

## Seminar 4

(S4.1) Fie LP logica propozițională. Să se arate următoarele:

- (i) Mulțimea  $Expr$  a expresiilor lui LP este numărabilă.
- (ii) Mulțimea  $Form$  a formulelor lui LP este numărabilă.

(S4.2) Fie LP logica propozițională. Definim

$$W := \{\varphi \in Form \mid Var(\varphi) = \{v_1, v_2, v_3\}\}.$$

Să se demonstreze că  $W$  este numărabilă.

(S4.3) Considerăm limbajul de ordinul I  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$  (limbajul aritmeticii) și  $\mathcal{L}_{ar}$ -structura  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ . Fie formula  $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$ . Să se caracterizeze acele interpretări  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$  ce au proprietatea că  $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$ .

(S4.4) Să se arate că pentru orice limbaj  $\mathcal{L}$  de ordinul I, orice formule  $\varphi, \psi$  ale lui  $\mathcal{L}$  și orice variabilă  $x$ , avem:

$$\neg \forall x \varphi \quad \vDash \quad \exists x \neg \varphi \tag{1}$$

$$\forall x \varphi \quad \vDash \quad \forall x (\varphi \vee \psi) \tag{2}$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \quad \vDash \quad \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi \tag{3}$$

(S4.5) Să se dea exemple de limbaj  $\mathcal{L}$  de ordinul I și de formule  $\varphi, \psi$  ale lui  $\mathcal{L}$  astfel încât

- (i)  $\forall x (\varphi \vee \psi) \not\vDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$ ;
- (ii)  $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\vDash \exists x (\varphi \wedge \psi)$ .