha + \gamma.$$

În particular, $\alpha \leq \alpha + \gamma$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.21

Pentru orice cardinal infinit α , avem $\alpha + \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid \emptyset \neq X \subseteq A \text{ și } f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X \text{ este funcție bijectivă}\}.$

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Dem.: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a lui A . Definim

$$f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X, \quad f(x_n, 0) = x_{2n}, \quad f(x_n, 1) = x_{2n+1}.$$

Se observă ușor că f este bijecție. Prin urmare, $(X, f) \in \mathcal{F}$. ■.

Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1 \times \{0,1\}} = f_1.$$



Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Demonstrație: Fie $\mathcal{G} = (X_i, f_i)_{i \in I}$ o submulțime total ordonată a lui $\mathcal{F}$. Fie $X := \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq A$. Definim $f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X$ astfel:

dacă $x \in X$, alegem un $i \in I$ a.î. $x \in X_i$ și definim
$$f(x, t) = f_i(x, t) \text{ pentru orice } t \in \{0, 1\}.$$

Definiția lui f este corectă, deoarece pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, dacă $x \in X_i \cap X_j$, atunci $f_i(x, t) = f_j(x, t)$. De asemenea, se observă ușor că $(X_i, f_i) \leq (X, f)$ pentru orice $i \in I$.

Rămâne să mai arătăm că f este bijectivă.

Demonstrăm că f este surjectivă. Fie $y \in X$ arbitrar. Atunci există $i \in I$ a.î. $y \in X_i$. Deoarece f_i este surjectivă, există $x \in X_i$, $t \in \{0, 1\}$ a.î. $f_i(x, t) = y$. Conform definiției lui f , rezultă că $f(x, t) = f_i(x, t) = y$.

Demonstrăm că f este injectivă. Fie $x, y \in X, s, t \in \{0, 1\}$ a.î. $f(x, s) = f(y, t)$. Atunci există $i, j \in I$ a.î. $x \in X_i$ și $y \in X_j$. Rezultă că $f(x, s) = f_i(x, s)$ și $f(y, t) = f_j(y, t)$, deci $f_i(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece $\mathcal{G}$ este total ordonată, avem următoarele două posibilități:

- ▶ $(X_i, f_i) \leq (X_j, f_j)$. Atunci $x \in X_i \subseteq X_j$ și $f_j|_{X_i \times \{0,1\}} = f_i$, deci $f_j(x, s) = f_i(x, s)$. Obținem că $f_j(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece f_j este injectivă, rezultă că $x = y$ și $s = t$.
 - ▶ $(X_j, f_j) \leq (X_i, f_i)$. Se demonstrează similar că $x = y$ și $s = t$.
- 

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g) . Așadar, $\emptyset \neq Y \subseteq A$ și $g : Y \times \{0, 1\} \rightarrow Y$ este bijecție, deci $|Y \times \{0, 1\}| = |Y|$.

Afirmația 3: $A - Y$ este finită.

Demonstrație: Presupunem că $A - Y$ este infinită. Din Propoziția 2.14, rezultă că $A - Y$ are o submulțime numărabilă C . Obținem, ca în demonstrația Afirmației 1, o bijecție $h : C \times \{0, 1\} \rightarrow C$. Definim

$$p : (Y \cup C) \times \{0, 1\} \rightarrow Y \cup C, \quad p(x, t) = \begin{cases} g(x, t) & \text{dacă } x \in Y \\ h(x, t) & \text{dacă } x \in C. \end{cases}$$

Deoarece g și h sunt bijecții, se arată ușor că p este, de asemenea, bijecție. Rezultă că $(Y \cup C, p) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup C, p)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui (Y, g) . Prin urmare, $A - Y$ este finită. ■



Suma cardinalelor

Aplicând Propoziția 2.16, avem că $|Y| = |A - (A - Y)| = |A| = \alpha$.
Obținem

$$\begin{aligned}\alpha &= |Y| = |Y \times \{0, 1\}| = |(Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})| \\ &= |Y \times \{0\}| + |Y \times \{1\}| = |Y| + |Y| = \alpha + \alpha. \quad \square\end{aligned}$$

Propoziția 2.22

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha + \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.23

Fie α, β cardinale a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.24

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim **produsul cardinalelor** α și β prin

$$\alpha \cdot \beta := |A \times B|.$$

Observația 2.25

Definiția operației $\cdot$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim

$$f : A \times B \rightarrow A' \times B', \quad f(a, b) = (u(a), v(b)).$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare,
 $\alpha \cdot \beta = |A \times B| = |A' \times B'|.$





Propoziția 2.26

- (i) $\mathbf{0} \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ pentru orice cardinal α .
- (ii) $\mathbf{1}$ este element neutru al lui $\cdot$.
- (iii) Pentru orice cardinale α, β, γ ,
$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma.$$
- (iv) Pentru orice cardinale α, β a.î. $\beta \neq \mathbf{0}$, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$.
- (v) Operația $\cdot$ este comutativă, asociativă și distributivă față de $+$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.27

Pentru orice cardinal infinit α , avem $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A, X \text{ infinită și } f : X \rightarrow X \times X \text{ este funcție bijectivă}\}.$$

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Demonstrație: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $X \subseteq A$. Prin urmare, există o bijecție $g : X \rightarrow \mathbb{N}$. Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, există o bijecție $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Definim

$$h : X \times X \rightarrow X, \quad h(x, y) = (g^{-1} \circ f)(g(x), g(y)).$$

Se arată ușor că h este bijecție. Rezultă că $(X, h^{-1}) \in \mathcal{F}$. ■



Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g) . Fie $\beta := |Y|$. Cum Y este o submulțime infinită a lui A , avem că β este un cardinal infinit și $\beta \leq \alpha$. Deoarece $g : Y \rightarrow Y \times Y$ este bijecție, avem că

$$(*) \quad \beta = |Y| = |Y \times Y| = |Y| \cdot |Y| = \beta \cdot \beta.$$

Afirmația 3: $\beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Aplicăm acum $(*)$ pentru a concludă că $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.





Definim inductiv α^n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ astfel:

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha.$$

Propoziția 2.28

Pentru orice cardinal infinit α și orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^n = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.29

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $0 \neq \beta \leq \alpha$, atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.30

Fie α, β cardinale nenule a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Presupunem că α este infinit. Deoarece $\leq$ este totală, avem următoarele două cazuri:

- ▶ $\beta \leq \alpha$. Atunci $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ și $\alpha \cdot \beta = \alpha$, conform Propoziției 2.29.
- ▶ $\alpha \leq \beta$. Atunci β este, de asemenea, infinit, $\max\{\alpha, \beta\} = \beta$ și $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = \beta$, conform Propoziției 2.29. □



Definiția 2.31

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim

$$\alpha^\beta := |A^B| = |\text{Fun}(B, A)|.$$

Observația 2.32

Definiția lui α^β nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim $\Phi : \text{Fun}(B, A) \rightarrow \text{Fun}(B', A')$ astfel:

pentru orice funcție $f : B \rightarrow A$, $\Phi(f) := u \circ f \circ v^{-1} : B' \rightarrow A'$.

Se demonstrează ușor că Φ este inversabilă, inversa sa fiind

$$\Psi : \text{Fun}(B', A') \rightarrow \text{Fun}(B, A), \quad \Psi(g) = u^{-1} \circ g \circ v$$

Prin urmare, $\alpha^\beta = |\text{Fun}(B, A)| = |\text{Fun}(B', A')|$.

