FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 5

(S5.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I ce conţine un simbol de relaţie unar P. Să se arate că

$$\vDash \exists v_0(P(v_0) \to \forall v_1 P(v_1)).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Atunci:
$\mathcal{A} \vDash \big(\exists v_0(P(v_0) \to \forall v_1 P(v_1))\big)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (P(v_0) \to \forall v_1 P(v_1))[e_{v_0 \mapsto a}]$
$\iff$ există $a \in A$ a.î. $\big(\ \mathcal{A} \nvDash (P(v_0))[e_{v_0 \mapsto a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash (\forall v_1 P(v_1))[e_{v_0 \mapsto a}]\ \big)$
$\iff$ există $a \in A$ a.î. $\big(a \notin P^{\mathcal{A}}$ sau pentru orice $b \in A$, $b \in P^{\mathcal{A}}\big)$
$\iff$ $\big($există $a \in A$ a.î. $a \notin P^{\mathcal{A}}\big)$ sau $\big($pentru orice $b \in A$, $b \in P^{\mathcal{A}}\big)$
$\iff P^{\mathcal{A}} \neq A$ sau $P^{\mathcal{A}} = A$,
ceea ce este adevărat.

În continuare, $\mathcal{L}$ este un limbaj de ordinul I şi $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$.

(S5.2) Să se demonstreze că:

(i) $\vDash_{taut} \varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi$.

(ii) $\vDash_{taut} \psi \to (\varphi \to \psi)$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a \in \{0, 1\}$,

$$0 \wedge a = 0, \quad 0 \to a = 1, \quad 1 \wedge a = a, \quad 1 \to a = a, \quad a \to 1 = 1, \quad a \to a = 1.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $F : Form_{\mathcal{L}} \to \{0, 1\}$ o $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr.

(i) Avem că

$$\begin{aligned} F(\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi) &= F(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to F(\psi) = \big(F(\varphi) \wedge F(\varphi \to \psi)\big) \to F(\psi) \\ &= \big(F(\varphi) \wedge (F(\varphi) \to F(\psi))\big) \to F(\psi). \end{aligned}$$

Avem următoarele cazuri:

(a) $F(\varphi) = 0$. Atunci $\big(F(\varphi) \wedge (F(\varphi) \to F(\psi))\big) \to F(\psi) = \big(0 \wedge (0 \to F(\psi))\big) \to F(\psi) = 0 \to F(\psi) = 1$.

(b) $F(\varphi) = 1$. Atunci $\big(F(\varphi) \wedge (F(\varphi) \to F(\psi))\big) \to F(\psi) = \big(1 \wedge (1 \to F(\psi))\big) \to F(\psi) = (1 \to F(\psi)) \to F(\psi) = F(\psi) \to F(\psi) = 1$.

(ii) Avem că

$$F(\psi \to (\varphi \to \psi)) = F(\psi) \to F(\varphi \to \psi) = F(\psi) \to (F(\varphi) \to F(\psi)).$$

Avem următoarele cazuri:

(a) $F(\psi) = 0$. Atunci $F(\psi) \to (F(\varphi) \to F(\psi)) = 0 \to (F(\varphi) \to 0) = 1$.

(b) $F(\psi) = 1$. Atunci $1 \to (F(\varphi) \to 1) = F(\varphi) \to 1 = 1$.

(S5.3) Să se arate că:

(i) $\vDash \forall x\varphi \to \varphi$.

(ii) Pentru orice variabilă x cu $x \notin FV(\varphi)$, $\vDash \varphi \to \forall x\varphi$.

(iii) Pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$, $\vDash \exists x(x = t)$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \varphi)[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, adică pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]$. Pentru $a := e(x)$, avem că $e_{x\mapsto a} = e$. Prin urmare, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$

(ii) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\varphi)[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$. Fie $a \in A$. Cum $x \notin FV(\varphi)$, avem că e şi $e_{x\mapsto a}$ coincid pe $FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziţia 4.45 pentru a obţine că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]$.

(iii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists x(x = t))[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (x = t)[e_{x\mapsto b}] \iff$ există $b \in A$ a.î. $e_{x\mapsto b}(x) = t^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto b}) \iff$ există $b \in A$ a.î. $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto b})$. Cum $x \notin Var(t)$, putem aplica Propoziţia 4.44 pentru a obţine că $t^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acest lucru e simplu, doar luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.

