

Seminar 1

(S1.1) Fie A, B, C mulțimi. Demonstrați că

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demonstrație:

(i) Avem că

$$\begin{aligned} x \in A \times (B \cup C) &\iff \text{există } a \in A \text{ și } y \in B \cup C \text{ cu } x = (a, y) \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ și } y \in B \text{ sau } y \in C \text{ cu } x = (a, y) \\ &\iff (\text{există } a \in A \text{ și } y \in B \text{ cu } x = (a, y)) \\ &\quad \text{sau } (\text{există } a \in A \text{ și } y \in C \text{ cu } x = (a, y)) \\ &\iff x \in A \times B \text{ sau } x \in A \times C \\ &\iff x \in (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

Prin urmare, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) Demonstrăm prin dublă incluziune.

$\subseteq$ Fie $x \in A \times (B \cap C)$. Atunci există $a \in A$ și $y \in B \cap C$ cu $x = (a, y)$. Deoarece $y \in B$, rezultă că $x \in A \times B$. Deoarece $y \in C$, rezultă că $x \in A \times C$. Prin urmare, $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

$\supseteq$ Fie $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Atunci $x \in A \times B$ și $x \in A \times C$, așadar, $x = (a_1, y_1)$ cu $a_1 \in A, y_1 \in B$ și $x = (a_2, y_2)$ cu $a_2 \in A, y_2 \in C$. Deoarece $x = (a_1, y_1) = (a_2, y_2)$, trebuie să avem $a_1 = a_2$ și $y_1 = y_2$. Fie $a := a_1 = a_2$ și $y := y_1 = y_2$. Atunci $x = (a, y)$, cu $a \in A$ și $y \in B \cap C$. Rezultă că $x \in A \times (B \cap C)$.

Am demonstrat că $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(S1.2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ și $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relație binară pe A . Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R ?

Demonstrație: Obținem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

(S1.3) Să se demonstreze asociativitatea compunerii relațiilor.

Demonstrație: Fie $R \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, $S \subseteq C \times D$ trei relații. Vrem să demonstrăm că

$$(S \circ Q) \circ R = S \circ (Q \circ R).$$

$\subseteq$ Fie $(a, d) \in (S \circ Q) \circ R$. Atunci există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$ și $(b, d) \in S \circ Q$. Din faptul că $(b, d) \in S \circ Q$ avem că există $c \in C$ cu $(b, c) \in Q$ și $(c, d) \in S$. Din faptul că $(a, b) \in R$ și $(b, c) \in Q$, avem $(a, c) \in Q \circ R$. Am obținut că $(a, c) \in Q \circ R$ și $(c, d) \in S$. Prin urmare, $(a, d) \in S \circ (Q \circ R)$.

$\supseteq$ Se demonstrează analog.

(S1.4) Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$. Demonstrați următoarele:

- (i) Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- (ii) Dacă $\min S$ există, atunci $\min S$ este element minimal al lui S .
- (iii) Dacă $\max S$ există, atunci $\max S$ este element maximal al lui S .

Demonstrație:

- (i) Presupunem că x și x' sunt minime ale lui S și demonstrăm că sunt egale.

Deoarece x este minim al lui S , avem că $x \leq y$ pentru orice $y \in S$. Luând $y := x'$ obținem

$$x \leq x' \tag{1}$$

Deoarece x' este minim al lui S , avem că $x' \leq y$ pentru orice $y \in S$. Luând $y := x$ obținem

$$x' \leq x \tag{2}$$

Din (1) și (2), folosind faptul că $\leq$ este antisimetrică, rezultă că $x = x'$.

Se procedează asemănător pentru maxim.

- (ii) Fie $x = \min S$. Fie $t \in S$ a.î. $t \leq x$. Deoarece x este minimul lui S , avem și că $x \leq t$. Din $t \leq x$, $x \leq t$ și antisimetria lui $\leq$ rezultă că $x = t$. Prin urmare, x este element minimal al lui S .
- (iii) Se demonstrează similar.

(S1.5) Fie X o mulțime. Să se arate că nu există o funcție surjectivă cu domeniul X și codomeniul $\mathcal{P}(X)$.

Demonstrație: Presupunem că ar exista și fie $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulțimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicție.

(S1.6) Fie $\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid B \text{ este finită}\}$. Să se demonstreze că $(\mathcal{F}, \subseteq)$ nu este inductiv ordonată.

Demonstrație: Considerăm submulțimea

$$\mathcal{C} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \text{ unde } A_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Se arată ușor că $\mathcal{C}$ este total ordonată: pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, avem că $A_m \subseteq A_n$ dacă $m \leq n$ și $A_n \subseteq A_m$ dacă $n \leq m$.

Presupunem că $B \in \mathcal{F}$ este majorant al lui $\mathcal{C}$. Deoarece B este finită, există $M = \max B$. Rezultă că $B \subseteq A_M \subset A_{M+1}$. Am obținut o contradicție. Prin urmare, $\mathcal{C}$ nu are majoranți. Deci, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ nu este inductiv ordonată.