

Seminar 6

Pentru primele două exerciții, fixăm \mathcal{L} un limbaj de ordinul I care conține:

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- două simboluri de constante c, d .

(S6.1) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui \mathcal{L} :

- (i) $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d)$;
- (ii) $\forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z))$;
- (iii) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z))$;
- (iv) $\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$.

Demonstrație:

(i)

$$\begin{aligned} \forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d) &\equiv \forall x(f(x) = c) \wedge \exists z \neg(g(y, z) = d) \\ &\equiv \forall x \exists z (f(x) = c \wedge \neg(g(y, z) = d)). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z)) &\equiv \forall y \exists z (\forall x P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \\ &\equiv \forall y \exists z (\forall u P(u, y) \rightarrow Q(x, z)) \\ &\equiv \forall y \exists z \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(x, z)). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z)) &\equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \neg \exists y \forall z (S(y) \rightarrow R(z))) \\ &\equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall y \exists z \neg (S(y) \rightarrow R(z))) \\ &\equiv \exists x (\forall u P(x, u) \vee \forall y \exists z \neg (S(y) \rightarrow R(z))) \\ &\equiv \exists x \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg (S(y) \rightarrow R(z))). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\exists z(\exists xQ(x, z) \vee \exists xR(x)) &\rightarrow \neg(\neg\exists xR(x) \wedge \forall x\exists zQ(z, x)) &\equiv \\ \exists z\exists x(Q(x, z) \vee R(x)) &\rightarrow (\neg\neg\exists xR(x) \vee \neg\forall x\exists zQ(z, x)) &\equiv \\ \exists z\exists x(Q(x, z) \vee R(x)) &\rightarrow (\exists xR(x) \vee \exists x\forall z\neg Q(z, x)) &\equiv \\ \exists z\exists x(Q(x, z) \vee R(x)) &\rightarrow \exists x(R(x) \vee \forall z\neg Q(z, x)) &\equiv \\ \exists z\exists x(Q(x, z) \vee R(x)) &\rightarrow \exists x\forall z(R(x) \vee \neg Q(z, x)) &\equiv \\ \exists z\exists x(Q(x, z) \vee R(x)) &\rightarrow \exists u\forall v(R(u) \vee \neg Q(v, u)) &\equiv \\ \forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x, z) \vee R(x)) &\rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u))).\end{aligned}$$

(S6.2) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunțul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

- (i) $\forall x\exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$;
- (ii) $\forall y\exists z\exists u(P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;
- (iii) $\exists x\forall u\forall y\exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;
- (iv) $\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.

Demonstrație:

- (i) Avem $\varphi^1 = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))_z(h(x)) = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x, h(x)) = d))$, unde h este un nou simbol de operație unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.
- (ii) Avem $\varphi^1 = \forall y\exists u(P(u, y) \rightarrow Q(y, z))_z(p(y)) = \forall y\exists u(P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde p este un nou simbol de operație unară, și $\varphi^2 = \forall y(P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))_u(j(y)) = \forall y(P(j(y), y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde j este un nou simbol de operație unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.
- (iii) Avem $\varphi^1 = \forall u\forall y\exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_x(m) = \forall u\forall y\exists z(P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, și $\varphi^2 = \forall u\forall y(P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_z(k(u, y)) = \forall u\forall y(P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(k(u, y))))$, unde k este un nou simbol de operație binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.
- (iv) Avem

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall z\forall x\forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))_u(n(z, x)) \\ &= \forall z\forall x\forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(n(z, x)) \vee \neg Q(v, n(z, x))))\end{aligned}$$

unde n este un nou simbol de operație binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(S6.3) Demonstrați că orice clasă finit axiomatizabilă \mathcal{K} de \mathcal{L} -structuri este axiomatizată de un singur enunț.

Demonstrație: Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de enunțuri a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$. Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A} \models \varphi_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\} \iff \mathcal{A} \models \varphi$. Așadar, $Mod(\varphi) = Mod(\Gamma) = \mathcal{K}$.

(S6.4) Demonstrați că dacă o clasă \mathcal{K} de \mathcal{L} -structuri este finit axiomatizabilă, atunci complementul său \mathcal{K}^c este de asemenea finit axiomatizabilă.

Demonstrație: Conform (S6.3), \mathcal{K} este axiomatizată de un singur enunț φ , deci $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$. Rezultă imediat că pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Prin urmare, $\mathcal{K}^c = Mod(\neg\varphi)$.

(S6.5) Considerăm limbajul \mathcal{L} ce conține un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2. Să se găsească un enunț φ astfel încât $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$.

Demonstrație: Luăm

$$\varphi := \forall v_0 \forall v_1 (v_0 < v_1 \rightarrow \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)).$$

Atunci $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$ ddacă

$$(*) \quad \text{pentru orice } p, q \in \mathbb{Q} \text{ cu } p < q \text{ există } r \in \mathbb{Q} \text{ a.î. } p < r < q,$$

ceea ce este adevărat.

Deci, $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$.

Pe de alta parte, $(\mathbb{Z}, <) \models \varphi$ ddacă

$$(**) \quad \text{pentru orice } m, n \in \mathbb{Z} \text{ cu } m < n \text{ există } p \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } m < p < n,$$

ceea ce este fals: pentru $m = 1$ și $n = 2$, nu există $p \in \mathbb{Z}$ a.î. $1 < p < 2$.

Deci, $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$.

(S6.6) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi și Γ o mulțime de enunțuri ale lui \mathcal{L} . Demonstrați următoarele:

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ este o \mathcal{L} -teorie.

(iii) Fie T o \mathcal{L} -teorie a.î. $\Gamma \subseteq T$. Atunci $Th(\Gamma) \subseteq T$.

Demonstrație:

(i) "⊇" Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \models \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$. Așadar, $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$.
Aplicăm Lema 4.72.(ii).

"⊆" Fie $\mathcal{A} \in Mod(\Gamma)$ și $\varphi \in Th(\Gamma)$ arbitrar. Avem că $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $\Gamma \models \varphi$, deci $\mathcal{A} \models \varphi$.
Așadar, $\mathcal{A} \in Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) Demonstrăm că $Th(\Gamma)$ este o \mathcal{L} -teorie. Pentru orice enunț φ , avem că

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) \models \varphi &\iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi) \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \text{ (conform (i))} \\ &\iff \Gamma \models \varphi \iff \varphi \in Th(\Gamma). \end{aligned}$$

(iii) Fie T o \mathcal{L} -teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \models \varphi$. Deoarece T este \mathcal{L} -teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$.