(S5.4) Să se demonstreze că:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model a lui Γ. Conform ipotezei, avem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e]$, deci $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge (\varphi \to \psi))[e]$. Deoarece $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi$ este tautologie (a se vedea (S5.2).(i)), deci validă, rezultă că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi)[e]$. Obţinem că $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) ($\Rightarrow$) Deoarece $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$ şi $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, rezultă că $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \varphi \to \psi$. Cum $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \varphi$, putem aplica (i) pentru a obţine că $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

($\Leftarrow$) Presupunem că $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ şi fie $(\mathcal{A}, e)$ un model a lui Γ. Avem următoarele cazuri:

(a) $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$. Atunci $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)\,[e]$. .

(b) $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Atunci $(\mathcal{A}, e)$ este model a lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$, deci $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$, conform ipotezei. Deoarece $\psi \to (\varphi \to \psi)$ este tautologie (a se vedea (S5.2).(ii)), deci validă, rezultă că $\mathcal{A} \vDash (\psi \to (\varphi \to \psi))\,[e]$. Obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)\,[e]$.

(S5.5) Fie x o variabilă a.î. pentru orice $\gamma \in \Gamma$, $x \notin FV(\gamma)$. Demonstraţi următoarele:

(i) $\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \vDash \forall x\varphi$.

(ii) Dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vDash \varphi \to \psi \iff \Gamma \vDash \exists x\varphi \to \psi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ a.î. $(\mathcal{A}, e)$ este model a lui Γ, adică $\mathcal{A} \vDash \gamma[e]$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$.
Pentru orice $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, deoarece $x \notin FV(\gamma)$, avem că e şi $e_{x\mapsto a}$ coincid pe $FV(\gamma)$, deci putem aplica Propoziţia 4.45 pentru a obţine că $\mathcal{A} \vDash \gamma\,[e_{x\mapsto a}]$. Prin urmare, pentru orice $a \in A$, $(\mathcal{A}, e_{x\mapsto a})$ este model al lui Γ. Se poate arăta foarte uşor

(i) ($\Leftarrow$) Presupunem că $\Gamma \vDash \forall x\varphi$. Deoarece $\vDash \forall x\varphi \to \varphi$ (conform (S5.3)(i)), avem că $\Gamma \vDash \forall x\varphi \to \varphi$. Aplicăm (S5.4)(i) pentru a concluziona că $\Gamma \vDash \varphi$.

($\Rightarrow$) Presupunem că $\Gamma \vDash \varphi$. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ a.î. $(\mathcal{A}, e)$ este model a lui Γ, i.e. $\mathcal{A} \vDash \gamma[e]$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Pentru orice $a \in A$ şi orice $\gamma \in \Gamma$, deoarece $x \notin FV(\gamma)$, avem că e şi $e_{x\mapsto a}$ coincid pe $FV(\gamma)$, deci putem aplica Propoziţia 4.45 pentru a obţine că $\mathcal{A} \vDash \gamma\,[e_{x\mapsto a}]$. Prin urmare, pentru orice $a \in A$, $(\mathcal{A}, e_{x\mapsto a})$ este model al lui Γ. Deoarece $\Gamma \vDash \varphi$, obţinem că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi\,[e_{x\mapsto a}]$, adică $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$.

(ii) Deoarece $x \notin FV(\psi)$, avem conform (57) din Propoziţia 4.46 că $\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\varphi \to \psi$. Obţinem $\Gamma \vDash \exists x\varphi \to \psi \iff \Gamma \vDash \forall x(\varphi \to \psi) \iff \Gamma \vDash \varphi \to \psi$, conform (i).

(S5.6) Să se demonstreze că:

(i) $\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puţin una dintre $\Gamma\cup\{\varphi\}$ şi $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Demonstraţie:

(i) $\Gamma \not\vDash \varphi \iff$ există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi o evaluare $e : V \to A$ a.î. $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui Γ şi $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \iff$ există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi o evaluare $e : V \to A$ a.î. $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui Γ şi $\mathcal{A} \vDash (\neg\varphi)[e] \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

(ii) Similar.

(iii) Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model al lui Γ. Avem fie $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$, fie $\mathcal{A} \vDash (\neg\varphi)[e]$. Rezultă că $(\mathcal{A}, e)$ este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sau al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Concluzia rezultă.