FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 4

(S4.1) Fie LP logica propoziţională. Să se arate următoarele:

(i) Mulţimea $Expr$ a expresiilor lui LP este numărabilă.

(ii) Mulţimea $Form$ a formulelor lui LP este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, că $|Sim| = |V| + |\{\neg, \rightarrow, (,)\}| = \aleph_0 + 4 = \aleph_0$. Deci Sim este numărabilă. Conform Propoziţiei 2.42.(i), rezultă că Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 1$. Aplicând Propoziţia 2.42.(iii) rezultă că $Expr$ este cel mult numărabilă. Deoarece $Sim \subseteq Expr$ şi Sim este numărabilă, rezultă că $Expr$ este, de asemenea, numărabilă.

(ii) Avem că $V \subseteq Form \subseteq Expr$. Prin urmare, $\aleph_0 = |V| \leq |Form|$ şi $|Form| \leq |Expr| = \aleph_0$. Aplicând Teorema Cantor-Schröder-Bernstein, obţinem că $|Form| = \aleph_0$. Prin urmare, $Form$ este numărabilă.

(S4.2) Fie LP logica propoziţională. Definim

$$W := \{\varphi \in Form \mid Var(\varphi) = \{v_1, v_2, v_3\}\}.$$

Să se demonstreze că W este numărabilă.
Demonstraţie: Deoarece $W \subseteq Form$, avem evident $|W| \leq |Form| = \aleph_0$. Fie

$$f : \mathbb{N}^* \to W, \quad f(n) = \underbrace{v_1 \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_1}_{n \text{ ori}}.$$

Evident, f este injectivă, prin urmare $\aleph_0 = |\mathbb{N}^*| \leq |W|$. Aplicăm acum Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a obţine că $|W| = \aleph_0$.

(S4.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele interpretări $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Demonstraţie: Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \mapsto a}(v_3) < e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \mapsto a}(v_3) = e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \mapsto a}(v_3) \leq e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e(v_3) \leq a \\
&\iff e(v_3) = 0.
\end{aligned}$$

(S4.4) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I, orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabilă x, avem:

$$\neg\forall x\varphi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\neg\varphi \tag{1}$$

$$\forall x\varphi \vDash \forall x(\varphi \vee \psi) \tag{2}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \vDash \exists x\varphi \to \exists x\psi \tag{3}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.
Demonstrăm (1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\neg\forall x\varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \not\vDash (\forall x\varphi)[e] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x \mapsto a}] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\neg\varphi)[e_{x \mapsto a}] \\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\exists x\neg\varphi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}] \\
&\implies \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \mapsto a}] \\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x \mapsto a}] \\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \vee \psi))[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (3):
Avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \mapsto a}] \iff$

(*) pentru orice $a \in A$, dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}]$, atunci $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \mapsto a}]$.

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi \to \exists x\psi)[e]$, adică

(**) dacă $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e]$, atunci $\mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e]$.

Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e]$. Atunci există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto b}]$. Din (*) rezultă că $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \mapsto b}]$. Deci $\mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e]$, ceea ce trebuia arătat.

(S4.5) Să se dea exemple de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\vDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;

(ii) $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \not\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x(\varphi \vee \psi))[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\mapsto n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luăm $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\mapsto n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luăm $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Avem:

(a) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\mapsto n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce este adevărat (luăm $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\mapsto n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luăm $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e]$. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \vDash (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\mapsto n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ şi $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e].$$